Math93.com

TD 1 - Terminale Spécialité Maths
Suites implicites

Les exercices suivants dont l'intitulé est suivi du symbole (c) sont corrigés intégralement en fin du présent TD.
Je remercie M. Jobin, professeur en classe préparatoire, pour le partage de ses documents sur ce thème des suites implicites.

Définition 1

Une **suite implicite (u_n)** est une suite définie par une équation (E_n) qui dépend de n, souvent de la forme :

$$u_n \text{ est l'unique solution de l'équation } f_n(x) = 0$$

ou encore avec $f_n(x) = f(x) - n$

$$u_n \text{ est l'unique solution de l'équation } f(x) = n$$

Remarque

- Comme l'indique son nom, une **suite implicite** n'est pas explicite. A priori, elle ne vérifie pas de relation de récurrence et il n'existe pas d'expression en fonction de n. Les méthodes classiques ne sont donc souvent pas applicables.
- La seule information dont on dispose sur la suite (u_n) est qu'elle est solution de l'équation (E_n), c'est-à-dire qu'elle vérifie l'équation $f_n(x) = 0$. Cette relation permet de déduire de nombreuses propriétés de la suite et on y revient toujours.
- L'équation $f_n(u_n) = 0$ vérifiée par la suite (u_n) est valable pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, on peut également écrire
$$f_{n+1}(u_{n+1}) = 0 \quad \text{ou} \quad f_{n-1}(u_{n-1}) = 0$$
En revanche, on ne connait au départ rien sur
$$f_n(u_{n+1}) \quad \text{ou} \quad f_{n+1}(u_n)$$
et c'est justement l'estimation de ces quantités qui donne souvent le sens de variations de (u_n).

On va être amené à utiliser la définition de la monotonie d'une fonction et la propriété qui suit.

Définition 2

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

1. f est <u>croissante sur I</u> si :

$$\text{pour tout couple } (a\ ;\ b) \text{ d'éléments de } I \text{ tels que } a \leqslant b, \text{ on a } f(a) \leqslant f(b)$$

2. f est <u>décroissante sur I</u> si :

$$\text{pour tout couple } (a\ ;\ b) \text{ d'éléments de } I \text{ tels que } a \leqslant b, \text{ on a } f(a) \geqslant f(b)$$

Propriété 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Si f est croissante sur I alors

$$\text{pour tout couple } (a\ ;\ b) \text{ d'éléments de } I \text{ tels que } f(a) \leqslant f(b), \text{ on a } a \leqslant b$$

Preuve

En fait, pour tout couple (a, b) de I^2 et toute fonction strictement croissante f sur I, on a :

$$a \leqslant b \iff f(a) \leqslant f(b)$$

- Le sens direct est donné par la croissance de la fonction f sur l'intervalle I.
- La réciproque, est obtenue en considérant la contraposée. Un petit rappel :
  - Soit une propriété de la forme :

    $$\boxed{\text{Si } A \text{ , Alors } B} \quad \text{ou} \quad \boxed{A \Longrightarrow B}$$

    Si cette propriété est vraie, sa contraposée l'est aussi nécessairement. Affirmation et contraposée sont équivalentes.
  - La contraposée de $A \Longrightarrow B$ est :

    $$\boxed{\text{Si (non } B) \text{ , Alors (non } A)} \quad \text{ou} \quad \boxed{(\text{non } B) \Longrightarrow (\text{non } A)}$$
- Donc ici on va considérer la contraposée de la propriété que l'on cherche à prouver.

  Soit pour <u>f croissante sur I</u> :

  $$\boxed{\text{Si } (f(a) \leqslant f(b)) \text{ , Alors } (a \leqslant b)} \quad \text{ou par contraposé} \quad \boxed{(\text{non } (a \leqslant b)) \Longrightarrow (\text{non } (f(a) \leqslant f(b)))}$$

  On cherche donc à montrer que pour <u>f croissante sur I</u> :

  $$\boxed{a > b \Longrightarrow f(a) > f(b)}$$

  Et c'est alors la stricte croissance de f sur I qui permet de conclure.

