Math93.com

TD 1 - Terminale Spécialité
Logarithme

Les exercices suivants dont l'intitulé est suivi du symbole (c) sont corrigés intégralement en fin du présent TD.

Première partie
Définition de la fonction logarithme

Exercice 1.

Résoudre les équations suivantes (directement) :

1. $\mathrm{e}^{x} = 4 \iff x = \cdots$.
2. $2\,\mathrm{e}^{x} - 1 = 0 \iff x = \cdots$.
3. $\mathrm{e}^{-2x} = 16 \iff x = \cdots$.
4. $\mathrm{e}^{x-2} = -1 \iff x = \cdots$.
5. $\ln x = 3 \iff x = \cdots$.
6. $\ln 2x = -\dfrac{1}{2} \iff x = \cdots$.
7. $(\ln x)^2 = 4 \iff x = \cdots$.

Exercice 2.

Résoudre les équations suivantes après avoir effectué un changement de variable :

1. $(\ln x)^2 + \ln x - 2 = 0$.
2. $2\,(\ln x)^2 - \ln x - 15 = 0$.
3. $\mathrm{e}^{2x} - 5\,\mathrm{e}^{x} + 4 = 0$.

Exercice 3.

A partir de sa mise en culture, l'évolution d'une population de bactéries en fonction du temps est donnée, pour t exprimée en heures par :

$$g(t) = 10^6\ \mathrm{e}^{0,25\,t}$$

1. Calculer la population initiale à $t = 0$.
2. Calculer le temps au bout duquel la population sera multipliée par 2.

Exercice 4. Résoudre des systèmes

1. $\begin{cases} \ln x + \ln y = 1 \\ \ln x - 2\ln y = -1 \end{cases}$.
2. $\begin{cases} 2\ln x + \ln y = -1 \\ 5\ln x + 3\ln y = 0 \end{cases}$.

Exercice 5. Ensemble de définition

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions définies par :

1. $f(x) = \ln(3 - x)$.
2. $g(x) = \ln|x|$.
3. $h(x) = \ln(x^2 + x - 2)$.
4. $i(x) = \ln(\mathrm{e}^{x} - 1)$.

Exercice 6. Ensemble de définition et équation

Déterminer l'ensemble de définition des expressions puis résoudre les équations :

1. $\ln(2x-3)=1$.
2. $\ln|2-x|=1$.
3. $\ln(x^2-1)=0$.

Deuxième partie
Propriétés algébriques

Exercice 7. Avec les formules (c)

1. Exprimer en fonction de $\ln 2$ les réels :

1. a. $\ln 8 = \cdots$

1. b. $\ln \dfrac{1}{16} = \cdots$

1. c. $\ln\left(2\,\mathrm{e}^{2}\right) = \cdots$

2. Exprimer en fonction de $\ln 3$ les réels :

2. a. $\ln\left(3\,\mathrm{e}^{-3}\right) = \cdots$

2. b. $\ln 81 + \ln 27 = \cdots$

2. c. $\ln\left(9\sqrt{3}\right) = \cdots$

2. d. $2\ln\left(\dfrac{1}{9}\right) - 3\ln\left(3\,\mathrm{e}^{-2}\right) = \cdots$

2. e. $5\ln(9) + 3\ln\left(\dfrac{1}{3^2}\right) = \cdots$

Exercice 8. Simplifier

Montrer que :

1. $\ln\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)+\ln\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)=2\ln 2$.
2. $\ln\left(3+\sqrt{5}\right)^2+\ln\left(3-\sqrt{5}\right)^2=4\ln 2$.
3. $\ln\dfrac{1}{2}+\ln\dfrac{2}{3}+\ln\dfrac{3}{4}+\cdots+\ln\dfrac{49}{50}=-\ln 2-2\ln 5$.
4. Pour tout réel x :

$$\ln\left(\mathrm{e}^{2x}\right)-\ln\left(2\,\mathrm{e}^{x}\right)=x-\ln 2$$

Exercice 9. Encore des équations (c)

Établir les conditions d'existence des expressions puis résoudre les équations.

1. $\ln(2x-1)+\ln(2x+1)=\ln(x+2)$.
2. $\ln(x^2-4)-\ln(x+2)=-\ln(x-2)$.

Troisième partie
Les suites, c'est ma passion !

Exercice 10. Suite (c_n)

Suite (c_n) la suite définie pour tout entier n par :

$$c_n = 500\times 1,05^n+100$$

1. Déterminer la limite de la suite (c_n).
2. Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation $c_n > 5\,000$ par le calcul.
3. Vérifier à l'aide de la calculatrice le résultat précédent.

Réponses
(2.) $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n=+\infty$ *(3.)* $n\geqslant 47$.

Exercice 11. Suite (b_n) (c)

Suite (b_n) la suite définie pour tout entier n par :

$$b_n = -7 \times 0,6^n + 5$$

1. Déterminer la limite de la suite (b_n).
2. Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation : $b_n > 4,99$.
3. Vérifier à l'aide de la calculatrice le résultat précédent.

Exercice 12. Suite (a_n)

Suite (a_n) la suite définie pour tout entier n par :

$$a_n = 10 \times 0,9^n - 2$$

1. Montrer que la suite (a_n) est décroissante.
2. Déterminer la limite de la suite (a_n).
3. A l'aide de la calculatrice, résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation : $a_n < -1,99$.
4. Résoudre l'inéquation de la question précédente par le calcul.

