



Math93.com

# TD 1 - Terminale Spécialité

## Variables aléatoires et loi des grands nombres

Les exercices suivants dont l'intitulé est suivi du symbole (c) sont corrigés intégralement en fin du présent TD.

### Première partie

## Les capacités : exercices types

### Exercice 1. Déterminer la loi d'une somme de deux v.a. (c)

#### ▷ Capacité 1 page 403 du livre Indice.

Une urne contient trois jetons rouges marqués « 0 » et deux jetons bleus marqués « 1 ».

On tire au hasard deux jetons de l'urne.

Soit  $X$  la variable aléatoire qui, au premier tirage, associe le numéro du jeton tiré,

et  $Y$  la variable aléatoire qui, au second tirage, associe le numéro du jeton tiré.

Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire  $Z = X + Y$  si le tirage du second jeton :

1 se fait avec remise ;

2 se fait sans remise.

### Exercice 2. Calculer l'espérance d'une v.a. (c)

#### ▷ Capacité 2 page 403 du livre Indice.

Une entreprise fabrique des machines. Soit  $X$  la variable aléatoire qui, pour un mois choisi au hasard, associe le nombre de machines vendues pendant cette période.

Une étude statistique permet d'établir la loi de probabilité de  $X$ .

$x_i$	0	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	0,04	0,08	0,12	0,28	0,25	0,17	0,06

1 Calculer l'espérance de  $X$ .

2 La vente d'une machine rapporte 5 000 €. On note  $Y$  la variable aléatoire qui, à un mois tiré au hasard, associe le résultat en euros de l'atelier. Déterminer l'espérance de  $Y$ , puis l'interpréter.

3 Le résultat mensuel, en euros, du second atelier de l'entreprise définit une variable aléatoire  $T$  d'espérance 20 000.

Quelle est l'espérance du résultat mensuel total de l'entreprise ?

### Exercice 3. Représentation d'une v.a. comme somme de v.a. plus simples (c)

#### ▷ ex. 62 p 414 du livre Indice.

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Deux joueurs A et B disposent d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir face est égale à 0,5.

On désigne par  $X$  et  $Y$  les v.a. suivantes :

- $X$  représente le nombre de "Face" obtenus par A ;
- $Y$  représente le nombre de "Face" obtenus par B.

On définit  $Z = X + Y$  et  $T = X - Y$

1. Déterminer la loi suivie par les v.a.  $X$  et  $Y$ .
2. Déterminer  $p(Z = 1)$  et  $p(Z = 2n)$ .
3. Déterminer l'espérance et l'écart-type des v.a.  $Z$  et  $T$ .

**Exercice 4. Somme et moyenne de v.a.(c)**

▷ Capacité 4 page 405 du livre Indice.

Une étude statistique a été réalisée sur le temps d'attente, en secondes, subi par la clientèle avant d'être prise en communication avec un standardiste.

La variable aléatoire  $T$ , qui associe à tout client son temps d'attente, a pour espérance 18 et pour écart-type 7. On estime que la probabilité qu'un client ait une attente de plus de 20 secondes est égale à 0,4.

- 1 Au cours d'une même semaine, un même client passe cinq appels, indépendants les uns des autres. On note  $X$  la variable aléatoire exprimant le nombre de fois où, au cours de ces cinq appels, le temps d'attente est supérieur à 20 secondes. Déterminer l'espérance et l'écart-type de  $X$ .
- 2 Dans le but de diminuer le temps d'attente, on effectue une enquête sur un échantillon de 100 clients. Soit  $Y$  la variable aléatoire mesurant le temps d'attente moyen exprimé en secondes pour un échantillon de 100 clients. Déterminer l'espérance et l'écart-type de  $Y$ .

**Exercice 5. Somme et moyenne de v.a.(c)**

▷ ex. 65 p 415 du livre Indice.

On suppose que la masse d'un certain type de colis que reçoit une entreprise définit une v.a. d'espérance 300 kg et d'écart-type 50 kg.

On place les colis sur un monte-charge, et on s'intéresse à la masse aléatoire  $M$  qui, à un groupe de 25 colis, associe la masse totale de l'ensemble des colis.

On note  $P_i$  la v.a. associée à la masse du  $i$ -ième colis.

1. Calculer l'espérance de la v.a.  $M$ .
2. On suppose que les v.a.  $P_i$  sont indépendantes. Déterminer l'écart-type de  $M$ .

**Exercice 6. Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev(c)**

▷ Capacité 5 page 407 du livre Indice.

