Math93.com

TD 2 - Terminale Spécialité
Espace - Produit scalaire

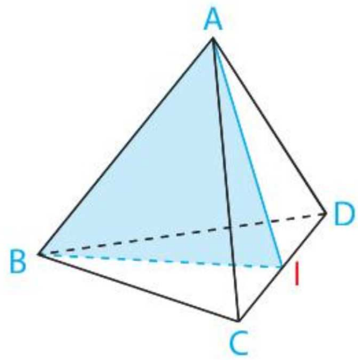
Les exercices suivants dont l'intitulé est suivi du symbole (c) sont corrigés intégralement en fin du présent TD. Les autres présentent des éléments de réponses et un lien vers une correction détaillée sur www.math93.com

Première partie

Orthogonalité dans l'espace

Exercice 1. Démontrer une orthogonalité (c)

ABCD est un tétraèdre régulier, c'est à dire dont toutes les arêtes ont la même longueur. Le point I est le milieu de [CD].
Montrer que les droites (CD) et (AB) sont orthogonales.

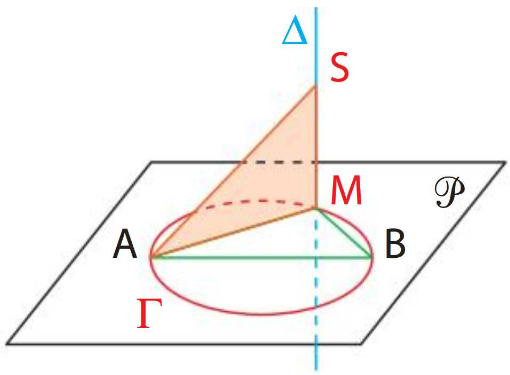


Exercice 2. Deux droites orthogonales (c)

ABCD est un tétraèdre tel que les triangles ABC et ABD soient rectangles en A.
Montrer que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

Exercice 3. Droite orthogonale à un plan (c)

Le plan $\mathcal{P}$ contient un cercle Γ de diamètre [AB].
Soit M un point de Γ autre que A et B et (Δ) la droite passant par le point M et orthogonale au plan $\mathcal{P}$.
Soit S un point de la droite (Δ) autre que M.
Montrer que la droite (BM) est orthogonale au plan (AMS).



Deuxième partie

Espace et produit scalaire

Exercice 4. Calculer un produit scalaire pour calculer des angles (c)

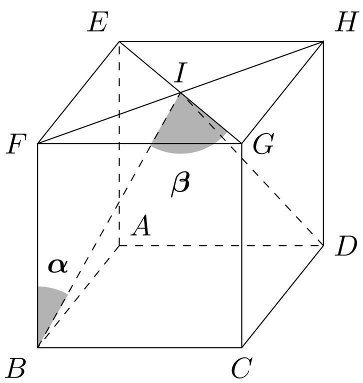
Méthode

Méthode 1 : Comment calculer la mesure d'un angle ?
Pour calculer un angle géométrique formé par deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on exprime $\vec{u} \cdot \vec{v}$ de deux façons différentes : l'une permettant d'obtenir la valeur du produit scalaire, l'autre faisant intervenir le cosinus de l'angle.

On se place dans un repère orthonormé et on considère les points $A\,(1\ ;\ -1\ ;\ 0)$, $B\,(-1\ ;\ -2\ ;\ -1)$ et $C\,(3\ ;\ -1\ ;\ 1)$.

1. Calculer le produit scalaire : $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}$
2. Calculer AB et AC.
3. En déduire une valeur approchée à l'unité de $\widehat{BAC}$.

Exercice 5. Calculer la mesure d'un angle (c)



Soit $ABCDEFGH$, un cube de côté 1 et I le centre de la face $EFGH$.

On se place dans le repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AD}\,,\overrightarrow{AE}\,)$.
Déterminer, au degré près, les mesures des angles :

1. $\alpha = \widehat{IBF}$
2. $\beta = \widehat{BID}$

Exercice 6. Droites orthogonales (c)

Dans un repère orthonormé, soient (d_1) et (d_2) deux droites de représentations paramétriques :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+t \\ y & = & 2+2t \\ z & = & -5-7t \end{array}\right. ,\quad t\in\mathbb{R} \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 5-t' \\ y & = & -1+4t' \\ z & = & t' \end{array}\right. ,\quad t'\in\mathbb{R}$$

Démontrer que les droites (d_1) et (d_2) sont orthogonales.
Les droites (d_1) et (d_2) sont-elles perpendiculaires ?

Exercice 7. Application des propriétés du produit scalaire (c)

On se place dans le cube $ABCDEFGH$ de côté 1 comme décrit dans l'exercice 5 page 2.

1. Démontrer que $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{FB}^2 - \dfrac{1}{4}\overrightarrow{HF}^2$.
2. En déduire que $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{ID} = 1 - \dfrac{1}{4} \times 2 = \dfrac{1}{2}$.

Troisième partie

Plans et équations

Exercice 8. Équation cartésienne d'un plan (c)

1. Dans un repère orthonormé de l'espace, déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par le point $A\,(-2\ ;\ 0\ ;\ 5)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-6\\4\end{pmatrix}$.

2. Le point D$(3\ ;\ -6\ ;\ 1)$ appartient-il au plan $\mathcal{P}$?

3. La droite (d) dont une équation paramétrique est donnée ci-dessous est-elle orthogonale au plan $\mathcal{P}$?

$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & 1-t \\ y & = & 2+3t \\ z & = & -5-2t \end{array}\right. \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

Exercice 9. Déterminer l'intersection d'une droite et d'un plan (c)

Dans un repère orthonormé du plan, on considère la droite (AB) où $A\,(1\ ;\ 2\ ;\ -1)$ et $B\,(0\ ;\ 1\ ;\ 3)$ et le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x+y+z-1=0$.
Déterminer le point d'intersection de la droite (AB) et du plan $\mathcal{P}$.

