Math93.com

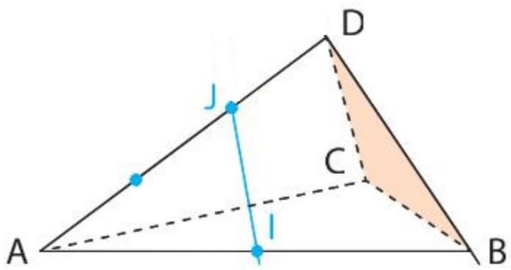
TD 1 - Terminale Spécialité
Espace - Droites, plans et vecteurs

Les exercices suivants dont l'intitulé est suivi du symbole (c) sont corrigés intégralement en fin du présent TD. Les autres présentent des éléments de réponses et un lien vers une correction détaillée sur www.math93.com

Première partie
Droites et plans de l'espace

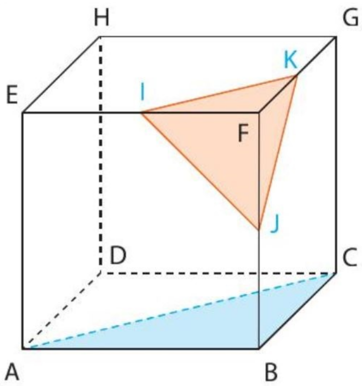
Exercice 1. Intersection d'une droite et d'un plan (c)

ABCD est un tétraèdre.
Le point I est le milieu du segment [AB] et J le point de l'arête [AD] tel que $AJ = \dfrac{2}{3}AD$.
Déterminer l'intersection de la droite (IJ) et du plan (BCD).



Exercice 2. Intersection de deux plans (c)

ABCDEFGH est un cube.
Les points I, J, K sont les milieux des arêtes [EF], [FB] et [FG].
Déterminer l'intersection des plans (IJK) et (ABC).

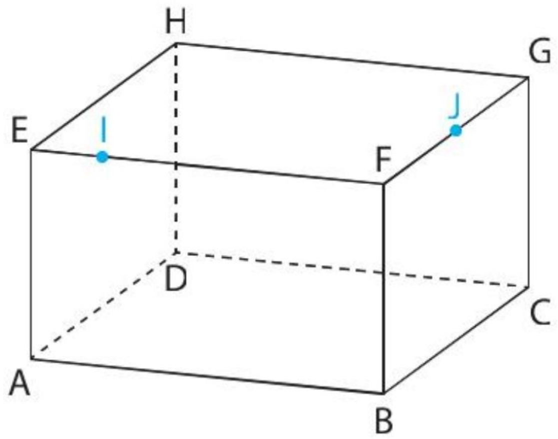


Exercice 3. Intersection et parallélisme (c)

ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle (ou pavé droit).
I est le point de [EF) tel que $EI = \dfrac{1}{5}EF$, J est le milieu de [FG].

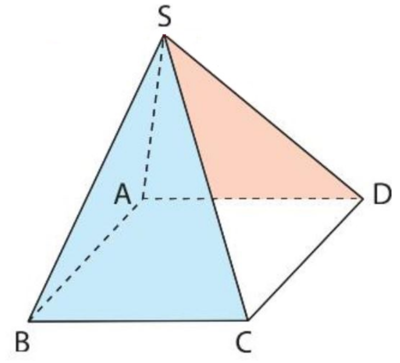
1. Déterminer et tracer l'intersection des plans (AIJ) et (ABC).
2. Déterminer et tracer la section du parallélépipède rectangle par le plan (AIJ).

   Quelle est la nature du polygone obtenu ?



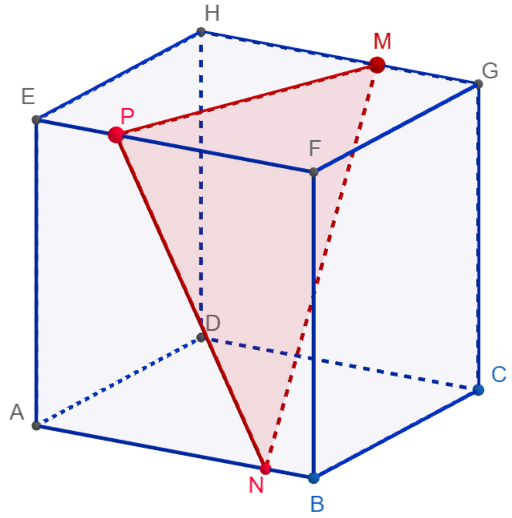
Exercice 4. Avec le théorème du toit (c)

Soit SABCD une pyramide de base le carré ABCD.
Déterminer l'intersection des plans (SBC) et (SAD)



Exercice 5. Construire l'intersection d'un plan avec le cube ABCDEFGH

Construire l'intersection du plan (MNP) avec le cube ABCDEFGH.