Exercice 1. Suite implicite (c)

On définit sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction f par :

$$f(x) = x + \ln(x)$$

1. Dresser le tableau de variations de f.
2. Soit n un entier naturel. Montrer que l'équation $f(x) = n$ a une unique solution dans $\mathbb{R}^{+*}$.
   On la note u_n.
3. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

Exercice 2. Suite implicite et recherche de la limite (c)

1. On considère la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f_1(x) = 2x - 2 + \ln(x^2+1)$$

1. a. Déterminer la limite de f_1 en $+\infty$.

1. b. Étudier les variations de f_1.

2. Soit n entier non nul. On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f_n(x) = 2x - 2 + \frac{\ln(x^2+1)}{n}$$

2. a. Déterminer la limite de f_n en $+\infty$.

2. b. Montrer que f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

2. c. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n sur $\mathbb{R}_+$.

2. d. Justifier que pour tout entier $n > 0$ on a :

$$0 < \alpha_n < 1$$

3. Monter que pour tout entier $n > 0$ on a :

$$f_n\left(\alpha_{n+1}\right) = \frac{\ln(\alpha_{n+1}^2+1)}{n(n+1)}$$

4. En déduire que pour tout entier $n > 0$ on a :

$$f_n\left(\alpha_{n+1}\right) > 0$$

5. Étude de la suite (α_n).

5. a. Montrer que la suite (α_n) est croissante.

5. b. En déduire qu'elle est convergente.

5. c. Montrer que pour tout entier $n > 0$ on a :

$$\alpha_n = 1 - \frac{\ln\left(\alpha_n^2+1\right)}{2n}$$

5. d. Déterminer en utilisant l'encadrement de la question **2.d.**, un encadrement de :

$$\frac{\ln\left(\alpha_n^2+1\right)}{2n}$$

5. e. En déduite la limite de la suite (α_n).

Exercice 3. Famille d'équations

Le but de cet exercice est d'étudier pour n entier non nul l'équation (E_n) :

$$\frac{\ln x}{x} = \frac{1}{n}$$

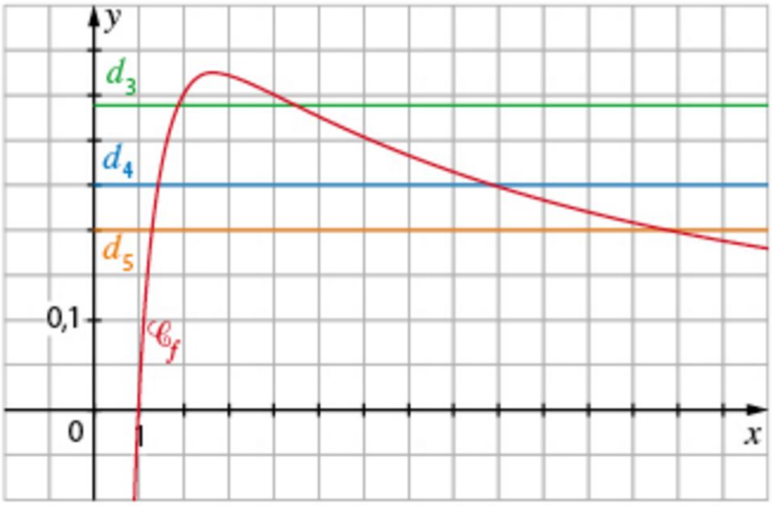
Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

1. Étudier les variations de f sur $]0\ ;\ +\infty[$ et déterminer son maximum.

2. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 3$, l'équation (E_n) possède sur $[1\ ;\ \mathrm{e}]$ une unique solution notée α_n.

3. Sur le graphique ci-dessous sont tracés :

- la courbe $\mathscr{C}_f$;
- les droites d_3, d_4 et d_5 d'équations respectives : $y = \dfrac{1}{3}$, $y = \dfrac{1}{4}$ et $y = \dfrac{1}{5}$.



3. a. Conjecturer le sens de variation de la suite (α_n).

3. b. Comparer, pour tout entier $n \geqslant 3$ les nombre $f(\alpha_n)$ et $f(\alpha_{n+1})$.

3. c. Déterminer le sens de variation de la suite (α_n).

3. d. En déduire que (α_n) converge.

4. On admet que pour pour tout entier $n \geqslant 3$, l'équation (E_n) possède une autre solution β_n telle que $1 \leqslant \alpha_n \leqslant \mathrm{e} \leqslant \beta_n$ et que la suite (β_n) est croissante.