Exercice 10. Déterminer la droite d'intersection de deux plans (c)

Méthode

Pour déterminer la droite d'intersection de deux plans sécants dont on connait les équations cartésiennes, on peut transformer le système composé des deux équations cartésiennes des plans en exprimant deux des inconnues x, y, z en fonction de la 3e que l'on prend ensuite comme paramètre t.

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{R})$ d'équations respectives :

$$(\mathcal{P})\ :\ x-3y+2z=5 \quad \text{et} \quad (\mathcal{R})\ :\ 2x+y+7z=1$$

1. Montrer que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ sont sécants.

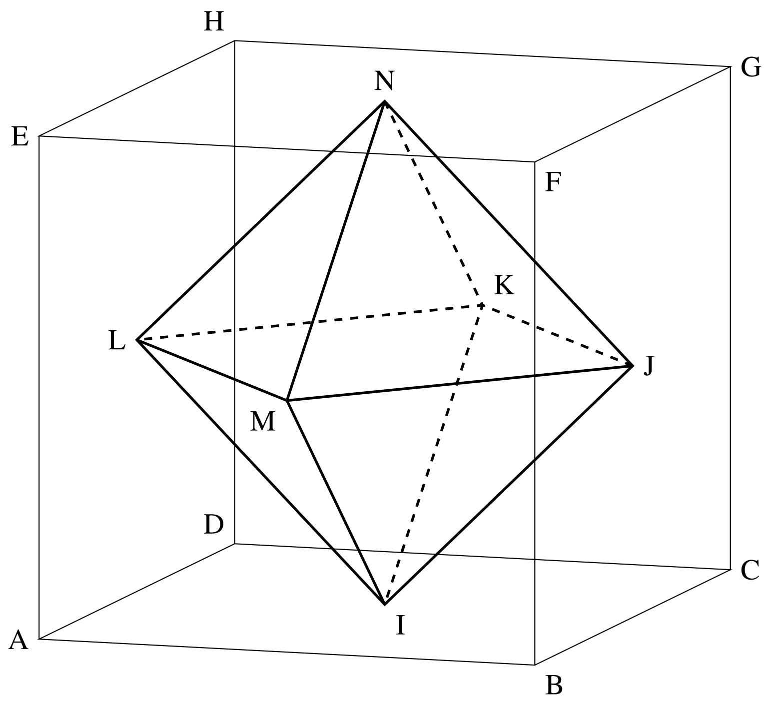
2. Déterminer une équation paramétrique de leur droite d'intersection.

Quatrième partie

Exercices Bilans (d'après BAC)

Exercice 11. Dans un cube

On relie les centres de chaque face d'un cube ABCDEFGH pour former un solide IJKLMN comme cette figure.



Plus précisément, les points I, J, K, L, M et N sont les centres respectifs des faces carrées ABCD, BCGF, CDHG, ADHE, ABFE et EFGH (donc les milieux des diagonales de ces carrés).

1. Sans utiliser de repère (et donc de coordonnées) dans le raisonnement mené, justifier que les droites (IN) et (ML) sont orthogonales.

Dans la suite, on considère le repère orthonormé $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD}\ ;\ \overrightarrow{AE}\right)$ dans lequel, par exemple, le point N a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ 1\right)$.

2. **2. a.** Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{NC}$ et $\overrightarrow{ML}$.
   2. b. En déduire que les droites (NC) et (ML) sont orthogonales.
   2. c. Déduire des questions précédentes une équation cartésienne du plan (NCI).
3. **3. a.** Montrer qu'une équation cartésienne du plan (NJM) est : $x - y + z = 1$.
   3. b. La droite (DF) est-elle perpendiculaire au plan (NJM) ? Justifier.
   3. c. Montrer que l'intersection des plans (NJM) et (NCI) est une droite dont on donnera un point et un vecteur directeur. Nommer la droite ainsi obtenue en utilisant deux points de la figure.

Réponses

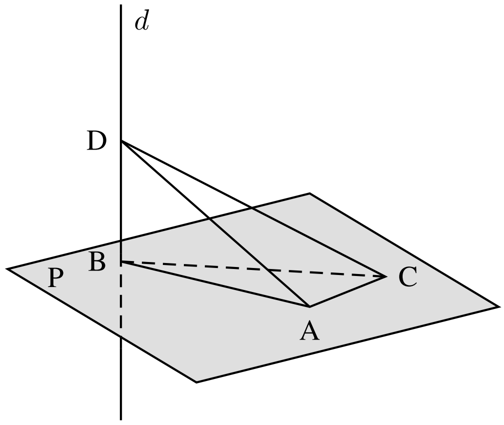
Le corrigé complet sur www.math93.com

Exercice 12. Liban 2019

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

Dans un plan P, on considère un triangle ABC rectangle en A.
Soit d la droite orthogonale au plan P et passant par le point B. On considère un point D de cette droite distinct du point B.



1. Montrer que la droite (AC) est orthogonale au plan (BAD).

On appelle bicoin un tétraèdre dont les quatre faces sont des triangles rectangles.

2. Montrer que le tétraèdre ABCD est un bicoin.

3. **3. a.** Justifier que l'arête [CD] est la plus longue arête du bicoin ABCD.

3. b. On note I le milieu de l'arête [CD]. Montrer que le point I est équidistant des 4 sommets du bicoin ABCD.