Preuve

- Le corrigé en vidéo : https://youtu.be/7qtNSRzLf6Y.
- Une animation de la section sur Geogebra-3D : animation

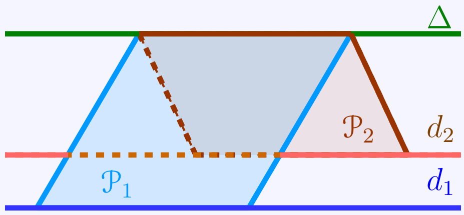
Deuxième partie

Avec les caractérisations vectorielles

Exercice 6. Démonstration du théorème du toit

Théorème 1 (Théorème du toit (1))

Soit (d_1) et (d_2) deux droites parallèles. Les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ contenant respectivement (d_1) et (d_2) se coupent en (Δ) qui est parallèle aux droites (d_1) et (d_2).



On considère donc (d_1) et (d_2) deux droites parallèles. Les plans $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_2$ contenant respectivement (d_1) et (d_2) se coupent en une droite (Δ).
On cherche à montrer que la droite (Δ) est parallèle aux droites (d_1) et (d_2).

1. Soit $\overrightarrow{u}$, un vecteur directeur (non nul) de la droite (d_1).

   Montrer que $\overrightarrow{u}$ est aussi un vecteur directeur de la droite (d_2) et un vecteur des plans $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_2$.

2. Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur directeur (non nul) de la droite (Δ).

   En raisonnant par l'absurde, montrer que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

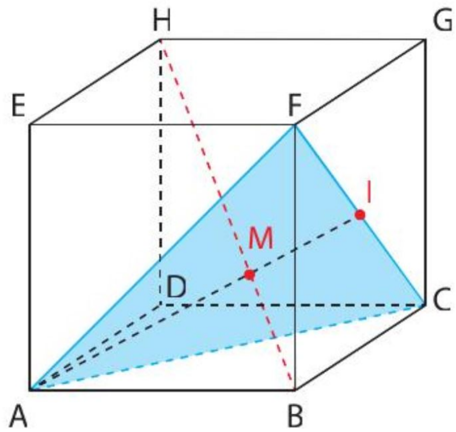
3. Conclure.

Exercice 7. Problème d'alignement

Soit ABCDEFGH un cube et I le milieu du segment [FC].
Le point M est tel que $\overrightarrow{AM} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.
Montrer que les points M, B et H sont alignés.

1. En vous plaçant dans un astucieux repère de l'espace.

2. En faisant juste une démonstration vectorielle. (Chasles est votre ami !)



Vous pouvez visualiser la figure via **Geogebra-3D** : https://www.geogebra.org/3d/cpubgxjf.

Troisième partie

Équations de droites et de plans

Exercice 8. Équations paramétriques d'une droite

Dans un repère $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$, $A(-2,3,1)$ et $B(5,2,-2)$

1. Calculer une représentation paramétrique de (AB) en considérant que c'est la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ et passant par le point A.
2. Calculer une autre représentation paramétrique de (AB) en considérant que c'est la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ et passant par le point B.
3. Les points $M(-9,4,4)$ et $N(12,1,1)$ appartiennent-ils à cette droite ?

Exercice 9. Droites confondues

Propriété 1

- Deux droites sont parallèles si elle admettent des vecteurs directeurs colinéaires.
- Deux droites sont confondues, si elles sont parallèles et ont (au moins) un point commun.