On lance 3 600 fois une pièce de monnaie non truquée.

Soit  $X$  la variable aléatoire qui associe à cette expérience le nombre de Pile obtenus.

- 1 Écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev relative à la variable  $X$ .
- 2 Minorer la probabilité que le nombre d'apparitions de Pile soit strictement compris entre 1 600 et 2 000.

**Exercice 7. Utiliser l'inégalité de concentration (c)**

▷ Capacité 6 page 407 du livre Indice.

On effectue  $n$  tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires. On note  $X$  la variable aléatoire qui, à un tirage donné, associe 1 si la boule tirée est rouge, et 0 sinon, et  $M_n$  la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille  $n$  de  $X$ .

- 1 Déterminer  $E(X)$  et  $V(X)$ , puis écrire l'inégalité de concentration relative à  $M_n$ .
- 2 À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95 % que la proportion de boules rouges obtenues restera strictement comprise entre 0,35 et 0,45 ?

## Deuxième partie

## Problèmes type bac

**Exercice 8. Lors d'un salon d'artisanat**

Lors d'un salon d'artisanat, un artisan ne vend que deux produits :

- le produit A au prix unitaire de 8 euros ;
- le produit B au prix unitaire de 12 euros.

On suppose que les quantités achetées par les clients sont indépendantes.

Le nombre de produits achetés par une personne s'arrêtant au stand de cet artisan est modélisé :

- pour le produit A par une v.a.  $X$  d'espérance 2 et variance 2 ;
- pour le produit B par une v.a.  $Y$  d'espérance 1 et variance 1.

1. Soit  $Z$  la v.a. égale au montant en euros de l'achat d'une personne s'arrêtant au stand.

Calculer l'espérance et la variance de  $Z$ .

2. On a remarqué que 350 personnes s'arrêtaient au stand chaque jour. Soit  $C$  la variable aléatoire qui, à une journée donnée, associe le chiffre d'affaires de l'artisan.

2. a. Déterminer l'espérance et la variance de  $C$ .

2. b. En utilisant l'inégalité de Bienaumé-Tchebichev, déterminer un minorant de la probabilité que le chiffre d'affaires soit strictement compris entre 9 000 et 10 600 euros.

**Exercice 9. Un QCM**

1.  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires indépendantes de variances respectives 4 et 9.

L'écart-type de la variable aléatoire  $Z = X + Y$  est égal à :

- a. 13      b.  $\sqrt{13}$       c. 5      d.  $\sqrt{97}$

2. Soit  $X_1$  et  $X_2$  deux variables aléatoires de même loi donnée par le tableau ci-dessous.

$x_i$	-2	-1	2	5
$P(X = x_i)$	0,2	0,5	0,2	0,1

On suppose  $X_1$  et  $X_2$  indépendantes.

Soit la variable aléatoire  $Y = X_1 + X_2$ . Alors  $P(Y = 4)$  est égal à :

- a. 0,04      b. 0,09      c. 0,10      d. 0,14

3. Soit  $X$  une variable aléatoire d'espérance 150 et d'écart-type 20. On note  $S$  la variable aléatoire somme d'un échantillon de taille 100 de  $X$ . On a :

a.  $E(S) = 15\ 000$       b.  $E(S) = 150$

c.  $V(S) = 40\ 000$       d.  $\sigma(S) = 20$



## Troisième partie

# Correction

### Correction de l'exercice 1 page 1

$X$  et  $Y$  prennent les valeurs 0 et 1, donc  $Z$  prend les valeurs 0, 1 et 2.

On a  $P(X=0) = \frac{3}{5} = 0,6$  et  $P(X=1) = 0,4$ .

**1** Dans le cas d'un tirage avec remise :

$P(Y=0) = 0,6$  et  $P(Y=1) = 0,4$ .

$P(Z=0) = P(X=0 \text{ et } Y=0) = P(X=0) \times P(Y=0) = 0,6 \times 0,6 = 0,36$ .

$P(Z=2) = P(X=1 \text{ et } Y=1) = 0,4 \times 0,4 = 0,16$ .

On peut déduire  $P(Z=1)$  par la formule

$P(Z=0) + P(Z=1) + P(Z=2) = 1$ , ce qui donne

$P(Z=1) = 1 - 0,36 - 0,16 = 0,48$ .