Réponses
(2.) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -2$ ***(4.)*** $a_n < -1,99 \iff n \geqslant 66$.

Exercice 13. Comme au Bac

Pour tout entier naturel n, on définit la suite (u_n) par :

$$u_{n+1} = 1,12u_n - 6 \text{ et } u_0 = 75$$

On pose pour tout entier naturel n : $v_n = u_n - 50$.

1. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique. En préciser la raison et le premier terme.
2. En déduire l'expression de v_n en fonction de n puis montrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n = 25 \times 1,12^n + 50$$

3. Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $u_n > 100$.

Réponses
(3.) $u_n > 100 \iff n \geqslant 7$.

Exercice 14. Un peu d'initiative

1. On place 1 000 euros à intérêts composés sur un livret A au taux annuel de $0,5\%$.
   Combien d'années sont nécessaires pour doubler ce capital (sans y toucher) ?
2. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{2}$$

   Déterminer pour quelles valeurs de n on a :

$$0,4999 \leqslant u_n \leqslant 0,5$$

Quatrième partie

Inéquations et études de fonctions

Exercice 15. Inéquations (c)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes après avoir déterminé les conditions d'existence.

1. $\ln x + \ln(x-3) < 2\ln 2$.
2. $\ln(x+2) \leqslant 2\ln x$.
3. $\ln(x-13) \geqslant 2\ln(x+3)$.
4. $(\ln x)^2 - \ln x - 6 > 0$.

Exercice 16. Limites (c)

1. Déterminer la limite en 0^+ et $+\infty$ des fonctions définies par :

   1. a. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x+1}$.

   1. b. $g(x) = \dfrac{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}$.

   1. c. $h(x) = \dfrac{1}{x} - \ln x$.

   1. d. $k(x) = (\ln x)^2 - \ln x$.

2. Déterminer la limite en 2^+ et $+\infty$ de la fonction définie par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{2x+1}{x-2}\right)$$

Exercice 17. Ensemble de définition, variations et limites

Déterminer l'ensemble de définition, les variations, et les limites aux bornes de l'ensemble de définition des fonctions définies par :

1. $f(x) = \ln(-2x+1)$.
2. $g(x) = 3x - 2 - 2x\ln x$.
3. $h(x) = \dfrac{1}{4}x^2\,(2\ln x - 1)$.
4. $k(x) = \ln(\ln x)$.
5. $l(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)$.
6. $m(x) = \ln(\mathrm{e}^{x} - x)$.

Cinquième partie

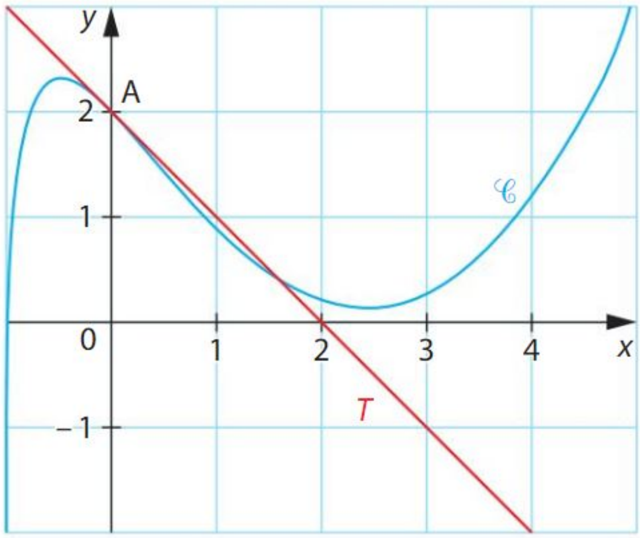
Problèmes et compléments

Exercice 18. Avec des lectures graphiques (c)

- La courbe $\mathscr{C}$ donnée ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c + 2\ln(x+1)$$

- La droite T contenant le point $A(0\ ;\ 2)$ de $\mathscr{C}$ et le point de coordonnées $(2\ ;\ 0)$ est la tangente en A à $\mathscr{C}$.



1. Lire graphiquement $f'(3)$ en expliquant votre démarche.

2. On donne $f'(3) = \frac{1}{2}$. Avec ce résultat et les renseignements fournis par l'énoncé, déterminer a, b et c.

3. Étudier les variations de f et ses limites.

Exercice 19. Avec une fonction auxiliaire

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 + x - \frac{1+\ln x}{x}$$

où a, b et c sont des nombres réels.

1. On considère la fonction h définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$h(x) = 2x^3 + x^2 + \ln x$$

1. a. Étudier les variations de h sur $]0\,;\,+\infty[$.

1. b. Étudier les limites de h en 0 et $+\infty$.

1. c. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α et en donner un encadrement d'amplitude 10^{-3}.

1. d. En déduire le signe de h.

2.

2. a. Étudier les limites de f en 0 et $+\infty$. En déduire une asymptote pour $\mathscr{C}_f$.

2. b. Étudier les variations de f sur $]0\,;\,+\infty[$. Dresser le tableau de variations de f.

3. Montrer que :

$$f(\alpha) = \frac{3\alpha^3 + 2\alpha^2 - 1}{\alpha}$$

4. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

*Aide : on pourra rapidement montrer que la fonction $k\ :\ x \longmapsto \dfrac{3x^3 + 2x^2 - 1}{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et utiliser l'encadrement de α de la question **1.c**.*

Exercice 20. Un problème de tangtente (c)

On on note (C_f) la courbe représentative dans un repère du plan de la fonction f définie sur [0,2 ; 10] par :

$$f(x) = 2x^2 \ln(x)$$

Le but de cet exercice est de prouver que la courbe (C_f) admet sur [0,2 ; 10] une seule tangente passant par l'origine du repère.