4. a. Établir que pour pour tout entier $n \geqslant 3$:

$$\beta_n \geqslant n\frac{\beta_3}{3}$$

4. b. En déduire la limite de la suite (β_n).

Correction

Correction de l'exercice 1 page 2

1. Dresser le tableau de variations de f.

Preuve

- La quantité $\ln(x)$ est définie pour $x > 0$.
  Ainsi, $D_f =]0, +\infty[$.
- De plus, $\ln$ est dérivable sur $]0, +\infty[$.
  Ainsi, f est dérivable sur cet ensemble. Pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$f'(x) \ = \ 1 + \frac{1}{x} > 0$$

- La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Les limites sont juste obtenues pas somme :

$$f(x) = x + \ln x$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$$

- On obtient donc le tableau de variations suivant.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$+$	
f	$\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2. Montrer que l'équation $f(x) = n$ a une unique solution dans $\mathbb{R}^{+*}$. On la note u_n.

Preuve

- Rédaction 1 (Terminale) :
  - La fonction f est continue sur $]0, +\infty[$ et strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
  - L'entier naturel n est compris entre $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
  - Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = n$ a une unique solution dans $\mathbb{R}^{+*}$. On la note u_n.
  - On a donc la relation : $f(u_n) = n$.
- Rédaction 2 (Terminale ou Supérieur) :
  - La fonction f est :
    * continue sur $]0, +\infty[$,
    * strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

    Elle réalise donc une bijection de $]0, +\infty[$ sur son image par f :

$$f(]0, +\infty[) \ =]\lim_{x \to 0} f(x), \lim_{x \to +\infty} f(x)[=] - \infty, +\infty[$$

– Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $n \in]-\infty, +\infty[$, n admet un unique antécédent $x \in]0, +\infty[$ par la fonction f. On note alors u_n ($\in]0, +\infty[$) cet antécédent.
(on a donc $f(u_n) = n$)

3. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

Preuve

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition, on a $f(u_n) = n$ et $f(u_{n+1}) = n + 1$.
On en déduit que :
$$n = f(u_n) < f(u_{n+1}) = n + 1$$
- On applique alors la propriété 1. La croissance de f sur $\mathbb{R}_+^*$ implique donc que ; $u_n < u_{n+1}$.
$$f(u_n) < f(u_{n+1}) \underset{\text{par croissance de } f \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}{\Longrightarrow} u_n < u_{n+1}$$

La suite (u_n) est donc strictement croissante.

Correction de l'exercice 2 page 3

1. On considère la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}_+$ par :
$$f_1(x) = 2x - 2 + \ln(x^2 + 1)$$

1. a. Déterminer la limite de f_1 en $+\infty$.

Preuve

On a :
$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + 1 = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \ln(X) = +\infty \end{cases} \underset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \lim_{x \to +\infty} \ln(x^2 + 1) = +\infty$$
Et donc puisque :
$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} (2x - 2) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x^2 + 1) = +\infty \end{cases} \underset{\text{par somme}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim_{x \to +\infty} f_1(x) = +\infty}$$

1. b. Étudier les variations de f_1.

Preuve

Pour tout réel x de $[0 ; +\infty[$, f_1 est dérivable et :
$$f_1'(x) = 2 + \frac{2x}{x^2 + 1}$$
Or pour tout réel $x \in [0 ; +\infty[$ on a
$$\begin{cases} 2x \geqslant 0 \\ x^2 + 1 \geqslant 1 \end{cases} \Longrightarrow \frac{2x}{x^2 + 1} \geqslant 0 \Longrightarrow f_1'(x) = 2 + \frac{2x}{x^2 + 1} \geqslant 2 > 0$$
Donc la dérivée f_1' est strictement positive sur $\mathbb{R}_+$ et f_1 est strictement croissante sur cet intervalle.
Avec $f_n(0) = -2$ on obtient :

x	0		$+\infty$
Signe de $f_n'(x)$		$+$	
Variations de f_n	-2	$\nearrow$	$+\infty$

2. Soit n entier non nul. On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f_n(x) = 2x - 2 + \frac{\ln(x^2+1)}{n}$$

2. a. Déterminer la limite de f_n en $+\infty$.