Partie B

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le point A$(3\ ;\ 1\ ;\ -5)$ et la droite d de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcr} x & = & 2t+1 \\ y & = & -2t+9 \\ z & = & t-3 \end{array}\right.$ où $t \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer une équation cartésienne du plan P orthogonal à la droite d et passant par le point A.

2. Montrer que le point d'intersection du plan P et de la droite d est le point B$(5\ ;\ 5\ ;\ -1)$,

3. Justifier que le point C$(7\ ;\ 3\ ;\ -9)$ appartient au plan P puis montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle isocèle en A.

4. Soit t un réel différent de 2 et M le point de paramètre t appartenant à la droite d.

4. a. Justifier que le triangle ABM est rectangle.

4. b. Montrer que le triangle ABM est isocèle en B si et seulement si le réel t vérifie l'équation $t^2 - 4t = 0$.

4. c. En déduire les coordonnées des points M_1 et M_2 de la droite d tels que les triangles rectangles ABM_1 et ABM_2 soient isocèles en B.

Partie C

On donne le point D$(9; 1; 1)$ qui est un des deux points solutions de la question **4. c.** de la partie B. Les quatre sommets du tétraèdre ABCD sont situés sur une sphère.
En utilisant les résultats des questions des parties A et B précédentes, déterminer les coordonnées du centre de cette sphère et calculer son rayon.

Réponses

Le corrigé complet sur www.math93.com

Exercice 13. Avec un volume (Polynésie 2019) (c)

Sur la figure donnée en **annexe 2 à rendre avec la copie**, on considère le cube ABCDEFGH de côté 6 cm dans le repère orthonormé $\left(\text{A}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, l'unité étant le cm.
On admet que le point I a pour coordonnées $(6\,;0\,;3)$ dans ce repère.
On appelle L le milieu du segment [FG].
On appelle P le plan défini par les trois points E, I et L.
On rappelle que le volume du tétraèdre est donné par la formule $V = \dfrac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$.

1.

1. a. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan P.

1. b. Déterminer une équation cartésienne du plan P.

2. Justifier que le volume du tétraèdre FELI est 9 cm^3.

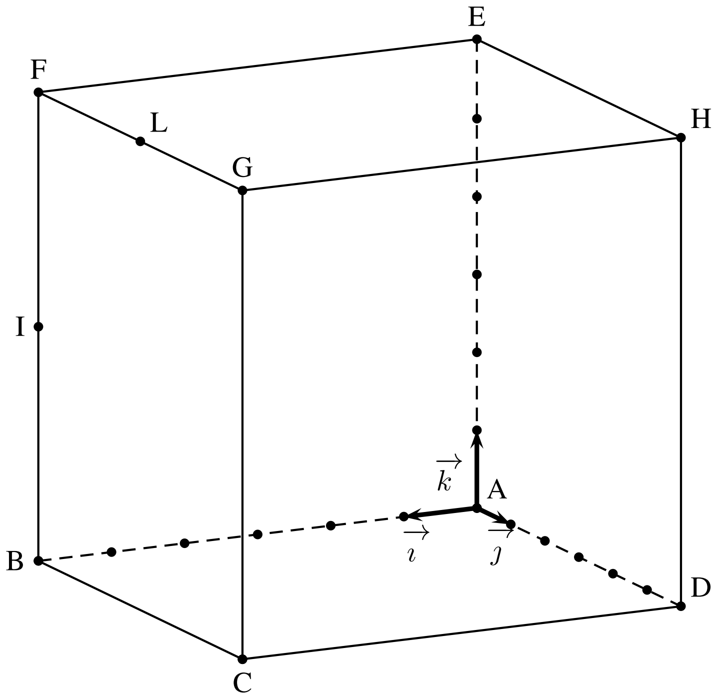
3. 3. a. Soit Δ la perpendiculaire au plan P passant par le point F. Justifier que la droite Δ admet pour représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& t+6\\ y &=& -2t\\ z &=& 2t+6\end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$.

3. b. Montrer que l'intersection de la droite Δ et du plan P est le point $\text{K}\left(\frac{16}{3}\,;\,\frac{4}{3}\,;\,\frac{14}{3}\right)$.

4. Calculer l'aire en cm^2 du triangle ELI.

5. Tracer sur le graphique fourni en **annexe à rendre avec la copie**, la section du cube ABCDEFGH par le plan parallèle au plan P passant par le point G et en donner la nature précise sans justification.

À rendre avec la copie



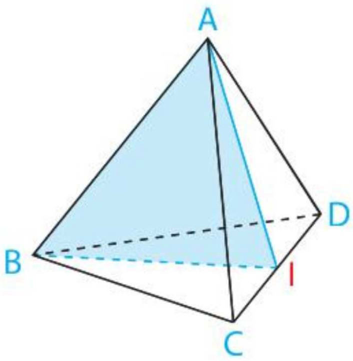
↫ **Fin du TD** ↬

Cinquième partie
CORRECTIONS

Correction de la partie I : Orthogonalité dans l'espace

Correction de l'exercice 1 page 1

ABCD est un tétraèdre régulier, c'est à dire dont toutes les arêtes ont la même longueur. Le point I est le milieu de [CD].
Montrer que les droites (CD) et (AB) sont orthogonales.



Nous allons démontrer que la droite (CD) est orthogonale au plan (ABI).

Solution 1

- Dans le triangle équilatéral ADC, la médiane (AI) est aussi la hauteur issue de A d'où (CD) $\perp$ (AI).
- De même dans le triangle équilatéral BCD, (CD) $\perp$ (BI).
- (CD) est orthogonale à (AI) et (BI) deux droites sécantes du plan (ABI) d'où (CD) est orthogonale au plan (ABI).

Par suite, (CD) est orthogonale à toutes les droites de ce plan, en particulier (CD) est orthogonale à (AB).