1. Montrer que pour $x \in [0,2\ ;\ 10]$, la dérivée de f est donnée par :

$$f'(x) = 2x(2\ln(x) + 1)$$

2. Soit a un réel de [0,2 ; 10], montrer que la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse a a pour équation :

$$y = 2a(2\ln(a) + 1)x - 2a^2(\ln(a) + 1)$$

3. Répondre alors au problème posé.

Exercice 21. Tangentes et aire maximale d'un triangle (Liban 2019)

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle]0 ; 1] par

$$f(x) = x(1 - \ln x)^2.$$

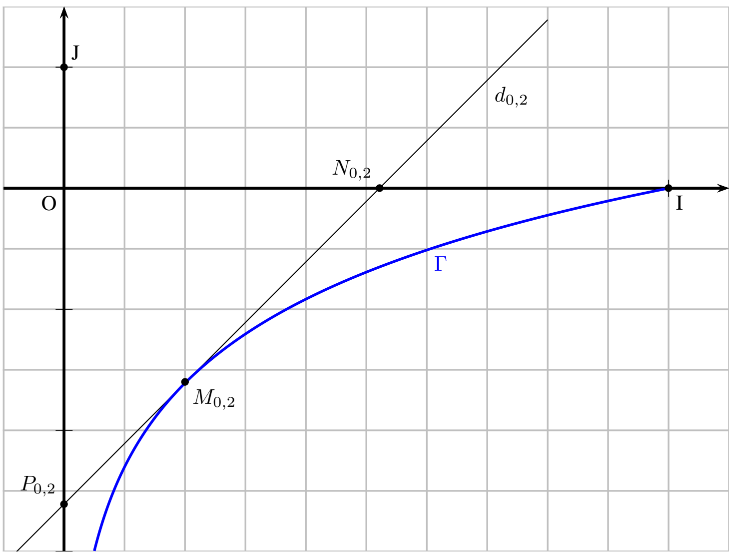
1. a. Déterminer une expression de la fonction dérivée de f et vérifier que pour tout $x \in]0\ ;\ 1]$,

$$f'(x) = (\ln x + 1)(\ln x - 1)$$

1. b. Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations sur l'intervalle]0 ; 1] (on admettra que la limite de la fonction f en 0 est nulle).

On note Γ la courbe représentative de la fonction g définie sur l'intervalle]0 ; 1] par $g(x) = \ln x$.
Soit a un réel de l'intervalle]0 ; 1]. On note M_a le point de la courbe Γ d'abscisse a et d_a la tangente à la courbe Γ au point M_a. Cette droite d_a coupe l'axe des abscisses au point N_a et l'axe des ordonnées au point P_a .
On s'intéresse à l'aire du triangle ON_aP_a quand le réel a varie dans l'intervalle]0 ; 1].

2. Dans cette question, on étudie le cas particulier où $a = 0,2$ et on donne la figure ci-dessous.



2. a. Déterminer graphiquement une estimation de l'aire du triangle O$N_{0,2}P_{0,2}$ en unités d'aire.

2. b. Déterminer une équation de la tangente $d_{0,2}$.

2. c. Calculer la valeur exacte de l'aire du triangle O$N_{0,2}P_{0,2}$.
Dans ce qui suit, on admet que, pour tout réel a de l'intervalle]0 ; 1], l'aire du triangle ON_aP_a en unités d'aire est donnée par $\mathcal{A}(a) = \frac{1}{2}a(1 - \ln a)^2$.

3. À l'aide des questions précédentes, déterminer pour quelle valeur de a l'aire $\mathcal{A}(a)$ est maximale. Déterminer cette aire maximale.

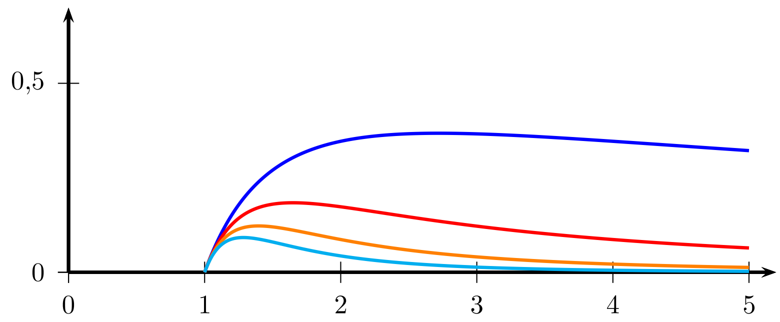
Réponses
Le corrigé complet sur www.math93.com

Exercice 22. Familles de courbes (Liban 2018)

On considère, pour tout entier $n > 0$, les fonctions f_n définies sur l'intervalle [1 ; 5] par :

$$f_n(x) = \frac{\ln x}{x^n}.$$

Pour tout entier $n > 0$, on note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthogonal.
Sur le graphique ci-dessous sont représentées les courbes $\mathcal{C}_n$ pour n appartenant à $\{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$.