Démontrer que les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ de représentations paramétriques :

$$\mathscr{D} : \begin{cases} x = -1+5t \\ y = -3-t \\ z = -4t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \mathscr{D}' : \begin{cases} x = 9+15t' \\ y = -5-3t' \\ z = -8-12t' \end{cases} \quad t' \in \mathbb{R}, \text{ sont confondues.}$$

Exercice 10. Droites strictement parallèles

Démontrer que les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ de représentations paramétriques :

$$\mathscr{D} : \begin{cases} x = -3+4t \\ y = 4t \\ z = 1+12t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \mathscr{D}' : \begin{cases} x = -1+t' \\ y = 2+t' \\ z = 5+3t' \end{cases} \quad t' \in \mathbb{R}, \text{ sont strictement parallèles.}$$

Exercice 11. Droites bon coplanaires

Démontrer que les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ de représentations paramétriques :

$$\mathscr{D} : \begin{cases} x = -3+t \\ y = t \\ z = 1+3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \mathscr{D}' : \begin{cases} x = -1+t' \\ y = 2-2t' \\ z = 5+3t' \end{cases} \quad t' \in \mathbb{R}, \text{ sont non coplanaires.}$$

Exercice 12. Droites sécantes

Démontrer que les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ de représentations paramétriques :

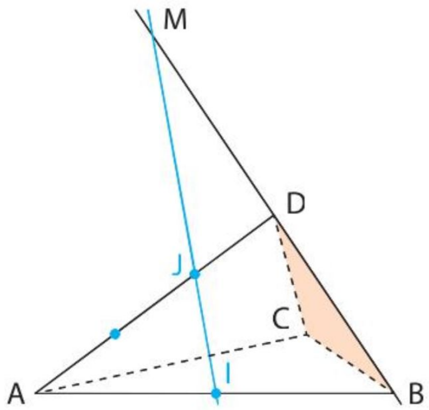
$$\mathscr{D} : \begin{cases} x = -3+t \\ y = 2-t \\ z = 1+t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \mathscr{D}' : \begin{cases} x = t' \\ y = 1+t' \\ z = -1-4t' \end{cases} \quad t' \in \mathbb{R}, \text{ sont sécantes.}$$

Quatrième partie

Correction - Droites et plans de l'espace

Correction de l'exercice 1 page 1

ABCD est un tétraèdre. Le point I est le milieu du segment [AB] et J le point de l'arête [AD] tel que $AJ = \frac{2}{3}AD$. *Déterminer l'intersection de la droite (IJ) et du plan (BCD).*

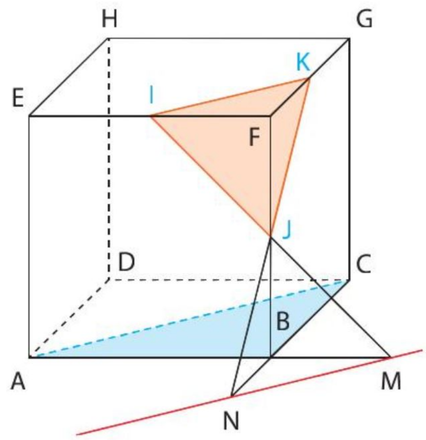


- Dans le plan (ABD), les droites (IJ) et (BD) sont coplanaires et non parallèles car le point I est le milieu du segment [AB] et J n'est pas le milieu du segment [AD].

  De ce fait, les droites (IJ) et (BD) sont sécantes en un point M.
- Le point M appartient à la droite (BD) donc il appartient aussi au plan (BCD). Comme il appartient aussi à la droite (IJ), il appartient aussi à l'intersection de (IJ) et du plan (BCD).
- Par ailleurs, le point I n'appartient pas à (BCD) donc la droite (IJ) n'est pas incluse dans (BCD).
- De ce fait, la <u>droite (IJ) est sécante au plan (BCD) en M</u>.

Correction de l'exercice 2 page 1

ABCDEFGH est un cube. Les points I, J, K sont les milieux des arêtes [EF], [FB] et [FG]. Déterminer l'intersection des plans (IJK) et (ABC).

