Math93.com

TD 1 - Terminale Spécialité
Loi Binomiale

Les exercices suivants dont l'intitulé est suivi du symbole (c) sont corrigés intégralement en fin du présent TD.

Exercice 1. (c) Calculatrice : $P(X = k)$

Exemple 1 (Calculatrice)

Si X qui suit une loi binomiale de paramètre $n = 40$ et $p = 0.2$, alors on a par exemple pour $k = 10$:

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k} \Longrightarrow P(X=10) = \binom{40}{10} \times 0.2^{10} \times (1-0.2)^{40-10} \approx 0.107$$

Calculatrices

- *Sur la Numworks : binompdf* (10 , 40 , 0.2) $\approx$ 0,107
- *Sur la TI Voyage 200 : TIStat.binomDdP* (40 , 0.2 , 10) $\approx$ 0,107
- *Sur TI82/83+ : Menu Distrib* $\Rightarrow$ *binomFdp* (40 , 0.2 , 10) $\approx$ 0,107
- *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu Opt/STAT/DIST/DINM* $\Rightarrow$ *binomialPD* (10 , 40 , 0.2) $\approx$ 0,107

Soit une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètre $n = 5$ et $p = 0.1$.

1. Montrer en détaillant les calculs que $P(X = 2) = 0,0729$.

2. A l'aide de la calculatrice, compléter le tableau donnant la loi de probabilité de X .

k	0	1	2	3	4	5	**Total**
$P(X=k)$	....	....	$0,0729$	....	....	....	**1**

3. En déduire : $P(X \geqslant 3)$, $P(X < 2)$ et $P(X \geqslant 1)$.

4. Calculer $P(2 \leqslant X \leqslant 4)$.

5. Calculer l'espérance mathématique de la variable X.

6. Une Application : Dans une librairie, 10% des livre sont primés, c'est à dire distingués d'un prix littéraire. Un client achète cinq livres. On suppose que les choix sont indépendants. On note X la variable aléatoire qui associe, à chaque client achetant 5 livres, le nombre de livres primés.

6. a. Expliquer pourquoi la variable X suit une loi binomiale de paramètre $n = 5$ et $p = 0.1$.

Méthode 1 (Point Bac : Rédaction type)

Il y a répétition de $n =$ ... événements indépendants et identiques (tirage ....). Chaque tirage a deux issues possibles (épreuve de ....) :

- succès de probabilité $p =$ .... quand ....;
- et échec de probabilité .... sinon.

Donc la variable aléatoire X qui est égale au nombre de succès au cours de ces ...... épreuves indépendantes de .... de paramètre ... suit une loi .... de paramètres ....

6. b. Quelle est la probabilité qu'exactement trois des 5 livres soient primés ?

6. c. Quelle est la probabilité qu'au moins un des 5 livres soient primés ?

Exercice 2. Calculatrice : $P(X \leqslant k)$

Exemple 2 (Calculatrice)

Si X qui suit une loi binomiale de paramètre $n = 50$ et $p = 0,06$, alors on a par exemple pour $k = 2$ et arrondi au millième : $P(X \leqslant 2) \approx 0.416$. Pour cela on utilise directement la calculatrice :

Calculatrices

- *Sur la Numworks : binomcdf* (2 , 50 , 0,06) ≈ 0,416
- *Sur la TI Voyage 200 : TIStat.binomFdR* (50 , 0,06 , 2) ≈ 0,416 246 475 55
- *Sur TI82/83+ : Menu Distrib ⇒ binomFrép* (50 , 0,06 , 2) ≈ 0,416 246 475 55
- *Sur Casio 35+ ou 75 :*
  Menu Opt/STAT/DIST/DINM ⇒ binomialCD (2 , 50 , 0,06) ≈ 0,416 246 475 55

La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre $n = 50$ et $p = 0,3$.

1. Déterminer, à 10^{-4} près : $P(X = 25)$, $P(X \leqslant 22)$ et $P(X > 14)$.
2. Déterminer, à 10^{-4} près : $P(10 \leqslant X \leqslant 20)$.
3. Déterminer, à 10^{-4} près : $P(10 < X \leqslant 20)$.
4. Calculer l'espérance mathématique de la variable X.
5. Une Application :
   Dans une usine, un contrôle qualité a montré que 30% des pièces produites sont défectueuses. On prend au hasard 50 pièces dans le stock de pièces. Le stock est suffisamment important pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage aléatoire avec remise.
   On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de pièces défectueuses.

   5. a. Déterminer la loi de X en complétant la rédaction type proposée.

Méthode 2 (Point Bac : Rédaction type)

Il y a répétition de $n = \ldots\ldots$ événements indépendants et identiques (tirage d'une pièce).
Chaque tirage a deux issues possibles (épreuve de . . . .) :

- succès de probabilité $p = \ldots\ldots\ldots\ldots$ quand la pièce est . . . . ;
- et échec de probabilité . . . . sinon.

Donc la variable aléatoire X qui est égale au nombre de succès au cours de ces . . . épreuves indépendantes de . . . . de paramètre . . . suit une loi . . . . de paramètres . . . .