$z_i$	0	1	2
$P(Z = z_i)$	0,36	0,48	0,16

**2** Dans le cas d'un tirage sans remise, on a :

$P_{X=0}(Y=0) = \frac{2}{4} = 0,5$ ;  $P_{X=0}(Y=1) = \frac{2}{4} = 0,5$ ;  $P_{X=1}(Y=0) = \frac{3}{4} = 0,75$

$P_{X=1}(Y=1) = \frac{1}{4} = 0,25$ .

$P(Z=0) = P(X=0 \text{ et } Y=0) = P(X=0) \times P_{X=0}(Y=0) = 0,6 \times 0,5 = 0,3$

$P(Z=2) = P(X=1 \text{ et } Y=1) = P(X=1) \times P_{X=1}(Y=1) = 0,4 \times 0,25 = 0,1$ .

On en déduit :  $P(Z=1) = 1 - P(Z=0) - P(Z=2)$

$= 1 - 0,3 - 0,1 = 0,6$ .

$z_i$	0	1	2
$P(Z = z_i)$	0,3	0,6	0,1

### Correction de l'exercice 2 page 1

**1**  $E(X) = \sum_{i=1}^{i=7} (x_i \times P(X = x_i)) = 3,37$ .

**2** On a :  $Y = 5\,000X$ , et  $E(Y) = E(5\,000X) = 5\,000 E(X)$ , par linéarité de l'espérance.

D'où  $E(Y) = 5\,000 \times 3,37 = 16\,850$ .

Le résultat mensuel moyen de cet atelier peut donc être estimé à 16 850 €.

**3** On doit calculer  $E(Y + T)$ . Par linéarité de l'espérance :  $E(Y + T) = E(Y) + E(T) = 36\,850$ .

L'espérance du résultat mensuel de l'entreprise est 36 850 €.

### Correction de l'exercice 3 page 1

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Deux joueurs A et B disposent d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir face est égale à 0,5.

On désigne par  $X$  et  $Y$  les v.a. suivantes :

- $X$  représente le nombre de "Face" obtenus par A;
- $Y$  représente le nombre de "Face" obtenus par B.

On définit  $Z = X + Y$  et  $T = X - Y$

**1. Déterminer la loi suivie par les v.a.  $X$  et  $Y$ .**

Il y a répétitions de  $n$  expériences aléatoires identiques et indépendantes de Bernoulli (lancer une pièce) donc les v.a.  $X$  et  $Y$  suivent une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p = 0,5$ .

**2. Déterminer  $P(Z = 1)$  et  $P(Z = 2n)$ .**

- Puisque  $X$  et  $Y$  suivent une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p = 0,5$  on a :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} \frac{1}{2^n}, \text{ pour tout entier } k \text{ tel que } 0 \leq k \leq n$$

- L'évènement  $\{Z = 1\}$  est obtenu comme l'union de deux événements incompatibles  $\{X = 1 \text{ et } Y = 0\}$  et  $\{X = 0 \text{ et } Y = 1\}$ . Comme  $X$  et  $Y$  sont indépendantes :

$$\begin{aligned} P(Z = 1) &= P(X = 1 \text{ et } Y = 0) + P(X = 0 \text{ et } Y = 1) \\ &= P(X = 1) \times P(Y = 0) + P(X = 0) \times P(Y = 1) \\ &= \binom{n}{1} \frac{1}{2^n} \times \binom{n}{0} \frac{1}{2^n} + \binom{n}{0} \frac{1}{2^n} \times \binom{n}{1} \frac{1}{2^n} \\ &= n \times \frac{1}{2^n} \times 1 \times \frac{1}{2^n} + 1 \times \frac{1}{2^n} \times n \times \frac{1}{2^n} \\ P(Z = 1) &= \frac{2n}{2^{2n}} \end{aligned}$$

$$P(Z = 1) = \frac{n}{2^{2n-1}}$$

- on a :

$$\begin{aligned} P(Z = 2n) &= P(X = n \text{ et } Y = n) \\ P(Z = 2n) &= P(X = n) \times P(Y = n) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

$$P(Z = 2n) = \frac{1}{2^{2n}}$$

### 3. Déterminer l'espérance et l'écart-type des v.a. $Z$ et $T$ .

- $X$  et  $Y$  ont pour espérance et variance respectivement

$$E = np = 0,5n \text{ et } V = np(1-p) = n \times 0,5 \times 0,5 = 0,25n.$$

$$E(Z) = E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 0,5n + 0,5n \implies E(Z) = n$$