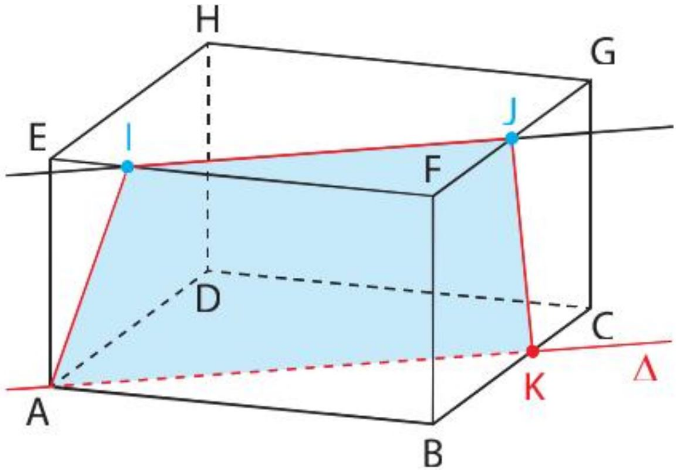


- Dans le plan (ABF), les droites (AB) et (IJ) sont coplanaires et non parallèles, donc sécantes en un point M.
- Ce point M appartient et à la droite (AB) et donc au plan (ABC), et à la droite (IJ) et donc au plan (IJK).
- De même dans le plan (BCF), les droites (BC) et (JK) sont coplanaires et non parallèles, donc sécantes en un point N.
- Ce point N appartient au plan (ABC) et au plan (IJK).
- <u>Conclusion</u> : l'intersection des plans (IJK) et (ABC) est la droite (MN).

Correction de l'exercice 3 page 1

ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle (ou pavé droit).

I est le point de [EF] tel que $EI = \dfrac{1}{5}EF$, J est le milieu de [FG].



1. **Déterminer et tracer l'intersection des plans (AIJ) et (ABC).**

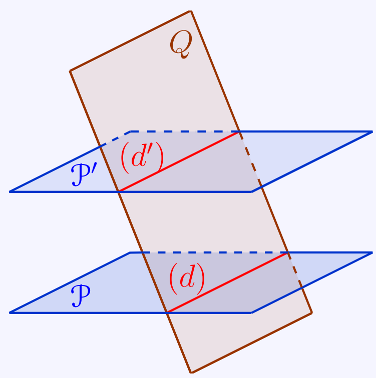
   - Intersection de (AIJ) et (EFG).
     - I et J appartiennent aux plans (AIJ) et (EFG).
     - Les deux plans ne sont pas confondus puisque A n'appartient pas à (EFG)
     - Donc l'intersection des plans (AIJ) et (EFG) est la droite (IJ)
   - Intersection de (AIJ) et (ABC).
     - Comme ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle, les plans (EFG) et (ABC) sont parallèles.
     - Or si deux plans sont parallèles, tout plan sécant à l'un, est sécant à l'autre et les droites d'intersection sont parallèles. (voir théorème 2).
     - Le plan (ABC) coupe donc le plan (AIJ) suivant la droite (Δ) parallèle à la droite (IJ) passant par le point A.

2. **Déterminer et tracer la section du parallélépipède rectangle par le plan(AIJ). Quelle est la nature du polygone obtenu ?**

   - Soit K le point d'intersection de la droite (Δ) et de l'arête [BC].
   - La section du parallélépipède rectangle ABCDEFGH par le plan(AIJ) est le quadrilatère AIJK.
   - Comme (AK) et (IJ) sont parallèles, le quadrilatère AIJK est un trapèze.

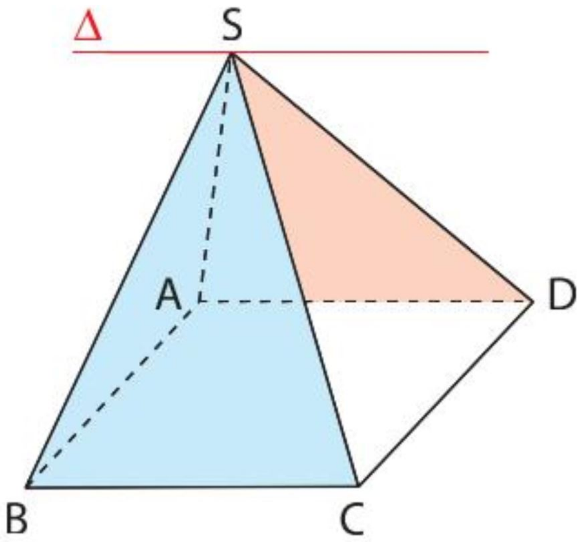
Théorème 2 (Parallélisme de deux droites)

Si deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont strictement parallèles, tout plan $\mathcal{Q}$ qui coupe le plan $\mathcal{P}$, coupe aussi le plan $\mathcal{P}'$ et les droites d'intersection (d) et (d') sont parallèles.