Solution 2 (avec un plan médiateur)

AC = AD, BC = BD et IC = ID. Donc A, B, I appartiennent au plan médiateur du segment [CD]. Or A, B, I ne sont pas alignés donc ils définissent un plan. Le plan (ABI) est donc le plan médiateur de [CD]. Donc (CD) est orthogonale au plan (ABI) et par suite à toute droite de ce plan, en particulier à (AB).

MÉTHODE

Pour démontrer que deux droites sont orthogonales, on peut démontrer que l'une est orthogonale à un plan contenant l'autre :
- en montrant qu'elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan ;
- en montrant que le plan est le plan médiateur d'un segment porté par la droite.

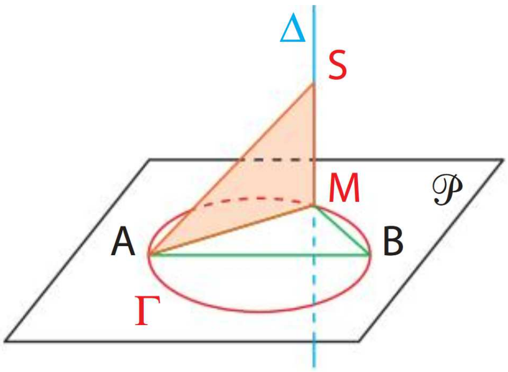
Correction de l'exercice 2 page 1

ABCD est un tétraèdre tel que les triangles ABC et ABD soient rectangles en A. Montrer que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

ABC et ABD sont rectangles en A donc (AB) est orthogonale à (AC) et (AD) deux droites sécantes du plan (ACD), d'où (AB) est orthogonale à ce plan donc à toutes les droites de ce plan en particulier à (CD).

Correction de l'exercice 3 page 1

Le plan $\mathcal{P}$ contient un cercle Γ de diamètre [AB]. Soit M un point de Γ autre que A et B et (Δ) la droite passant par le point M et orthogonale au plan $\mathcal{P}$. Soit S un point de la droite (Δ) autre que M. Montrer que la droite (BM) est orthogonale au plan (AMS).



- Le point M appartient au cercle Γ de diamètre [AB], en étant distinct des points A et B donc $(BM) \perp (AM)$.
- La droite (Δ) est orthogonale au plan $\mathcal{P}$ donc elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan, en particulier à la droite (BM).
- La droite (BM) est donc orthogonale à deux droites sécantes (AM) et (Δ) du plan (AMS), donc la droite (BM) est orthogonale au plan (AMS).

Correction de la partie II : espace et produit scalaire

Correction de l'exercice 4 page 2

On se place dans un repère orthonormé et on considère les points $A\,(1\,;\,-1\,;\,0)$, $B\,(-1\,;\,-2\,;\,-1)$ et $C\,(3\,;\,-1\,;\,1)$.

1. **Calculer le produit scalaire : $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}$.**

$$\begin{cases} A\,(1\,;\,-1\,;\,0) \\ B\,(-1\,;\,-2\,;\,-1) \\ C\,(3\,;\,-1\,;\,1) \end{cases} \Longrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\-1\\-1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$$

Donc

$$\boxed{\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = -4+0-1=-5}$$

2. **Calculer AB et AC.**
On est dans un repère orthonormé donc en unités de longueurs on a :

$$\boxed{AB=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}} \text{ et } \boxed{AC=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}}$$

3. **En déduire une valeur approchée à l'unité de $\widehat{BAC}$.**

$$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos\left(\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{AC}\right)=\sqrt{5}\times\sqrt{6}\times\cos\widehat{BAC}$$

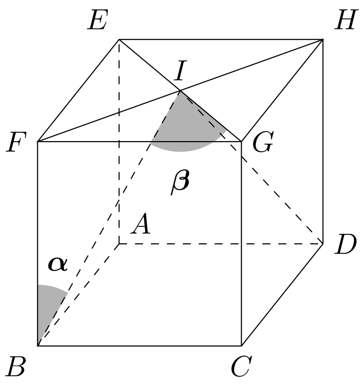
Par ailleurs

$$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}=-5$$

Donc

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}=\sqrt{5}\times\sqrt{6}\times\cos\widehat{BAC}\\ \overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}=-5\end{cases} \Longrightarrow \cos\widehat{BAC}=-\sqrt{\frac{5}{6}} \Longrightarrow \boxed{\widehat{BAC}\approx 156°}$$

Correction de l'exercice 5 page 2



Soit $ABCDEFGH$, un cube de côté 1 et I le centre de la face $EFGH$.

Dans le repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AD}\,,\overrightarrow{AE}\,)$ on obtient :

$$\begin{cases} B\,(1\,;\,0\,;\,0) \\ I\left(\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,1\right) \\ F\,(1\,;\,0\,;\,1) \end{cases} \Longrightarrow \overrightarrow{BI}\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BF}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.

- D'une part

$$\begin{cases} BI = \dfrac{\sqrt{6}}{2} \quad \text{et} \quad BF = 1 \\ \overrightarrow{BI}\,.\,\overrightarrow{BF} = BI \times BF \times \cos\alpha \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\overrightarrow{BI}\,.\,\overrightarrow{BF} = \dfrac{\sqrt{6}}{2} \times \cos\alpha}$$

- Par ailleurs

$$\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BF}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \boxed{\overrightarrow{BI}\,.\,\overrightarrow{BF} = 1}$$

- De ce fait

$$\begin{cases} \overrightarrow{BI}\,.\,\overrightarrow{BF} = \dfrac{\sqrt{6}}{2} \times \cos\alpha \\ \overrightarrow{BI}\,.\,\overrightarrow{BF} = 1 \end{cases} \Longrightarrow \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{6}}{3} \Longrightarrow \boxed{\alpha \approx 35°}$$