1. Montrer que, pour tout entier $n > 0$ et tout réel x de l'intervalle [1 ; 5] :

$$f_n'(x) = \frac{1 - n\ln(x)}{x^{n+1}}.$$

2. Pour tout entier $n > 0$, on admet que la fonction f_n admet un maximum sur l'intervalle [1 ; 5].
On note A_n le point de la courbe $\mathcal{C}_n$ ayant pour ordonnée ce maximum.
Montrer que tous les points A_n appartiennent à une même courbe Γ d'équation

$$y = \frac{1}{\mathrm{e}}\ln(x).$$

3. Montrer que, pour tout entier $n > 1$ et tout réel x de l'intervalle [1 ; 5] :

$$0 \leqslant \frac{\ln(x)}{x^n} \leqslant \frac{\ln(5)}{x^n}.$$

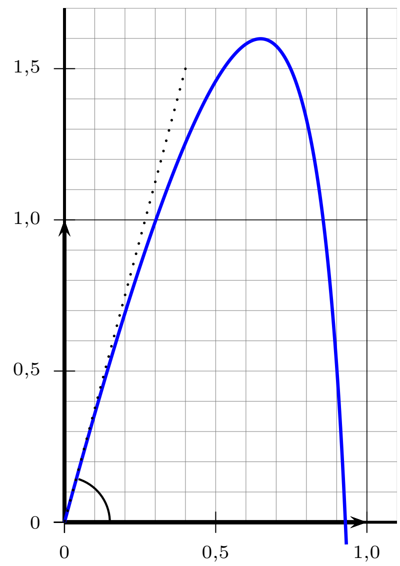
Réponses
Le corrigé complet sur www.math93.com

Exercice 23. Baccalauréat S Amérique du Nord 29 mai 2018

Lors d'une expérience en laboratoire, on lance un projectile dans un milieu fluide. L'objectif est de déterminer pour quel angle de tir θ par rapport à l'horizontale la hauteur du projectile ne dépasse pas $1,6$ mètre.
Comme le projectile ne se déplace pas dans l'air mais dans un fluide, le modèle parabolique usuel n'est pas adopté.
On modélise ici le projectile par un point qui se déplace, dans un plan vertical, sur la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,1[$ par :

$$f(x) = bx + 2\ln(1-x)$$

où b est un paramètre réel supérieur ou égal à 2, x est l'abscisse du projectile, $f(x)$ son ordonnée, toutes les deux exprimées en mètres.



1. La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,1[$. On note f' sa fonction dérivée.
   On admet que la fonction f possède un maximum sur l'intervalle $[0\,;\,1[$ et que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1[$:
   $$f'(x) = \frac{-bx + b - 2}{1-x}.$$
   Montrer que le maximum de la fonction f est égal à $b - 2 + 2\ln\left(\frac{2}{b}\right)$.
2. Déterminer pour quelles valeurs du paramètre b la hauteur maximale du projectile ne dépasse pas $1,6$ mètre.
3. Dans cette question, on choisit $b = 5,69$.
   L'angle de tir θ correspond à l'angle entre l'axe des abscisses et la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse 0 comme indiqué sur le schéma donné ci-dessus.
   Déterminer une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle θ.

Réponses
Le corrigé complet sur www.math93.com

Exercice 24. Niveau *

1. Montrer que, pour tout x et y strictement positifs :
   $$\frac{\ln x + \ln y}{2} \leqslant \ln\left(\frac{x+y}{2}\right)$$
2. On note $A\,(x\ ;\ \ln x)$, $B\,(y\ ;\ \ln y)$ et $C\left(\frac{x+y}{2}\ ;\ \ln\frac{x+y}{2}\right)$. Que dire de la position du point I, milieu du segment $[AB]$ par rapport au point C ?

Fin du TD

Sixième partie

Correction

Correction de l'exercice 7 page 2

1. Exprimer en fonction de $\ln 2$ les réels :

1. a. $\ln 8 = 3\ln 2$

1. b. $\ln \dfrac{1}{16} = -4\ln 2$

1. c. $\ln\left(2\,\mathrm{e}^{\,2}\right) = 2 + \ln 2$

2. Exprimer en fonction de $\ln 3$ les réels :

2. a. $\ln\left(3\,\mathrm{e}^{\,-3}\right) = \ln 3 - 3$

2. b. $\ln 81 + \ln 27 = \underline{7\ln 3}$

2. c. $\ln\left(9\sqrt{3}\right) = \dfrac{5}{2}\ln 3$

2. d. $2\ln\left(\dfrac{1}{9}\right) - 3\ln\left(3\,\mathrm{e}^{\,-2}\right) = -7\ln 3 + 6$

2. e. $5\ln(9) + 3\ln\left(\dfrac{1}{3^2}\right) = 4\ln 3$

Correction de l'exercice 9 page 2

Établir les conditions d'existence des expressions puis résoudre les équations.

1. $\ln(2x-1) + \ln(2x+1) = \ln(x+2)$.

Corrigé

- L'équation est définie si et seulement si :

$$\begin{cases} 2x-1>0 \\ 2x+1>0 \\ x+2>0 \end{cases} \iff \boxed{x>\dfrac{1}{2}}$$

- Pour $x \in I =]\frac{1}{2}\,;\,+\infty[$ on a :

$$\begin{aligned} \ln(2x-1)+\ln(2x+1)=\ln(x+2) &\iff \ln(2x-1)(2x+1)=\ln(x+2) \\ &\iff (2x-1)(2x+1)=(x+2) \\ &\iff 4x^2-1-x-2=0 \\ &\iff 4x^2-x-3=0 \ \text{ exp. pol.2nd degré, } \Delta=49 \text{ et racines } -\dfrac{3}{4} \text{ et } 1 \\ &\iff x=-\dfrac{3}{4}\notin I \ \text{ ou } \ x=1\in I \end{aligned}$$

- Conclusion : cette équation admet <u>une seule solution $x=1$</u>.