Correction de l'exercice 4 page 2

Soit SABCD une pyramide de base le carré ABCD. Déterminer l'intersection des plans (SBC) et (SAD).



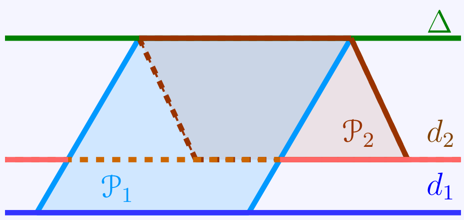
- Les deux plans (SBC) et (SAD) ont le point S en commun, ils ne sont donc pas strictement parallèles (ils peuvent être confondus ?)
- Par ailleurs et le point A appartient à (SAD) mais pas à (SBC), de ce fait, ils ne sont ni parallèles, ni confondus. Ils sont sécants suivant une droite (Δ).
- La droite d'intersection (Δ) passe par le point S, un point commun à ces deux plans.
- De plus la droite (BC) qui appartient au plan (SBC) et la droite (AD) qui elle appartient au plan (SAD) sont parallèles puisque SABCD est une pyramide de base le carré ABCD.
- On peut alors appliquer le théorème du toit, (Δ) est aussi parallèle aux droites (AD) et (BC).

$$\begin{cases} (BC)//(AD) \\ (BC) \in (SBC) \\ (AD) \in (SAD) \\ (\Delta) = (SBC) \cap (SBC) \end{cases} \underset{\text{par th. du toit}}{\Longrightarrow} \begin{cases} (\Delta)//(BC) \\ (\Delta)//(AD) \end{cases}$$

- Conclusion : l'intersection des plans (SBC) et (SAD) est la droite (Δ) parallèle à (BC) passant par S.

Théorème 3 (Théorème du toit (1))

Soit (d_1) et (d_2) deux droites parallèles. Les plans $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_2$ contenant respectivement (d_1) et (d_2) se coupent en (Δ) qui est parallèle aux droites (d_1) et (d_2).



Cinquième partie

Correction : Avec les caractérisations vectorielles

Correction de l'exercice 6 page 3 : Démonstration du théorème du toit

On considère donc (d_1) et (d_2) deux droites parallèles. Les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ contenant respectivement (d_1) et (d_2) se coupent en une droite (Δ).
On cherche à montrer que la droite (Δ) est parallèle aux droites (d_1) et (d_2).

1. **Soit $\overrightarrow{u}$, un vecteur directeur de la droite (d_1). Montrer que $\overrightarrow{u}$ est aussi un vecteur directeur de la droite (d_2) et des plans $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_2$.**

   - Les droites (d_1) et (d_2) sont deux droites parallèles donc il existe un vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul, directeur de (d_1) et (d_2).
   - La droite (d_1) est incluse dans le plan $\mathcal{P}_1$, donc par définition le vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de (d_1) est un vecteur du plan $\mathcal{P}_1$.
   - La droite (d_2) est incluse dans le plan $\mathcal{P}_2$, donc par définition le vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de (d_2) est un vecteur du plan $\mathcal{P}_2$.

2. **Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur directeur de la droite (Δ). En raisonnant par l'absurde, montrer que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.**
   Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur directeur de la droite (Δ).
   Supposons que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires.

   - Dans ce cas, puisque la droite (Δ) est incluse dans le plan $\mathcal{P}_1$, le vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ de (Δ) est un vecteur du plan $\mathcal{P}_1$.
   - Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non colinéaires dirigent (engendrent) donc le plan $\mathcal{P}_1$.
   - De la même façon, les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non colinéaires dirigent (engendrent) le plan $\mathcal{P}_2$.
   - De ce fait, les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles ce qui est contraire à l'hypothèse initiale.