2. Dans le repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AD}\,,\overrightarrow{AE}\,)$ on obtient :

$$\begin{cases} B\,(1\,;\,0\,;\,0) \\ I\left(\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,1\right) \\ D\,(0\,;\,1\,;\,0) \end{cases} \Longrightarrow \overrightarrow{IB}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{ID}\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

- D'une part

$$\begin{cases} IB = \dfrac{\sqrt{6}}{2} = ID \\ \\ \overrightarrow{IB}\,.\,\overrightarrow{ID} = IB \times ID \times \cos\beta \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\overrightarrow{IB}\,.\,\overrightarrow{ID} = \dfrac{3}{2} \times \cos\beta}$$

- Par ailleurs

$$\overrightarrow{IB}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{ID}\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \boxed{\overrightarrow{IB}\,.\,\overrightarrow{ID} = \dfrac{1}{2}}$$

- De ce fait

$$\begin{cases} \overrightarrow{IB}\,.\,\overrightarrow{ID} = \dfrac{3}{2} \times \cos\beta \\ \overrightarrow{IB}\,.\,\overrightarrow{ID} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Longrightarrow \cos\beta = \dfrac{1}{3} \Longrightarrow \boxed{\beta \approx 71°}$$

Correction de l'exercice 6 page 2

Dans un repère orthonormé, soient (d_1) et (d_2) deux droites de représentations paramétriques :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1+t \\ y & = & 2+2t \\ z & = & -5-7t \end{array}\right. , \quad t \in \mathbb{R} \text{ et } \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 5-t' \\ y & = & -1+4t' \\ z & = & t' \end{array}\right. , \quad t' \in \mathbb{R}$$

Démontrer que les droites (d_1) et (d_2) sont orthogonales. Les droites (d_1) et (d_2) sont-elles perpendiculaires ?

- On montre que deux vecteurs directeurs de (d_1) et (d_2) sont orthogonaux en calculant leur produit scalaire. De ce fait les droites (d_1) et (d_2) sont orthogonales.

$$\overrightarrow{v_1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v_2}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \overrightarrow{v_1} \,.\, \overrightarrow{v_2} = -1+8-7=0 \Longrightarrow \boxed{\overrightarrow{v_1} \perp \overrightarrow{v_2}}$$

- On cherche si les droites ont un point commun en résolvant le système , pour t et t' réels :

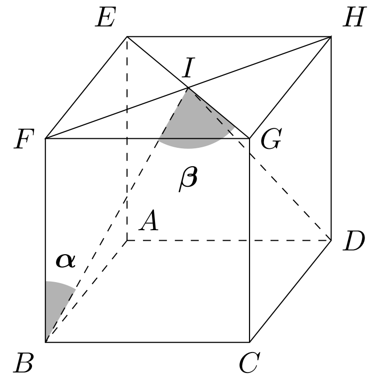
$$\left\{\begin{array}{rcl} 5-t' & = & 1+t \\ -1+4t' & = & 2+2t \\ t' & = & -5-7t \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} t' & = & \dfrac{11}{6} \\ t & = & \dfrac{13}{6} \\ t & = & -\dfrac{41}{42} \end{array}\right. \Longrightarrow \text{impossible}$$

  Le système n'admet pas de solution.

  Donc les droites (d_1) et (d_2) ne sont pas sécantes, elles sont orthogonales mais pas perpendiculaires.

Correction de l'exercice 7 page 2

On se place dans le cube $ABCDEFGH$.



1. **Démontrer que $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{FB}^2 - \dfrac{1}{4}\overrightarrow{HF}^2$.**

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{ID} &= \left(\overrightarrow{IF} + \overrightarrow{FB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{IH} + \overrightarrow{HD}\right) \quad \text{(par Chasles)}\\ &= \overrightarrow{IF} \cdot \overrightarrow{IH} + \overrightarrow{IF} \cdot \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{FB} \cdot \overrightarrow{IH} + \overrightarrow{FB} \cdot \overrightarrow{HD}\end{aligned}$$

Or

- $\overrightarrow{IF} \cdot \overrightarrow{IH} = -IF^2$ car I milieu de [FH] ;
- $\overrightarrow{IF} \cdot \overrightarrow{HD} = 0$ car (HD) perpendiculaire au plan (FGH) donc à toute droite de ce plan, en particulier à la droite (IF) ;
- $\overrightarrow{FB} \cdot \overrightarrow{IH} = 0$ car (FB) perpendiculaire au plan (FGH) donc à toute droite de ce plan, en particulier à la droite (IH) :
- $\overrightarrow{FB} \cdot \overrightarrow{HD} = FB^2$ car ABCDEFGH est un cube donc $\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{HD}$.

De ce fait :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{ID} &= \overrightarrow{IF} \cdot \overrightarrow{IH} + \overrightarrow{IF} \cdot \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{FB} \cdot \overrightarrow{IH} + \overrightarrow{FB} \cdot \overrightarrow{HD}\\ &= -IF^2 + 0 + 0 + FB^2\\ &= -\left(\overrightarrow{IH} + \overrightarrow{HF}\right)^2 + FB^2\\ &= -\overrightarrow{IH}^2 - \overrightarrow{HF}^2 - 2\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{HF} + \overrightarrow{FB}^2\end{aligned}$$

Or I milieu de [HF] donc $\overrightarrow{IH} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{HF}$

$$\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{ID} = -\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{HF}\right)^2 - \overrightarrow{HF}^2 - 2\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{HF}\right) \cdot \overrightarrow{HF} + \overrightarrow{FB}^2$$

Soit

$$\boxed{\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{FB}^2 - \frac{1}{4}\overrightarrow{HF}^2}$$

2. **En déduire que $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{ID} = 1 - \dfrac{1}{4} \times 2 = \dfrac{1}{2}$.**

On a montré que $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{FB}^2 - \dfrac{1}{4}\overrightarrow{HF}^2$ or ABCDEFGH est un cube de côté 1 donc :

$$\begin{cases} FB = 1 \\ FH = \sqrt{2} \end{cases} \implies \boxed{\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{ID} = 1 - \frac{1}{4} \times \left(\sqrt{2}\right)^2 = \frac{1}{2}}$$

Correction de la partie III : Plans et équations

Correction de l'exercice 8 page 3 : Équation cartésienne d'un plan

1. Dans un repère orthonormé de l'espace, déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par le point $A\,(-2\,;\,0\,;\,5)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-6\\4\end{pmatrix}$.