- De plus  $X$  et  $Y$  sont indépendantes donc

$$V(Z) = V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

donc

$$V(Z) = 0,25n + 0,25n = 0,5n \implies V(Z) = 0,5n$$

et

$$E(T) = E(X - Y) = E(X) - E(Y) = 0,5n - 0,5n = 0 \implies E(T) = 0$$

- Comme  $X$  et  $Y$  sont indépendantes,  $X$  et  $-Y$  le sont aussi, donc

$$V(T) = V(X + (-Y)) = V(X) + V(-Y) = V(X) + (-1)^2 V(Y) = V(X) + V(Y)$$

Ainsi

$$V(T) = 0,25n + 0,25n = 0,5n \implies V(T) = 0,5n$$

**Correction de l'exercice 4 page 2**

- 1** On est en présence de l'épreuve constituée par le temps d'attente à un appel téléphonique. Cette épreuve se répète 5 fois, de façon identique et indépendante, et la probabilité de succès (le temps d'attente est de plus de 20 secondes) est égale à 0,4.  $X$  suit donc la loi binomiale de paramètres  $n = 5$  et  $p = 0,4$ . Son espérance est  $E(X) = np = 5 \times 0,4 = 2$  et son écart-type est  $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{5 \times 0,4 \times 0,6} = \sqrt{1,2}$ , soit environ 1,1.
- 2**  $Y$  est la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de la variable  $T$  de taille 100, donc  $E(Y) = E(T) = 18$ . Son écart-type est  $\sigma(Y) = \frac{\sigma(T)}{\sqrt{100}} = \frac{7}{10}$ , soit 0,7.

**Exercice 10. Correction de l'exercice 5 page 2**

▷ ex. 65 p 415 du livre **Indice**.

On suppose que la masse d'un certain type de colis que reçoit une entreprise définit une v.a. d'espérance 300 kg et d'écart-type 50 kg.

On place les colis sur un monte-charge, et on s'intéresse à la masse aléatoire  $M$  qui, à un groupe de 25 colis, associe la masse totale de l'ensemble des colis.

On note  $P_i$  la v.a. associée à la masse du  $i$ -ième colis.

**1. Calculer l'espérance de la v.a.  $M$ .**

$M$  est la variable aléatoire somme d'un échantillon de taille  $n = 25$  d'une variable aléatoire d'espérance, notée  $E$ , égale à 300. Ainsi

$$E(M) = 25 \times E = 25 \times 300 = \underline{7500}$$

**2. On suppose que les v.a.  $P_i$  sont indépendantes. Déterminer l'écart-type de  $M$ .**

Les variables aléatoires  $P_i$  sont supposées indépendantes et de variance identique  $V$  égale à  $50^2$ , soit  $V = 2500$ . On a donc

$$V(M) = 25 \times V = 62500$$

**Correction de l'exercice 6 page 2**

- 1**  $X$  suit la loi binomiale de paramètres 3 600 et 0,5. Elle a pour espérance  $\mu = 3\,600 \times 0,5 = 1\,800$  et pour variance  $V(X) = 3\,600 \times 0,5 \times 0,5 = 900$ . On écrit alors l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :  $P(|X - 1800| \geq \delta) \leq \frac{900}{\delta^2}$ , pour tout réel  $\delta > 0$ .
- 2** On remarque que :  $]1\,600 ; 2\,000[ = ]1\,800 - 200 ; 1\,800 + 200[$ . On a alors :  $X \in ]1\,600 ; 2\,000[$  équivaut à  $|X - 1\,800| < 200$ .  
 $P(X \in ]1\,600 ; 2\,000[) = P(|X - 1800| < 200) = 1 - P(|X - 1800| \geq 200)$ .  
 On remplace  $\delta$  par 200 dans l'inégalité donnée à la question 1 :  

$$P(|X - 1800| \geq 200) \leq \frac{900}{200^2}$$
 D'où  $1 - P(|X - 1800| \geq 200) \geq 1 - 0,0225$ , soit  $P(1\,600 < X < 1\,800) \geq 0,9775$ .  
 La probabilité que le nombre d'apparitions de Pile soit strictement compris entre 1 600 et 2 000 est au moins de 97,75 %.

## Correction de l'exercice 7 page 2

- 1  $X$  est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre  $\frac{2}{5} = 0,4$  donc  $E(X) = 0,4$  et  $V(X) = 0,4 \times (1 - 0,4) = 0,24$ . On écrit l'inégalité de concentration relative à  $M_n$ , variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille  $n$  de  $X$  avec  $\mu = 0,4$  et  $V = 0,24$  :

$$P(|M_n - 0,4| \geq \delta) \leq \frac{0,24}{n\delta^2}, \text{ pour tout réel } \delta > 0.$$

- 2 On cherche ici le plus petit entier  $n$  tel que  $P(0,35 < M_n < 0,45) > 0,95$ .