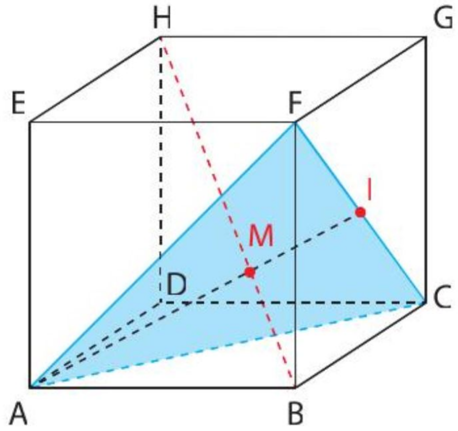
   On en déduit que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

3. **Conclure.**
   Puisque $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, les droites (d_1), (d_2) et (Δ) sont parallèles.

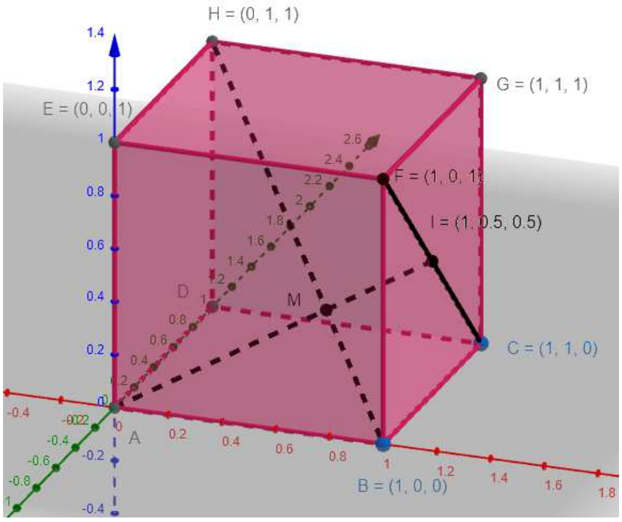
Correction de l'exercice 7 page 3 : problème d'alignement

Soit ABCDEFGH un cube et I le milieu du segment [FC].
Le point M est tel que $\overrightarrow{AM} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.
Montrer que les points M, B et H sont alignés.

1. En vous plaçant dans un astucieux repère de l'espace.
2. En faisant juste une démonstration vectorielle. (Chasles est votre ami !)



12.1 Première preuve : avec un repère de l'espace



Soit ABCDEFGH un cube et I le milieu du segment [FC]. Le point M est tel que $\overrightarrow{AM} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AI}$. Montrer que les points M, B et H sont alignés.

On se place dans le repère de l'espace $(A\ ;\ B\ ;\ D\ ;\ E)$. On a donc :

$$\begin{cases} A\,(0\ ;\ 0\ ;\ 0) \\ B\,(1\ ;\ 0\ ;\ 0) \\ D\,(0\ ;\ 1\ ;\ 1) \\ E\,(0\ ;\ 0\ ;\ 1) \end{cases} \qquad \begin{cases} C\,(1\ ;\ 1\ ;\ 0) \\ F\,(1\ ;\ 0\ ;\ 1) \\ G\,(1\ ;\ 1\ ;\ 1) \\ H\,(0\ ;\ 1\ ;\ 1) \end{cases}$$

*Vous pouvez visualiser la figure via **Geogebra-3D** : https://www.geogebra.org/3d/cpubgxjf.*

- I le milieu du segment [FC] est de coordonnées :

$$\begin{cases} F\,(1\ ;\ 0\ ;\ 1) \\ C\,(1\ ;\ 1\ ;\ 0) \end{cases} \Longrightarrow I\left(1\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$$

- Le point M est tel que $\overrightarrow{AM} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AI}$ soit :

$$\begin{cases} A\,(0\ ;\ 0\ ;\ 0) \\ I\,(1\ ;\ 0,5\ ;\ 0,5) \\ M\,(x_M\ ;\ y_M\ ;\ z_M) \end{cases} \Longrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_M - 0 \\ y_M - 0 \\ z_M - 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} \Longrightarrow \boxed{M\left(\frac{2}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\right)}$$

- De ce fait :

$$\begin{cases} M\left(\frac{2}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\right) \\ B\,(1\ ;\ 0\ ;\ 0) \\ H\,(0\ ;\ 1\ ;\ 1) \end{cases} \Longrightarrow \overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{BH}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Soit $\overrightarrow{BM} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BH}$ et donc <u>les points M, B et H sont alignés</u>.

12.2 Deuxième preuve : juste avec le vecteurs

Soit ABCDEFGH un cube et I le milieu du segment [FC]. Le point M est tel que $\overrightarrow{AM} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AI}$. Montrer que les points M, B et H sont alignés.