Propriété 1

Soit vecteur $\vec{u}$ non nul et un point A de l'espace. L'unique plan $\mathscr{P}$ passant par A et de vecteur normal $\vec{u}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}\,.\,\vec{u}=0$.
Dans un repère de l'espace, son équation est alors de la forme :

$$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\\z-z_A\end{pmatrix}\,.\,\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0 \iff a\,(x-x_A)+b\,(y-y_A)+c\,(z-z_A)=0$$

Donc d'après la propriété 1 :

$$M(x\,;\,y\,;\,z)\in\mathcal{P}\iff\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+2\\y-0\\z-5\end{pmatrix}\,.\,\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-6\\4\end{pmatrix}=0$$
$$M(x\,;\,y\,;\,z)\in\mathcal{P}\iff 2(x+2)-6y+4(z-5)=0$$
$$M(x\,;\,y\,;\,z)\in\mathcal{P}\iff 2x-6y+4z+4-20=0$$

$$\boxed{\mathcal{P}\;:\;2x-6y+4z-16=0}\text{ ou }\boxed{\mathcal{P}\;:\;x-3y+2z-8=0}$$

2. Le point D$(3\,;\,-6\,;\,1)$ appartient-il au plan $\mathcal{P}$?
Le point D$(3\,;\,-6\,;\,1)$ appartient au plan $\mathcal{P}$ si ses coordonnées vérifient l'équation du plan.

$$x_D-3y_D+2z_D-8=15\neq 0$$

Donc le point <u>D n'appartient pas au plan $\mathcal{P}$</u>.

3. La droite (d) dont une équation paramétrique est donnée ci-dessous est-elle orthogonale au plan $\mathcal{P}$?

$$\begin{cases}x&=&1-t\\y&=&2+3t\\z&=&-5-2t\end{cases},\quad t\in\mathbb{R}$$

Un vecteur directeur de la droite (d) est $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\3\\-2\end{pmatrix}$. Or ce vecteur est colinéaire au vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-6\\4\end{pmatrix}$ qui est normal au plan $\mathcal{P}$.

$$\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\3\\-2\end{pmatrix}\text{ et }\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-6\\4\end{pmatrix}\Longrightarrow\vec{n}=-2\vec{v}$$

Donc la droite (d) est orthogonale au plan $\mathcal{P}$.

Correction de l'exercice 9 page 3 : intersection d'une droite et d'un plan

Dans un repère orthonormé du plan, on considère la droite (AB) où $A\,(1\ ;\ 2\ ;\ -1)$ et $B\,(0\ ;\ 1\ ;\ 3)$ et le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + y + z - 1 = 0$. Déterminer le point d'intersection de la droite (AB) et du plan $\mathcal{P}$.

- On détermine une équation paramétrique de la droite (AB).

$$\begin{cases} A\,(1\ ;\ 2\ ;\ -1) \\ B\,(0\ ;\ 1\ ;\ 3) \end{cases} \Longrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Et donc

$$M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (AB) \iff \overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}\quad, t \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + 4t \end{cases}\quad, t \in \mathbb{R}$$

- Or $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ appartient au plan $\mathcal{P}$ si et seulement si $x + y + z - 1 = 0$. On cherche donc un réel t tel que :

$$\begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ x = 1 - t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + 4t \end{cases} \Longrightarrow (1 - t) + (2 - t) + (-1 + 4t) - 1 = 0 \iff t = -\frac{1}{2}$$

- La droite (AB) est donc sécante au plan au point M de coordonnées :

$$\begin{cases} x = 1 - t = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2} \\ y = 2 - t = 2 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2} \\ z = -1 + 4t = -1 - 4 \times \dfrac{1}{2} = -3 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{M\left(\frac{3}{2}\ ;\ \frac{5}{2}\ ;\ -3\right)}$$

Correction de l'exercice 10 page 3 : intersection de plans

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{R})$ d'équations respectives :

$$(\mathcal{P})\ :\ x - 3y + 2z = 5 \quad \text{et} \quad (\mathcal{R})\ :\ 2x + y + 7z = 1$$

1. **Montrer que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ sont sécants**.

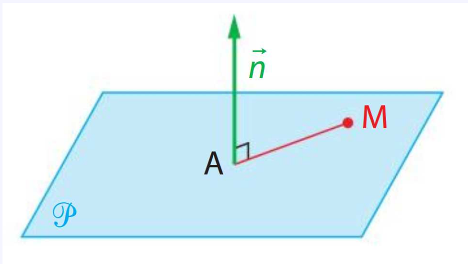
- On sait que deux plans de l'espace soit, soit sécants selon une droite, soit parallèles (strictement ou confondus).
- On applique alors la propriété du cours

Propriété 2 (Équation cartésienne d'un plan)

Dans un repère orthonormé de l'espace :

1. a. l'ensemble des points $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ tels que : $ax + by + cz + d = 0$, avec $(a\ ,\ b\ ,\ c) \neq (0\ ,\ 0\ ,\ 0)$ est un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$;

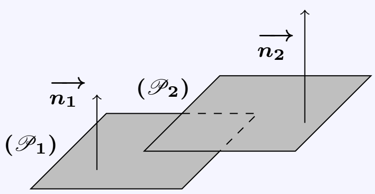
1. b. tout plan admet une équation (dite **cartésienne**) de la forme $ax + by + cz + d = 0$, avec $(a\ ,\ b\ ,\ c) \neq (0\ ,\ 0\ ,\ 0)$.