2. $\ln(x^2-4) - \ln(x+2) = -\ln(x-2)$.

Corrigé

- L'équation est définie si et seulement si :

$$\begin{cases} x^2-4>0 \\ x+2>0 \\ x-2>0 \end{cases} \iff \begin{cases} x>2 \ \text{ ou } \ x<-2 \\ x>-2 \\ x>2 \end{cases} \iff \boxed{x>2}$$

- Pour $x \in I =]2\,;\,+\infty[$ on a :

$$\begin{aligned}\ln(x^2-4) - \ln(x+2) = -\ln(x-2) &\iff \ln(x-2)(x+2) - \ln(x+2) + \ln(x-2) = 0\\ &\iff \ln(x-2) + \ln(x+2) - \ln(x+2) + \ln(x-2) = 0\\ &\iff 2\ln(x-2) = 0\\ &\iff \ln(x-2) = 0 \iff x-2 = 1\\ &\iff x = 3 \in]2\,;\,+\infty[\end{aligned}$$

- Conclusion : cette équation admet une seule solution $x = 3$.

Correction de l'exercice 11 page 3 : suites

Suite (b_n) la suite définie pour tout entier n par :

$$b_n = -7 \times 0,6^n + 5$$

1. Déterminer la limite de la suite (b_n).
2. Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation : $b_n > 4,99$.

Corrigé

- On a $q = 0,6 \in]-1\,;\,1[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} = 0,6^n = 0$.

  De ce fait par produit et somme :

$$\lim_{n\to+\infty} -7 \times 0,6^n = 0 \Longrightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty} b_n = 5}$$

- Inéquation :

$$\begin{aligned}-7\times 0,6^n + 5 > 4,99 &\iff -7\times 0,6^n > -0,01\\ &\iff 0,6^n < \frac{0,01}{7} = \frac{1}{700} \quad \text{On compose par la fonction ln strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*\\ &\iff \ln 0,6^n < \ln\frac{1}{700} = -\ln 700\\ &\iff n\ln 0,6 < -\ln 700 \quad \text{On divise par } \ln 0,6 < 0\text{, l'ordre change}\\ &\iff n > \frac{-\ln 700}{\ln 0,6} \approx 12,8\end{aligned}$$

  Et puisque n est entier on a :

$$\boxed{b_n > 4,99 \iff n \geqslant 13}$$

Correction de l'exercice 15 page 4 : inéquations

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes après avoir déterminé les conditions d'existence.

1. $\ln x + \ln(x-3) < 2\ln 2$.

Corrigé

- L'inéquation est définie si et seulement si : $x > 3$.

- Pour $x > 3$ on a :

$$\begin{aligned} \ln x + \ln(x-3) < 2\ln 2 &\iff \ln x(x-3) < \ln 4 \text{ On compose par la fonction exp strictement croissante sur } \mathbb{R} \\ &\iff x(x-3) < 4 \\ &\iff x^2 - 3x - 4 < 0 \text{ expression pol. du 2nd degré, } \Delta = 25 \text{ et les racines } -1 \text{ et } 4 \\ &\iff (x+1)(x-4) < 0 \\ &\iff \Big(-1 < x < 4\Big) \text{ et } x > 3 \end{aligned}$$

- Conclusion : $\underline{S =]3\ ;\ 4[}$.

2. $\ln(x+2) \leqslant 2\ln x$.

Corrigé

- L'inéquation est définie si et seulement si : $x > 0$.
- Pour $x > 0$ on a :

$$\begin{aligned} \ln(x+2) \leqslant 2\ln x &\iff \ln(x+2) \leqslant \ln x^2 \text{ On compose par la fonction exp strictement croissante sur } \mathbb{R} \\ &\iff x + 2 \leqslant x^2 \\ &\iff -x^2 + x + 2 \leqslant 0 \text{ expression pol. du 2nd degré, } \Delta = 9 \text{ et les racines } -1 \text{ et } 2 \\ &\iff (x+1)(x-2) \leqslant 0 \\ &\iff \Big(x \leqslant -1 \text{ ou } x \geqslant 2\Big) \text{ et } x > 0 \end{aligned}$$

- Conclusion : $\underline{S = [2\ ;\ +\infty[}$.

3. $\ln(x-13) \geqslant 2\ln(x+3)$.

Corrigé

- L'inéquation est définie si et seulement si : $x > 13$.
- Pour $x > 13$ on a :

$$\begin{aligned} \ln(x-13) \geqslant 2\ln(x+3) &\iff \ln(x-13) \geqslant \ln(x+3)^2 \text{ On compose par exp strictement croissante sur } \mathbb{R} \\ &\iff x - 13 \geqslant (x+3)^2 \\ &\iff -x^2 - 5x - 22 \geqslant 0 \text{ expression pol. du 2nd degré, } \Delta < 0 \text{ pas de racine} \\ &\iff \Big(x \in \varnothing\Big) \text{ et } x > 13 \end{aligned}$$

- Conclusion : <u>pas de solution</u>.

4. $(\ln x)^2 - \ln x - 6 > 0$.

Corrigé

- L'inéquation est définie si et seulement si : $x > 0$.