Preuve

On a pour n entier non nul :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + 1 = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \ln(X) = +\infty \end{cases} \underset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \lim_{x \to +\infty} \ln(x^2+1) = +\infty \Longrightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{n} = +\infty$$

Et donc puisque pour n entier non nul :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} (2x-2) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x^2+1)}{n} = +\infty \end{cases} \underset{\text{par somme}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty}$$

2. b. Montrer que f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Preuve

Pour tout réel x de $[0\,;\,+\infty[$, et tout n entier non nul f_n est dérivable et :

$$f_n'(x) = 2 + \frac{1}{n} \times \frac{2x}{x^2+1}$$

Or pour tout réel $x \in [0\,;\,+\infty[$ et pour n entier non nul on a :

$$\begin{cases} 2x \geqslant 0 \\ x^2 + 1 \geqslant 1 \end{cases} \Longrightarrow \frac{1}{n} \times \frac{2x}{x^2+1} \geqslant 0 \Longrightarrow f_n'(x) = 2 + \frac{1}{n} \times \frac{2x}{x^2+1} \geqslant 2 > 0$$

Donc la dérivée f_n' est strictement positive sur $\mathbb{R}_+$ et f_n est strictement croissante sur cet intervalle.
Avec $f_n(0) = -2$ on obtient :

x	0		α_n		$+\infty$
Signe de $f_n'(x)$			$+$		
Variations de f_n	-2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2. c. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n sur $\mathbb{R}_+$.

Preuve

Pour tout entier n non nul, la fonction f_n est continue et strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ et à valeurs dans $[-2\ ;\ +\infty[$.

Remarque : D'après l'étude précédente, on dit alors que f_n induit une bijection de $[0\ ;\ +\infty[$ sur l'intervalle image $[-2\ ;\ +\infty[$.

Puisque $k = 0 \in [-2\ ;\ +\infty[$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (ou de bijection), l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n sur $[0\ ;\ +\infty[$.

2. d. Justifier que pour tout entier $n > 0$ on a : $0 < \alpha_n < 1$.

Preuve

Pour tout entier n non nul on a :

$$\begin{cases} f_n(1) = \dfrac{\ln 2}{n} > 0 \\ f_n(0) = -2 < 0 \end{cases} \implies \boxed{0 < \alpha_n < 1}$$

x	0	α_n	1	$+\infty$
Variations de f_n	-2	0	$\frac{\ln 2}{n} > 0$	$+\infty$

3. Monter que pour tout entier $n > 0$ on a : $f_n\left(\alpha_{n+1}\right) = \dfrac{\ln(\alpha_{n+1}^2 + 1)}{n(n+1)}$.

Preuve

Pour tout entier n non nul on a :

$$f_n\left(\alpha_{n+1}\right) = 2\alpha_{n+1} - 2 + \frac{\ln(\alpha_{n+1}^2 + 1)}{n}$$

Par ailleurs par définition on a $f_{n+1}\left(\alpha_{n+1}\right) = 0$ soit :

$$2\alpha_{n+1} - 2 + \frac{\ln(\alpha_{n+1}^2 + 1)}{n+1} = 0 \iff 2\alpha_{n+1} - 2 = -\frac{\ln(\alpha_{n+1}^2 + 1)}{n+1}$$

De ce fait en remplaçant dans la première égalité :

$$\begin{cases} f_n\left(\alpha_{n+1}\right) = 2\alpha_{n+1} - 2 + \dfrac{\ln(\alpha_{n+1}^2 + 1)}{n} \\ 2\alpha_{n+1} - 2 = -\dfrac{\ln(\alpha_{n+1}^2 + 1)}{n+1} \end{cases} \implies f_n\left(\alpha_{n+1}\right) = -\frac{\ln(\alpha_{n+1}^2 + 1)}{n+1} + \frac{\ln(\alpha_{n+1}^2 + 1)}{n}$$

Soit après mise au même dénominateur

$$f_n\left(\alpha_{n+1}\right) = \frac{-n\ln(\alpha_{n+1}^2 + 1) + (n+1)\ln(\alpha_{n+1}^2 + 1)}{n(n+1)} \implies \boxed{f_n\left(\alpha_{n+1}\right) = \frac{\ln(\alpha_{n+1}^2 + 1)}{n(n+1)}}$$