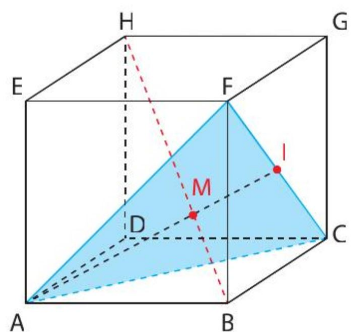
Il suffit de montrer que les vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BH}$ sont colinéaires.
Les points A, B, C et F étant non coplanaires, d'après la propriété 9, $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BH}$ peuvent être décomposés en fonction de $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BF}$.
$\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BC}$.

Soit I le milieu de [FC]. Le point M vérifie $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.

On en déduit que $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FC}\right)$.

Donc $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BF} + \frac{1}{3}\overrightarrow{FB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{BH}$

Les vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BH}$ sont donc colinéaires et les points M, B, H sont alignés.



Sixième partie

Correction - Équations de droites et de plans

Correction de l'exercice 8 page 4

Dans un repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, $A(-2,3,1)$ et $B(5,2,-2)$

1. Calculer une représentation paramétrique de (AB) passant par $A(-2,3,1)$.

Un vecteur directeur de la droite (AB) est le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}7\\-1\\-3\end{pmatrix}$, et $A(-2,3,1)\in(AB)$ donc une représentation paramétrique de (AB) est

$$(AB)\ :\ \begin{cases} x=-2+7t\\ y=3-t\\ z=1-3t\end{cases}$$

2. Calculer une autre représentation paramétrique de (AB) passant par $B(5,2,-2)$.
De même, en considérant qu'elle passe par le point $B(5,2,-2)$ on obtient :

$$(AB)\ :\ \begin{cases} x=5+7t\\ y=2-t\\ z=-2-3t\end{cases}$$

3. Les points $M(-9,4,4)$ et $N(12,1,1)$ appartiennent-ils à cette droite ?

$$\begin{aligned} M\in(AB) &\iff \text{il existe } t\in\mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} x_M=7t-2\\ y_M=-t+3\\ z_M=-3t+1\end{cases}\\ &\iff \exists t\in\mathbb{R}\,,\ \begin{cases} -9=7t-2\\ 4=-t+3\\ 4=-3t+1\end{cases}\\ &\iff \exists t\in\mathbb{R}\,,\ \begin{cases} t=-1\\ 1=-t\\ 3=-3t\end{cases}\end{aligned}$$

$t=-1$ convient donc $M\in(AB)$.

$$\begin{aligned} N\in(AB) &\iff \exists t\in\mathbb{R}\,,\ \begin{cases} 12=7t-2\\ 1=-t+3\\ 1=-3t+1\end{cases}\\ &\iff \exists t\in\mathbb{R}\,,\ \begin{cases} t=2\\ -2=-t\\ t=0\end{cases}\end{aligned}$$

Un tel réel t n'existe pas donc $N\notin(AB)$.

Correction de l'exercice 9 page 4

Démontrer que les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ de représentations paramétriques :

$$\mathscr{D} : \begin{cases} x = -1 + 5t \\ y = -3 - t \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = 0 - 4t \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathscr{D}' : \begin{cases} x = 9 + 15t' \\ y = -5 - 3t' \qquad t' \in \mathbb{R}, \\ z = -8 - 12t' \end{cases} \text{ sont confondues.}$$

- Un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ est $\vec{u}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de $\mathscr{D}'$ est $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix} 15 \\ -3 \\ -12 \end{pmatrix}$
- Ces vecteurs sont colinéaires car $\overrightarrow{u'} = 3\overrightarrow{u}$ donc $\mathscr{D}//\mathscr{D}'$..
- <u>On va montrer qu'elles ont un point commun (et donc qu'elles sont confondues)</u>.
  Le point $A(-1;-3;0) \in \mathscr{D}$, vérifions si $A \in \mathscr{D}'$:

$$\begin{cases} -1 = 9 + 15t' \\ -3 = -5 - 3t' \\ 0 = -8 - 12t' \end{cases} \iff \begin{cases} -10 = 15t' \\ 2 = -3t' \\ 8 = -12t' \end{cases}$$

  Pour $t' = -\frac{2}{3}$, le système est vérifié donc $A \in \mathscr{D}'$.
  Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles et ont un point commun A, elles sont donc confondues.