On remarque que  $0,35 < M_n < 0,45$  équivaut à  $|M_n - 0,4| < 0,05$ .

On veut que  $M_n$  vérifie :  $P(|M_n - 0,4| < 0,05) > 0,95$ .

L'événement contraire de  $\{|M_n - 0,4| < 0,05\}$  est  $\{|M_n - 0,4| \geq 0,05\}$ .

Ainsi :  $P(|M_n - 0,4| < 0,05) = 1 - P(|M_n - 0,4| \geq 0,05)$ .

Donc :  $P(|M_n - 0,4| < 0,05) > 0,95$  équivaut à  $1 - P(|M_n - 0,4| \geq 0,05) > 0,95$

soit  $P(|M_n - 0,4| \geq 0,05) < 0,05$  (1).

L'inégalité de concentration avec  $\delta = 0,05$  s'écrit :

$$P(|M_n - 0,4| \geq 0,05) \leq \frac{0,24}{n \times 0,05^2}, \text{ soit } P(|M_n - 0,4| \geq 0,05) \leq \frac{96}{n}.$$

L'inégalité (1) sera vérifiée si l'on choisit  $n$  tel que  $\frac{96}{n} < 0,05$ .

On en déduit :  $0,05n > 96$ , soit  $n > \frac{96}{0,05}$ .

$\frac{96}{0,05} = 1\,920$ , donc le nombre minimal de lancers est 1 921.

**Correction de l'exercice 8 page 3**

Lors d'un salon d'artisanat, un artisan ne vend que deux produits :

- le produit A au prix unitaire de 8 euros ; et le produit B au prix unitaire de 12 euros.

On suppose que les quantités achetées par les clients sont indépendantes. Le nombre de produits achetés par une personne s'arrêtant au stand de cet artisan est modélisé :

- pour le produit A par une v.a.  $X$  d'espérance 2 et variance 2 et pour B par une v.a.  $Y$  d'espérance 1 et variance 1.

1. Soit  $Z$  la v.a. égale au montant en euros de l'achat d'une personne s'arrêtant au stand. Calculer l'espérance et la variance de  $Z$ .

**Corrigé**

Par linéarité de l'espérance,

$$E(Z) = E(8X + 12Y) = 8E(X) + 12E(Y) = 8 \times 2 + 12 \times 1 = 28$$

Par ailleurs

$$V(Z) = V(8X + 12Y)$$

Comme  $X$  et  $Y$  sont indépendantes,  $8X$  et  $12Y$  le sont aussi donc :

$$V(Z) = V(8X) + V(12Y) = 64V(X) + 144V(Y) = 64 \times 2 + 144 \times 1 = 272$$

2. On a remarqué que 350 personnes s'arrêtaient au stand chaque jour. Soit  $C$  la variable aléatoire qui, à une journée donnée, associe le chiffre d'affaires de l'artisan.

2. a. Déterminer l'espérance et la variance de  $C$ .

**Corrigé**

$C$  est la variable aléatoire somme d'un échantillon de  $Z$  de taille 350.

$$E(C) = 350E(Z) = 350 \times 28 = 9800$$

$$V(C) = 350V(Z) = 350 \times 272 = 95200$$

2. b. En utilisant l'inégalité de Bienaumé-Tchebichev, déterminer un minorant de la probabilité que le chiffre d'affaires soit strictement compris entre 9 000 et 10 600 euros.

**Corrigé**

Il s'agit de minorer  $P(9000 < C < 10600)$ .  
 Or on a l'équivalence :

$$9000 < C < 10600 \iff 9800 - 800 < C < 9800 + 800 \iff |C - 9800| < 800$$

Puisque :

$$9000 < C < 10600 \iff |C - 9800| < 800$$

L'événement contraire de  $\{9000 < C < 10600\}$  est l'événement  $\{|C - 9800| \geq 800\}$ .