- Pour $x > 0$ on a :

$$
\begin{aligned}
(\ln x)^2 - \ln x - 6 > 0 &\iff \begin{cases} X = \ln x \text{ et } x > 0 \\ X^2 - X - 6 > 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} X = \ln x \text{ et } x > 0 \\ X^2 - X - 6 > 0 \text{ expression pol. du 2nd degré, } \Delta = 25 \text{ et les racines } -2 \text{ et } 3 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} X = \ln x \text{ et } x > 0 \\ (X+2)(X-3) > 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} X = \ln x \text{ et } x > 0 \\ X < -2 \text{ ou } X > 3 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x > 0 \\ \ln x < -2 \text{ ou } \ln x > 3 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x > 0 \\ x < \mathrm{e}^{-2} \text{ ou } x > \mathrm{e}^{3} \end{cases} \\
&\iff \boxed{x \in \left]0 \,;\, \mathrm{e}^{-2}\right[\cup \left]\mathrm{e}^{3} \,;\, +\infty\right[}
\end{aligned}
$$

Correction de l'exercice 16 page 4 : limites

1. Déterminer la limite en 0^+ et $+\infty$ des fonctions définies par :

1. a. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x+1}$.

1. b. $g(x) = \dfrac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$.

Corrigé

- En 0^+.

$$
\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0^+ \\ \lim\limits_{X \to 0^+} \dfrac{\ln(1+X)}{X} = 1 \end{cases} \underset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = 1}
$$

- En $+\infty$.
  Pour $x > 0$ on a :

$$
g(x) = \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{1+\sqrt{x}} \times \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}
$$

  Par ailleurs :
  - D'une part :

$$
\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \sqrt{x} = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{\ln(X)}{X} = 0 \text{ croissances comparées} \end{cases} \underset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{1+\sqrt{x}} = 0
$$

  - D'autre part :

$$
\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = 1
$$

  Car $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$ (fonctions de référence)

– Pour conclure, par produit :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+\sqrt{x})}{1+\sqrt{x}} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0}$$

1. c. $h(x) = \dfrac{1}{x} - \ln x$.

1. d. $k(x) = (\ln x)^2 - \ln x$.

2. Déterminer la limite en 2^+ et $+\infty$ de la fonction définie par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{2x+1}{x-2}\right)$$

Corrigé

- En 2^+.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^+} 2x+1 = 5 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} x-2 = 0^+ \end{cases} \underset{\text{par quotient}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{2x+1}{x-2} = +\infty$$

Donc par composition :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{2x+1}{x-2} = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \ln X = +\infty \end{cases} \underset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty}$$

Correction de l'exercice 17 page 4

Déterminer l'ensemble de définition, les variations, et les limites aux bornes de l'ensemble de définition des fonctions définies par :

1. $f(x) = \ln(-2x+1)$.
2. $g(x) = 3x - 2 - 2x\ln x$.
3. $h(x) = \dfrac{1}{4}x^2\,(2\ln x - 1)$.

Corrigé

- Ensemble de définition.
  L'expression est définie si et seulement si : $x > 0$. On va donc étudier la fonction sur $I =]0\,;\,+\infty[$.
- Variations.
  h définie et dérivable sur I. h est de la forme uv donc de dérivée $u'v + uv'$ avec :

$u(x) = \dfrac{1}{4}x^2$	$u'(x) = \dfrac{1}{2}x$
$v(x) = (2\ln x - 1)$	$v'(x) = \dfrac{2}{x}$

Pour tout réel de I on a :

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1}{2}\,x \times (2\ln x - 1) + \frac{1}{4}\,x^2 \times \frac{2}{x} \\ &= \frac{1}{2}\,x \times (2\ln x - 1) + \frac{1}{2}\,x \\ &= \frac{1}{2}\,x \times 2\ln x \\ h'(x) &= \underline{x\,\ln x} \end{aligned}$$

Donc sur $\mathbb{R}_+^*$, x est strictement positif et h' est du signe de $\ln x$.
On en déduit facilement les variations de h :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $\ln x$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
Signe de $h'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
Variations de h	$\Vert$ 0	$\searrow$	$h(1) = -\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

- <u>Limite en 0^+</u>.

$$h(x) = \frac{1}{4}\,x^2\,(2\ln x - 1) = \frac{1}{2}\,x^2\,\ln x - \frac{1}{4}\,x^2$$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+} x^2\,\ln x = 0 \ \text{(croissances comparées)} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{4}\,x^2 = 0 \end{array}\right. \underset{\text{par somme}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = 0}$$

- <u>Limite en $+\infty$</u>.

$$h(x) = \frac{1}{4}\,x^2\,(2\ln x - 1)$$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{4}\,x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} (2\ln x - 1) = +\infty \end{array}\right. \underset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} h(x) = +\infty}$$

4. $k(x) = \ln(\ln x)$.

Corrigé

- <u>Ensemble de définition</u>.
L'expression est définie si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{l} x > 0 \\ \ln x > 0 \end{array}\right. \iff x > 1$$

On va donc étudier la fonction sur $\underline{K =]1\ ;\ +\infty[}$.

- <u>Variations</u>.
k définie et dérivable sur $K\ =]1\ ;\ +\infty[$. la fonction k est de la forme $\ln u$ donc de dérivée u'/u avec :

$u(x) = \ln x$	$u'(x) = \frac{1}{x}$

Pour tout réel de $]1\ ;\ +\infty[$ on a :

$$k'(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \frac{1}{x \ln x}$$

Puisque $x > 0$ sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$, k' est du signe de $\ln x$ soit :

x	1		$+\infty$
Signe de $\ln x$	‖	$+$	
Signe de $k'(x)$	‖	$+$	
Variations de k	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

- <u>Limite en 1^+</u>.

$$k(x) = \ln(\ln x)$$

Par composition :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^+} \ln x = 0^+ \\ \lim\limits_{X \to 0^+} \ln X = -\infty \end{cases} \underset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim_{x \to 1^+} k(x) = -\infty}$$

- <u>Limite en $+\infty$</u>. Par composition :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \ln X = +\infty \end{cases} \underset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim_{x \to +\infty} k(x) = +\infty}$$

5. $l(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)$.