Correction de l'exercice 10 page 4

Démontrer que les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ de représentations paramétriques sont parallèles non confondues.

$$\mathscr{D} : \begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 4t \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = 1 + 12t \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathscr{D}' : \begin{cases} x = -1 + t' \\ y = 2 + t' \quad t' \in \mathbb{R}, \\ z = 5 + 3t' \end{cases} \text{ sont strictement parallèles.}$$

- Un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ est $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de $\mathscr{D}'$ est $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$
- Ces vecteurs sont colinéaires car $\overrightarrow{u} = 4\overrightarrow{u'}$ donc $\mathscr{D}//\mathscr{D}'$.
- <u>On va montrer qu'elles ne sont pas confondues</u>.
  Le point $A(-3;0;1) \in \mathscr{D}$, vérifions s'il appartient à $\mathscr{D}'$:

$$\begin{cases} -3 = -1 + t' \\ 0 = 2 + t' \\ 1 = 5 + 3t' \end{cases} \iff \begin{cases} -2 = t' \\ -2 = t' \\ -4 = 3t' \end{cases}$$

  Ce système n'a pas de solution, on en déduit que $A \notin \mathscr{D}'$ et par suite que les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont strictement parallèles .

Correction de l'exercice 11 page 4

Démontrer que les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ de représentations paramétriques :

$$\mathscr{D} : \begin{cases} x = -3+t \\ y = t \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = 1+3t \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathscr{D}' : \begin{cases} x = -1+t' \\ y = 2-2t' \quad t' \in \mathbb{R}, \\ z = 5+3t' \end{cases} \text{ sont non coplanaires.}$$

Méthode : pour montrer que deux droites sont non coplanaires, il faut montrer qu'elles ne sont ni sécantes ni parallèles.

Un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de $\mathscr{D}'$ est $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$

• $\frac{1}{1} \neq \frac{-2}{1}$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires donc $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas parallèles.

• On cherche s'il existe un réel t et un réel t' permettant d'obtenir les coordonnées d'un même point.
On résout le système :

$$\begin{cases} -3+t = -1+t' \\ t = 2-2t' \\ 1+3t = 5+3t' \end{cases} \iff \begin{cases} t-t' = 2 \\ t+2t' = 2 \\ 3t-3t' = 4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3t = 6 \\ 3t' = 0 \\ 3t-3t' = 4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t = 2 \\ t' = 0 \\ 6 = 4 \text{ impossible} \end{cases} \qquad \text{donc } \mathscr{D} \text{ et } \mathscr{D}' \text{ ne sont pas sécantes.}$$

• Conclusion : $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas coplanaires.

Correction de l'exercice 12 page 4

Démontrer que les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ de représentations paramétriques :

$$\mathscr{D} : \begin{cases} x = -3+t \\ y = 2-t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 1+t \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathscr{D}' : \begin{cases} x = t' \\ y = 1+t' \qquad t' \in \mathbb{R}, \\ z = -1-4t' \end{cases} \text{ sont sécantes.}$$

$$\begin{cases} -3+t = t' \\ 2-t = 1+t' \\ 1+t = -1-4t' \end{cases} \iff \begin{cases} t-t' = 3 \\ t+t' = 1 \\ t+'t' = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2t = 4 \\ 2t' = -2 \\ t+4t' = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} t = 2 \\ t' = 1 \\ 2-4 = -2 \text{ vrai..} \end{cases}$$

Le système a un couple solution $(t;t') = (2;-1)$
Donc, en remplaçant t par 2 dans l'équation de $\mathscr{D}$, on obtient :

$$\begin{cases} x = -3+2 = -1 \\ y = 2-2 = 0 \\ z = 1+2 = 3 \end{cases}$$

On peut vérifier qu'on trouve les mêmes valeurs en remplaçant t' par (-1) dans l'équation de $\mathscr{D}'$,

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 1+(-1) = 0 \\ z = -1+4 = 3 \end{cases}$$

Conclusion : $\mathscr{D} \cap \mathscr{D}' = \{A\}$ avec $A(-1;0;3)$.

↩ **Fin du TD** ↪