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev relative à  $C$  s'écrit

$$P(|C - 9800| \geq 800) \leq \frac{V(C)}{800^2} = \frac{95200}{800^2}$$

d'où

$$P(9000 < C < 10600) \geq 1 - \frac{95200}{800^2} \approx 0,85$$

### Correction de l'exercice 9 page 3

1. Réponse b.



#### Corrigé

Puisque  $X$  et  $Y$  sont indépendantes :

$$V(Z) = V(X + Y) = V(X) + V(Y) = 4 + 9 = 13 \implies \sigma(Z) = \sqrt{13}$$

2. Réponse d.



#### Corrigé

$X_1$  et  $X_2$  sont indépendantes.

$$\begin{aligned} P(Y = 4) &= P(X_1 + X_2 = 4) \\ &= P(X_1 = 2 \text{ et } X_2 = 2) + P(X_1 = -1 \text{ et } X_2 = 5) + P(X_1 = 5 \text{ et } X_2 = -1) \\ &= 0,2^2 + 0,5 \times 0,1 + 0,1 \times 0,5 \\ P(Y = 4) &= \underline{0,14} \end{aligned}$$

3. Réponses a et c.



#### Corrigé

$S$  est la va somme d'un échantillon de taille 100 de  $X$  avec  $E(X) = 150$ ,  $V(X) = 20^2 = 400$  et  $\sigma(X) = 20$  donc :

$$\begin{cases} E(S) = 100E(X) = 15\,000 \\ V(S) = 100V(X) = 40\,000 \\ \sigma(S) = \sqrt{100} \times \sigma(X) = 200 \end{cases}$$

4. Réponse c.



#### Corrigé

$X$  v.a. d'espérance 100 et variance 10 (donc d'écart-type  $\sqrt{10}$ ). On note  $M_n$  la moyenne d'un échantillon

de taille  $n$  de  $X$ . On cherche la plus petite valeur de  $n$  telle que  $\sigma(M_n) < 0,3$ . Or on a :

$$\begin{aligned} \sigma(M_n) < 0,3 &\iff \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}} < 0,3 \\ &\iff \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{n}} < 0,3 \\ &\iff \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{10}} > \frac{1}{0,3} = \frac{10}{3} \\ &\iff \sqrt{n} > \frac{10\sqrt{10}}{3} \\ &\iff n > \frac{1000}{9} \approx 111,11 \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\sigma(M_n) < 0,3 \iff n \geq 112}$$

De ce fait la plus petite valeur de  $n$  telle que  $\sigma(M_n) < 0,3$  est  $n = 112$ .

5. Réponses b, c, d.



### Corrigé

$X$  v.a. d'espérance 0 et variance  $V \in \mathbb{N}^*$ . On note  $M_n$  la moyenne d'un échantillon de taille  $n$  de  $X$ . On cherche pour quelles valeurs de  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $V \in \mathbb{N}^*$  on a :  $P(|M_n| < 3) \geq \frac{1}{18}$ .

D'après l'inégalité de concentration on a :

$$P(|M_n - E(X)| \geq \alpha) \leq \frac{V(X)}{n\alpha^2}$$

Et puisque  $X$  est d'espérance nulle et de variance  $V > 0$  on a avec  $\alpha = 3$  :

$$P(|M_n| \geq 3) \leq \frac{V}{9n}$$

En passant à l'évènement contraire et d'après l'inégalité de concentration :

$$P(|M_n| < 3) = 1 - P(|M_n| \geq 3) \geq 1 - \frac{V}{9n}$$

De ce fait :

$$\begin{cases} \text{On cherche : } P(|M_n| < 3) \geq \frac{1}{18} \\ \text{On a : } P(|M_n| < 3) \geq 1 - \frac{V}{9n} \end{cases}$$

Donc en prenant :

$$1 - \frac{V}{9n} \geq \frac{1}{18} \iff \frac{V}{9n} \leq 1 - \frac{1}{18} = \frac{17}{18} \iff \frac{V}{n} \leq \frac{17}{2} = 8,5$$

6. Réponse d.



### Corrigé

$X$  v.a. d'espérance 0 et d'écart-type 1.

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev on a :

$$P(|X - E(X)| \geq \alpha) \leq \frac{V(X)}{\alpha^2}$$

Et puisque  $X$  est d'espérance nulle et de variance  $1^2 = 1$  on a avec  $\alpha = a > 0$  :

$$P(|X| \geq a) \leq \frac{1}{a^2}$$

En passant à l'évènement contraire et d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev :

$$P(|X| \geq a) = 1 - P(|X| < a) \leq \frac{1}{a^2} \iff P(|X| < a) \geq 1 - \frac{1}{a^2} = \frac{a^2 - 1}{a^2}$$

Soit

$$P(|X| < a) \geq \frac{a^2 - 1}{a^2}$$