4. En déduire que pour tout entier $n > 0$ on a : $f_n\left(\alpha_{n+1}\right) > 0$.

Preuve

Pour tout entier n non nul on a :

$$\alpha_{n+1} > 0 \text{ , d'après } \textbf{2.d.}$$

Donc

$$\alpha_{n+1}^2 + 1 > 1$$

Et par composition par la fonction $x \longmapsto \ln x$ strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\ln(\alpha_{n+1}^2 + 1) > 0 \Longrightarrow \boxed{f_n\left(\alpha_{n+1}\right) = \frac{\ln(\alpha_{n+1}^2 + 1)}{n(n+1)} > 0}$$

5. Étude de la suite (α_n).

5. a. Montrer que la suite (α_n) est croissante.

Preuve

On revient sur les variations de la fonction f_n obtenues lors de la question **2.d.**

x	0	α_n	α_{n+1}	$+\infty$
Variations de f_n	-2 ↗	0 ↗	$f_n\left(\alpha_{n+1}\right) > 0$ ↗	$+\infty$

Pour tout entier n non nul, la fonction f_n est strictement croissante et continue sur $[0\,;\,+\infty[$, donc puisque $f_n\left(\alpha_{n+1}\right) > 0$ et $f_n\left(\alpha_n\right) = 0$ on a nécessairement $\alpha_{n+1} > \alpha_n$.

$$\begin{cases} f_n\left(\alpha_{n+1}\right) > 0 \\ f_n\left(\alpha_n\right) = 0 \end{cases} \Longrightarrow f_n\left(\alpha_{n+1}\right) > f_n\left(\alpha_n\right) = 0 \underset{\text{par croissante de } f \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}{\Longrightarrow} \boxed{\alpha_{n+1} > \alpha_n}$$

La suite (α_n) est donc strictement croissante.

5. b. En déduire qu'elle est convergente.

Preuve

Lors de la question **2.d.** on a montré que pour tout entier n non nul :

$$0 < \alpha_n < 1$$

Donc suite (α_n) est strictement croissante (question **5.a.**) et majorée par 1, donc d'après le théorème de convergence monotone, elle est convergente vers ℓ avec : $0 < \ell \leqslant 1$.

5. c. Montrer que pour tout entier $n > 0$ on a :

$$\alpha_n = 1 - \frac{\ln\left(\alpha_n^2 + 1\right)}{2n}$$

Preuve

Par définition on a pour tout entier n non nul :

$$f_n\left(\alpha_n\right) = 0 \iff 2\alpha_n - 2 + \frac{\ln(\alpha_n^2 + 1)}{n} = 0 \iff \boxed{\alpha_n = 1 - \frac{\ln\left(\alpha_n^2 + 1\right)}{2n}}$$

5. d. Déterminer en utilisant l'encadrement de la question **2.d.**, un encadrement de : $\dfrac{\ln\left(\alpha_n^2+1\right)}{2n}$.

Preuve

Lors de la question **2.d.** on a montré que pour tout entier n non nul : $0 < \alpha_n < 1$.
Donc par composition par la fonction $x \longmapsto x^2+1$ croissante sur $\mathbb{R}_+$:

$$1 < \alpha_n^2 + 1 < 2$$

On compose alors par la fonction $x \longmapsto \ln x$ strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et on divise par $2n > 0$:

$$0 < \frac{\ln\left(\alpha_n^2+1\right)}{2n} < \frac{\ln 2}{2n}$$

5. e. En déduite la limite de la suite (α_n).

Preuve

On vient de montrer que pour tout entier n non nul :

$$0 < \frac{\ln\left(\alpha_n^2+1\right)}{2n} < \frac{\ln 2}{2n}$$

or

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln 2}{2n} = 0$$

Donc d'après le théorème d'encadrement (ou des gendarmes),

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(\alpha_n^2+1\right)}{2n} = 0$$

Et donc par somme :

$$\lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{\ln\left(\alpha_n^2+1\right)}{2n} = 1$$

Soit puisque $\alpha_n = 1 - \dfrac{\ln\left(\alpha_n^2+1\right)}{2n}$:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 1}$$

Fin du TD