- **On détermine les vecteurs normaux aux plans**
  - $(\mathcal{P})$ d'équation $x - 3y + 2z = 5$, donc $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $(\mathcal{P})$.
  - $(\mathcal{R})$ d'équation $2x + y + 7z = 1$, donc $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $(\mathcal{P})$.
- Les vecteurs normaux $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires puisque par exemples $\dfrac{2}{1} \neq \dfrac{1}{-3}$, donc les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{R})$ ne sont pas parallèles. Ils sont donc sécants selon une droite (d).

Propriété 3 (Parallélisme de plans)

Deux plans sont parallèles si et seulement un vecteur normal de l'un est colinéaire à un vecteur normal de l'autre.



2. Déterminer une équation paramétrique de leur droite d'intersection.
L'idée est de passer une des variables x, y ou z en paramètre, faisons ici le choix de poser $z = t$ par exemple.

$$M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (d) = (\mathcal{P}) \cap (\mathcal{R}) \iff \begin{cases} x - 3y + 2z = 5 \\ 2x + y + 7z = 1 \\ z = t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - 3y + 2t = 5 \\ 2x + y + 7t = 1 \\ z = t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 3y - 2t + 5 \\ 2(3y - 2t + 5) + y + 7t = 1 \\ z = t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 3y - 2t + 5 \\ 7y + 3t = 9 \\ z = t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 3y - 2t + 5 \\ y = -\frac{9}{7} - \frac{3}{7}t \\ z = t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 3\left(-\frac{9}{7} - \frac{3}{7}t\right) - 2z + 5 \\ y = -\frac{9}{7} - \frac{3}{7}t \\ z = t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{8}{7} - \frac{23}{7}t \\ y = -\frac{9}{7} - \frac{3}{7}t \\ z = t \end{cases}$$

$$M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (d) = (\mathcal{P}) \cap (\mathcal{R}) \iff \begin{cases} x = \frac{8}{7} - \frac{23}{7}t \\ y = -\frac{9}{7} - \frac{3}{7}t \\ z = t \end{cases}$$

Donc la droite (d) admet pour équation paramétrique (il n'y a pas unicité) :

$$\boxed{(d)\ :\ \begin{cases} x = \frac{8}{7} - \frac{23}{7}t \\ y = -\frac{9}{7} - \frac{3}{7}t \\ z = t \end{cases} \quad ,\ t \in \mathbb{R}}$$

On rappelle que :

Propriété 4 (Représentation paramétrique d'une droite de l'espace)

Soit un repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ de l'espace.

La droite (d) passant par le point $A\left(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A\right)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est l'ensemble des point $M\left(x\ ;\ y\ ;\ z\right)$ tels que :

$$\boxed{\begin{cases} x = x_A + a\,t \\ y = y_A + b\,t \\ z = z_A + c\,t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}}$$

Ce système d'équations est appelé **une représentation paramétrique de la droite (d)**.

La droite (d) est donc la droite passant par le point $A\left(\dfrac{8}{7}\ ;\ -\dfrac{9}{7}\ ;\ 0\right)$ et de vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix} -\dfrac{23}{7} \\ -\dfrac{3}{7} \\ 1 \end{pmatrix}$, ou $\vec{v'}\begin{pmatrix} -23 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$, ou $\vec{v''}\begin{pmatrix} 23 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}$. On a donc comme autres équations paramétriques de la droite (d) :

$$\boxed{(d)\quad : \quad \begin{cases} x = \dfrac{8}{7} - 23t' \\ y = -\dfrac{9}{7} - 3t' \\ z = 7t' \end{cases} \quad , \quad t' \in \mathbb{R}} \text{ ou } \boxed{(d)\quad : \quad \begin{cases} x = \dfrac{8}{7} + 23t'' \\ y = -\dfrac{9}{7} + 3t'' \\ z = -7t'' \end{cases} \quad , \quad t'' \in \mathbb{R}}$$

Correction de l'exercice 13 page 6

1.

1. a. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\ \mathbf{-2}\\ \mathbf{2}\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan P.

- On a $\overrightarrow{\mathrm{EI}}\begin{pmatrix}6\\0\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{EL}}\begin{pmatrix}6\\3\\0\end{pmatrix}$; ces deux vecteurs du plan P ne sont pas colinéaires et on a :
- $\overrightarrow{\mathrm{EI}}\cdot\overrightarrow{n} = 6+0-6=0$ et $\overrightarrow{\mathrm{EL}}\cdot\overrightarrow{n} = 6-6+0=0$.
- Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan P, il est donc normal à ce plan.

1. b. Déterminer une équation cartésienne du plan P.

D'après le résultat précédent :

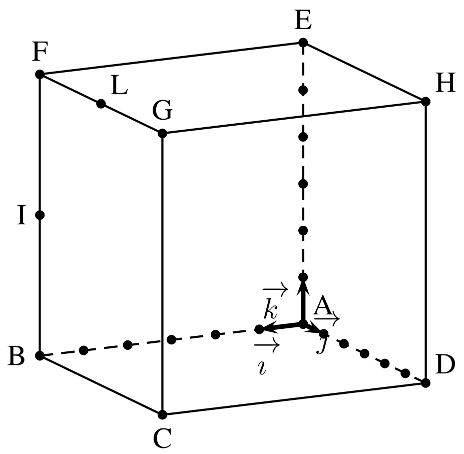
$M(x\ ;\ y\ ;\ z)\in P \iff 1x-2y+2z=d$, avec $d\in\mathbb{R}$.