5. b. Quelle est la probabilité que 25 pièces exactement soient défectueuses ?

5. c. Quelle est la probabilité qu'au moins 15 pièces soient toutes défectueuses ?

Réponses

(1.) $P(X = 25) \approx 0,0014$, $P(X \leqslant 22) \approx 0,9877$ *et* $P(X > 14) \approx 0,5532$*;* *(2.)* $P(10 \leqslant X \leqslant 20) \approx 0,9120$
(3.) $P(10 < X \leqslant 20) \approx 0,8734$ *;* *(4.)* $E(X) = 15$ *(5.b) 0,0014* *(5.c) 0,5532*

Comme au Bac

Exercice 3. D'après Pondichéry 2013

Une enquête a été réalisée auprès des élèves d'un lycée afin de connaître leur point de vue sur la durée de la pause du midi ainsi que sur les rythmes scolaires.
L'enquête révèle que 55 % des élèves sont favorables à une pause plus longue le midi et parmi ceux qui souhaitent une pause plus longue, 95 % sont pour une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.
Parmi ceux qui ne veulent pas de pause plus longue le midi, seulement 10 % sont pour une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.
On choisit un élève au hasard dans le lycée. On considère les évènements suivants :

- L : l'élève choisi est favorable à une pause plus longue le midi ;
- C : l'élève choisi souhaite une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.

2. Calculer $P(L \cap C)$ la probabilité de l'évènement $L \cap C$.

3. Montrer que $P(C) = 0{,}567\,5$.

4. On interroge successivement et de façon indépendante quatre élèves pris au hasard parmi les élèves de l'établissement. Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre d'élèves favorables à une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire. Le nombre d'élèves étant suffisamment grand, on considère que X suit une loi binomiale.

4. a. Préciser les paramètres de cette loi binomiale.

4. b. Calculer la probabilité qu'aucun des quatre élèves interrogés ne soit favorable à une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire. En donner une valeur arrondie à 10^{-4}.

4. c. Calculer la probabilité qu'exactement deux élèves soient favorables à une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.

Réponses
Le corrigé détaillé sur www.math93.com

Corrections

Correction de l'exercice 1

1. **Montrer en détaillant les calculs que $P(X = 2) = 0,0729$.**
   La variable X qui suit une loi binomiale de paramètre $n = 5$ et $p = 0.1$ donc

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k} \Longrightarrow P(X = k) = \binom{5}{k} \times 0,1^k \times 0,9^{5-k}$$

   Donc

$$P(X = 2) = \binom{5}{2} \times 0,1^2 \times 0,9^3 = 0,0729$$

2. **A l'aide de la calculatrice, compléter le tableau donnant la loi de probabilité de X .**

k	0	1	2	3	4	5
$P(X = k)$	$0,59049$	$0,32805$	$0,0729$	$0,0081$	$0,00045$	$0,00001$

3. **En déduire : $P(X \geqslant 3)$, $P(X < 2)$ et $P(X \geqslant 1)$.**
   On utilise directement les résultats du tableau :
   - $P(X \geqslant 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = 0,00856$
   - $P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,91854$
   - et $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,59049 = 0,40951$

4. **Calculer $P(2 \leqslant X \leqslant 4)$.**

$$P(2 \leqslant X \leqslant 4) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = \underline{0,8145}$$

5. **Calculer l'espérance mathématique de la variable X.**
   La variable X qui suit une loi binomiale de paramètre $n = 5$ et $p = 0,1$ donc son espérance est : $\underline{E(X) = n \times p = 0,5}$.

6. **Une Application** :

   6. a. Explique pourquoi la variable X suit une loi binomiale de paramètre $n = 5$ et $p = 0.1$.

Méthode 3 (Rédaction type)

Il y a répétition de $n = 5$ événements indépendants et identiques (on tire un livre).
Chaque tirage a deux issues possibles (épreuve de Bernoulli) :

- succès de probabilité $p = 0,1$ quand un livre est primé ;
- et échec de probabilité $1 - p = 0{,}9$ sinon.

Donc la v.a. X qui est égale au nombre de succès au cours de ces $n = 5$ épreuves indépendantes de Bernoulli de paramètre $p = 0,1$ suit une loi binomiale de paramètres $\underline{n = 5}$ et $\underline{p = 0,1}$.
On peut écrire : X suit $\mathcal{B}\left(5\ ;\ 0,1\right)$ ou $X \sim \mathcal{B}\left(5\ ;\ 0,1\right)$.

   6. b. Quelle est la probabilité qu'exactement trois des 5 livres soient primés ?
   La probabilité qu'exactement trois des 5 livres soient primés est donnée par $p(X = 3)$ or puisque X suit $\mathcal{B}(5\ ;\ 0,1)$ on a :

$$P(X = 3) = \binom{5}{3} \times 0,1^3 \times 0,9^2 = \underline{0,0081}$$

   La probabilité qu'exactement trois des 5 livres soient primés est $\underline{0,0081}$.

6. c. Quelle est la probabilité qu'au moins un des 5 livres soient primés ?

$$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 0,40951$$

La probabilité qu'au moins un des 5 livres soient primés est $\underline{0,40951}$.