Correction

- <u>Ensemble de définition</u>.

La fonction l est définie si et seulement si : $\begin{cases} x \neq -2 \\ \dfrac{x+1}{x+2} > 0 \end{cases}$ On peut rapidement étudier le signe du quotient :

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
signe de $(x+1)$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $(x+2)$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $\dfrac{(x+1)}{x+2}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

Donc $\boxed{D_l =]-\infty\ ;\ -2[\cup]-1\ ;\ +\infty[}$.

- <u>Variations</u>.
l définie et dérivable sur D_l. Elle est de la forme $\ln u$ donc de dérivée u'/u avec :

$u(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$	$u'(x) = \dfrac{1}{(x+2)^2}$

Donc sur l'intervalle D_l :

$$l'(x) = \frac{\dfrac{1}{(x+2)^2}}{\dfrac{x+1}{x+2}} = \frac{1}{(x+2)^2} \times \frac{x+2}{x+1} = \boxed{\frac{1}{(x+1)(x+2)}}$$

Le signe de la dérivée dépends de celui du polynôme $x+1)(x+2)$ et l'on obtient directement avec l'étude précédente que l est strictement croissante sur $]-\infty\,;\,-2[$ et strictement croissante sur $]-1\,;\,+\infty[$.

- Limites aux bornes.
  - En $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(1+\frac{1}{x})}{x(1+\frac{2}{x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1$$

car $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x}$. De ce fait par composition :

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x+2} = 1 \\ \displaystyle\lim_{X\to1} \ln X = 0 \end{cases}$$

Donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} l(x) = 0} \Longrightarrow \text{Asymptote d'équation } y = 0$$

  - En $-\infty$.
    De même :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} l(x) = 0} \Longrightarrow \text{Asymptote d'équation } y = 0$$

  - En -2^-.

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to-2^-} (x+1) = -1 \\ \displaystyle\lim_{x\to-2^-} (x+2) = 0^- \end{cases} \Longrightarrow \lim_{x\to-2^-} \frac{x+1}{x+2} = +\infty$$

Par composition :

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to-2^-} \frac{x+1}{x+2} = +\infty \\ \displaystyle\lim_{X\to+\infty} \ln X = +\infty \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\lim_{x\to+\infty} l(x) = +\infty}$$

  - En -1^+.

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to-1^+} (x+1) = 0^+ \\ \displaystyle\lim_{x\to-1^+} (x+2) = 1 \end{cases} \Longrightarrow \lim_{x\to-1^+} \frac{x+1}{x+2} = 0^+$$

Par composition :

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to-2^-} \frac{x+1}{x+2} = 0^+ \\ \displaystyle\lim_{X\to0^+} \ln X = -\infty \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\lim_{x\to+\infty} l(x) = -\infty}$$

6. $m(x) = \ln\left(\mathrm{e}^{\,x} - x\right)$.

Preuve

- <u>Ensemble de définition</u>.
  La fonction m est définie si et seulement si : $\mathrm{e}^{x} - x > 0$.
  Un point délicat car il faut donc résoudre cette inéquation. On peut étudier la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{x} - x$, étudier les variations (ou plus rapidement évoquer la convexité de la fonction exponentielle).
  Posons $g \ : \ x \longmapsto \mathrm{e}^{x} - x$ définie sur $\mathbb{R}$. On a facilement $g'(x) = \mathrm{e}^{x} - 1$ et donc :

$$\begin{cases} g'(x) = 0 \iff x = 0 \\ g'(x) > 0 \iff x > 0 \end{cases} \implies g'(x) < 0 \iff x < 0$$

  Donc le minimum de la fonction g est $g(0) = 1$ et de ce fait $g(x) > 0$.
  La fonction m est donc définie sur $\mathbb{R}$.

- <u>Variations</u>.
  La fonction m est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Elle est de la forme $\ln u$ donc de dérivée u'/u avec :

$u(x) = \mathrm{e}^{x} - x$	$u'(x) = \mathrm{e}^{x} - 1$

  Donc sur l'intervalle $\mathbb{R}$:

$$\boxed{m'(x) = \frac{\mathrm{e}^{x} - 1}{e^x - x}}$$

  On a montré que $\mathrm{e}^{x} - x > 0$ donc m' est du signe de $\mathrm{e}^{x} - 1$ dont on a déjà étudié le signe.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $m'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x} - 1}{e^x - x}$		$-$	0	$+$	
Variations de $m \ : \ x \mapsto \ln(\mathrm{e}^{x} - x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

- <u>Limites</u>.

$$m \ : \ x \mapsto \ln(\mathrm{e}^{x} - x)$$

  - <u>En $-\infty$</u>.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty \end{cases} \underset{\text{par somme}}{\implies} \lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{x} - x = +\infty$$

  Donc par composition :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{x} - x = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \ln X = +\infty \end{cases} \implies \boxed{\lim_{x \to -\infty} m(x) = +\infty}$$

  - <u>En $+\infty$</u>.