Or E$(0\ ;\ 0\ ;\ 6)\in(P) \iff 12=d$.

Conclusion : une équation cartésienne du plan P est :

$$\boxed{M(x\ ;\ y\ ;\ z)\in P \iff x-2y+2z=12}$$

2. Justifier que le volume du tétraèdre FELI est 9 cm³.



Le triangle EFI est clairement rectangle en F, avec EF = 6 et FI = 3.

L'aire du triangle EFI est donc égale à :

$$\frac{EF\times FI}{2}=\frac{6\times 3}{2}=9\ \text{cm}^2.$$

Comme FL = 3, le volume du tétraèdre FELI est donc égale à :

$$\boxed{V=\frac{9\times 3}{3}=9\ \text{cm}^3}$$

3.

3. a. Soit Δ la perpendiculaire au plan P passant par le point F. Justifier que la droite Δ admet pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = t+6 \\ y = -2t \\ z = 2t+6 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

On a vu que le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan P ; c'est donc un vecteur directeur de la droite Δ qui contient F.

Tout point $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in \Delta \iff \overrightarrow{\text{F}M} = t\overrightarrow{n}$ qui se traduit par le système :

$$\begin{cases} x-6 = 1t \\ y-0 = -2t \\ z-6 = 2t \end{cases} \iff \begin{cases} x = t+6 \\ y = -2t \\ z = 2t+6 \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

3. b. Montrer que l'intersection de la droite Δ et du plan P est le point K$\left(\frac{16}{3}\ ;\ \frac{4}{3}\ ;\ \frac{14}{3}\right)$.

Un point $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ est commun à la droite Δ et au plan P si set seulement si ses coordonnées vérifient le système :

$$\begin{cases} x = t+6 \\ y = -2t \\ z = 2t+6 \\ x-2y-2z = 12 \end{cases}$$

En remplaçant s, y et z dans la dernière équation :

$$\begin{aligned} t+6-2(-2t)+2(2t+6) = 12 &\iff t+6+4t+4t+12 = 12 \\ &\iff 9t = -6 \\ &\iff t = -\frac{6}{9} = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{cases} x = t+6 = -\dfrac{2}{3}+6 = \dfrac{-2+18}{3} = \dfrac{16}{3} \\ y = -2\times\left(-\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{4}{3} \\ z = 6+2\times\left(-\dfrac{2}{3}\right) = 6-\dfrac{4}{3} = \dfrac{14}{3} \end{cases}$$

Donc $\boxed{K\left(\frac{16}{3}\ ;\ \frac{4}{3}\ ;\ \frac{14}{3}\right)}$.

4. Calculer l'aire en cm^2 du triangle ELI.

Le tétraèdre FELI vu à la question **2.** de base le triangle ELI a pour hauteur [FK].

Donc

$$V(\text{FELI}) = \frac{\mathcal{A}(\text{ELI})\times\text{FK}}{3}$$

Or

- $V(\text{FELI}) = 9\ \text{cm}^3$
- et $\text{FK}^2 = \left(\frac{16}{3}-6\right)^2+\left(\frac{4}{3}-0\right)^2+\left(\frac{14}{3}-6\right)^2 = \frac{4}{9}+\frac{16}{9}+\frac{16}{9} = \frac{36}{9} = 4$
  d'où $\text{FK} = 2$.
- On a donc $9 = \dfrac{\mathcal{A}(\text{ELI})\times 2}{3}$, d'où

$$\boxed{\mathcal{A}(\text{ELI}) = \frac{27}{2} = 13,5\ \ \text{cm}^3}$$

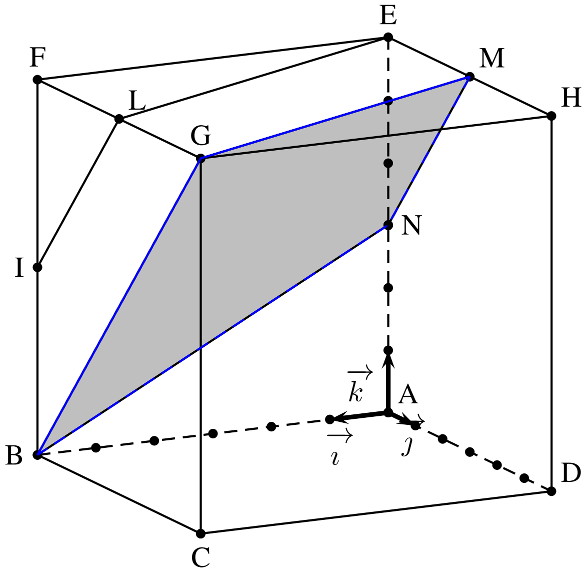
5. **Tracer sur le graphique fourni en annexe 2 à rendre avec la copie, la section du cube ABCDEFGH par le plan parallèle au plan P passant par le point G et en donner la nature précise sans justification.**

   I et L étant les milieux respectifs de [FB] et [FG] la droite (BG) est parallèle à la droite (IL).

   M étant le milieu de [EH] la droite (GM) est parallèle à la droite (LE).

   N étant le milieu de [EA] la droite (MN) est parallèle à la droite (LI).

   La section est donc le quadrilatère (BGMN) et (MN) étant parallèle à (BG) ce quadrilatère est un trapèze.



↫ **Fin du TD** ↬