$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{x} - x = \lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{x}\left(1 - \frac{x}{\mathrm{e}^{x}}\right) = \lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{x} = +\infty$$

  car d'après les croissances comparées $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}} = 0$.
  Donc par composition :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{x} - x = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \ln X = +\infty \end{cases} \implies \boxed{\lim_{x \to +\infty} m(x) = +\infty}$$

Correction de l'exercice 18 page 5 : Avec des lectures graphiques (c)

1. **Lire graphiquement $f'(3)$ en expliquant votre démarche.**
   On trace approximativement la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 3 et on lit son coefficient directeur soit :
   $$f'(x) = 0,5$$

2. **On donne $f'(3) = \dfrac{1}{2}$. Avec ce résultat et les renseignements fournis par l'énoncé, déterminer a, b et c.**
   Pour tout réel $x > 1$ on obtient :
   $$\begin{cases} f(0) = 2 \\ f'(0) = -1 \\ f'(3) = 0,5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \\ c = 0,5 \end{cases}$$
   Donc pour tout réel x de $]-1\,;\,+\infty[$:
   $$\boxed{f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2 + 2\ln(x+1)}$$

3. **Étudier les variations de f et ses limites.**
   Donc pour tout réel x de $]-1\,;\,+\infty[$ on obtient :
   $$\boxed{f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{x+1}}$$
   On obtient alors facilement :

x	-1		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	‖ $-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Correction de l'exercice 19 page 5

1. a. Pour $x > 0$, $h'(x) = 6x^2 + 2x + \dfrac{1}{x}$, $h'(x) > 0$.
h est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

b. $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$.

c. Théorème des valeurs intermédiaires pour une fonction strictement croissante. $0,542 < \alpha < 0,543$.

d. Si $x \in]0;\alpha[$, $h(x) < 0$ et si $\in]\alpha;+\infty[$, $h(x) > 0$.

2. a. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
La droite d'équation $x = 0$ est asymptote à $\mathscr{C}$.

b. $f'(x) = \dfrac{h(x)}{x^2}$ d'où le résultat.

c. f est strictement décroissante sur $]0\,;\alpha[$ et strictement croissante sur $]\alpha\,;+\infty[$.

Correction de l'exercice 20 : Métropole Septembre 2015

On considère la fonction f définie par $f(x) = 2x^2\ln(x)$ sur $[0,2\ ;\ 10]$ et on note (C_f) sa courbe représentative dans un repère du plan.
Le but de cet exercice est de prouver que la courbe (C_f) admet sur [0,2 ; 10] une seule tangente passant par l'origine du repère.

1. **Montrer que pour $x \in [0,2\ ;\ 10]$, $f'(x) = 2x(2\ln(x)+1)$.**
   La fonction f est dérivable sur $[0,2\ ;\ 10]$ comme produit de fonctions dérivables. La fonction f est de la forme uv donc de dérivée $u'v + uv'$ avec pour tout réel x de $[0,2\ ;\ 10]$:

$u(x) = 2x^2$	$u'(x) = 4x$
$v(x) = \ln x$	$v'(x) = \dfrac{1}{x}$

   Pour tout réel x de $[0,2\ ;\ 10]$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x \times \ln(x) + 2x^2 \times \frac{1}{x} \\ &= 4x\ln(x) + 2x \\ f'(x) &= \underline{2x\,(2\ln(x)+1)} \end{aligned}$$

2. **Soit a un réel de $[0,2\ ;\ 10]$., montrer que la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse a a pour équation $y = 2a(2\ln(a)+1)x - 2a^2(\ln(a)+1)$.**
   Une équation de la tangente T à la courbe (C_f) au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a) \ \text{ avec } \begin{cases} f(a) = 2a^2\ln(a) \\ f'(a) = 2a(2\ln(a)+1) \end{cases}$$

   Donc T a pour équation :

$$\begin{aligned} y = 2a(2\ln(a)+1)(x-a) + 2a^2\ln(a) &\iff y = 2a(2\ln(a)+1)x - 2a(2\ln(a)+1) \times a + 2a^2\ln(a) \\ &\iff y = 2a(2\ln(a)+1)x - 4a^2\ln(a) - 2a^2 + 2a^2\ln(a) \\ &\iff y = 2a(2\ln(a)+1)\ x \ \ - 2a^2(\ln(a)+1) \end{aligned}$$

$$\boxed{T \ : \ y = \underbrace{2a(2\ln(a)+1)}_{m}\ x \ \ \underbrace{-2a^2(\ln(a)+1)}_{p}}$$

3. **Répondre alors au problème posé.**
   La droite T est d'équation $y = mx + p$ avec $\begin{cases} m = 2a(2\ln(a)+1) \\ p = -2a^2(\ln(a)+1) \end{cases}$
   Elle passe par l'origine si et seulement si son ordonnée à l'origine p est nulle donc si :

$$-2a^2(\ln(a)+1) = 0$$

   Or $a \in [0,2\ ;\ 10]$ donc $a \neq 0$; il faut donc que :

$$\ln(a) + 1 = 0 \iff \ln(a) = -1 \iff a = \mathrm{e}^{-1}$$

   L'unique valeur a de $[0,2\ ;\ 10]$ pour laquelle la tangente à (C_f) au point d'abscisse a passe par l'origine est $a = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
   L'équation réduite de la tangente est alors : $y = 2\dfrac{1}{\mathrm{e}}(-2+1)x$ soit

$$\boxed{y = -\frac{2}{\mathrm{e}}x}$$