



Math93.com

## TD 2 - Terminale Spécialité

### Probabilités conditionnelles et loi binomiale

Les exercices suivants dont l'intitulé est suivi du symbole (c) sont corrigés intégralement en fin du présent TD, les autres le sont sur [www.math93.com](http://www.math93.com)

#### Première partie

### Probabilités conditionnelles et loi binomiale

#### Exercice 1. Sujet 0 2021

Pour préparer l'examen du permis de conduire, on distingue deux types de formation :

- la formation avec *conduite accompagnée* ;
- la formation *traditionnelle*.

On considère un groupe de 300 personnes venant de réussir l'examen du permis de conduire. Dans ce groupe :

- 75 personnes ont suivi une formation avec *conduite accompagnée* ; parmi elles, 50 ont réussi l'examen à leur première présentation et les autres ont réussi à leur deuxième présentation.
- 225 personnes se sont présentées à l'examen suite à une formation *traditionnelle* ; parmi elles, 100 ont réussi l'examen à la première présentation, 75 à la deuxième et 50 à la troisième présentation.

On interroge au hasard une personne du groupe considéré.

On considère les événements suivants :

$A$  : « la personne a suivi une formation avec *conduite accompagnée* » ;

$R_1$  : « la personne a réussi l'examen à la première présentation » ;

$R_2$  : « la personne a réussi l'examen à la deuxième présentation » ;

$R_3$  : « la personne a réussi l'examen à la troisième présentation ».

1. Modéliser la situation par un arbre pondéré.

*Dans les questions suivantes, les probabilités demandées seront données sous forme d'une fraction irréductible.*

2.

2. a. Calculer la probabilité que la personne interrogée ait suivi une formation avec *conduite accompagnée* et réussi l'examen à sa deuxième présentation.
2. b. Montrer que la probabilité que la personne interrogée ait réussi l'examen à sa deuxième présentation est égale à  $\frac{1}{3}$ .
2. c. La personne interrogée a réussi l'examen à sa deuxième présentation. Quelle est la probabilité qu'elle ait suivi une formation avec *conduite accompagnée* ?

3. On note  $X$  la variable aléatoire qui, à toute personne choisie au hasard dans le groupe, associe le nombre de fois où elle s'est présentée à l'examen jusqu'à sa réussite.

Ainsi,  $X = 1$  correspond à l'évènement  $R_1$ .

3. a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire  $X$ .
3. b. Calculer l'espérance de cette variable aléatoire. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

4. On choisit, successivement et de façon indépendante,  $n$  personnes parmi les 300 du groupe étudié, où  $n$  est un entier naturel non nul. On assimile ce choix à un tirage avec remise de  $n$  personnes parmi les 300 personnes du groupe.

On admet que la probabilité de l'évènement  $R_3$  est égale à  $\frac{1}{6}$ .

4. a. Dans le contexte de cette question, préciser un évènement dont la probabilité est égale à  $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$ .

On considère la fonction Python **seuil** ci-dessous, où  $p$  est un nombre réel appartenant à l'intervalle  $]0;1[$ .

```
def seuil(p) :
    n = 1
    while 1 - (5/6)**n <= p :
        n = n+1
    return n
```

4. b. Quelle est la valeur renvoyée par la commande **seuil**(0,9) ? Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

### Exercice 2. D'après Bac (c)

Le virus de la grippe atteint chaque année, en période hivernale, une partie de la population d'une ville. La vaccination contre la grippe est possible ; elle doit être renouvelée chaque année.

#### Partie A

L'efficacité du vaccin contre la grippe peut être diminuée en fonction des caractéristiques individuelles des personnes vaccinées, ou en raison du vaccin, qui n'est pas toujours totalement adapté aux souches du virus qui circulent. Il est donc possible de contracter la grippe tout en étant vacciné.

Une étude menée dans la population de la ville à l'issue de la période hivernale a permis de constater que :

- 40 % de la population est vaccinée ;
- 8 % des personnes vaccinées ont contracté la grippe ;
- 20 % de la population a contracté la grippe.

On choisit une personne au hasard dans la population de la ville et on considère les évènements :

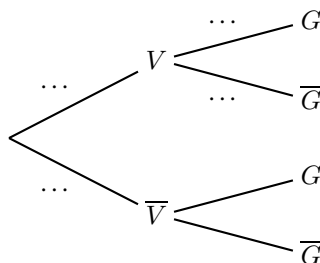
$V$  : « la personne est vaccinée contre la grippe » ;

$G$  : « la personne a contracté la grippe ».

1.

1. a. Donner la probabilité de l'évènement  $G$ .

1. b. Reproduire l'arbre pondéré ci-dessous et compléter les pointillés indiqués sur quatre de ses branches.



2. Déterminer la probabilité que la personne choisie ait contracté la grippe et soit vaccinée.

3. La personne choisie n'est pas vaccinée. Montrer que la probabilité qu'elle ait contracté la grippe est égale à 0,28.

## Partie B

Dans cette partie, les probabilités demandées seront données à  $10^{-3}$  près.

Un laboratoire pharmaceutique mène une étude sur la vaccination contre la grippe dans cette ville.

Après la période hivernale, on interroge au hasard  $n$  habitants de la ville, en admettant que ce choix se ramène à  $n$  tirages successifs indépendants et avec remise. On suppose que la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la ville soit vaccinée contre la grippe est égale à 0,4.

On note  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de personnes vaccinées parmi les  $n$  interrogées.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire  $X$  ?
2. Dans cette question, on suppose que  $n = 40$ .
  2. a. Déterminer la probabilité qu'exactement 15 des 40 personnes interrogées soient vaccinées.
  2. b. Déterminer la probabilité qu'au moins la moitié des personnes interrogées soit vaccinée.
  2. c. Déterminer la probabilité qu'entre 5 à 10 des personnes interrogées soient vaccinées.
  2. d. Déterminer l'espérance de la variable  $X$  et interpréter le résultat dans le cadre de l'exercice.
3. Dans cette question,  $n$  est un entier naturel non nul.
  3. a. Déterminer le nombre minimal de personnes à interroger pour qu'en moyenne, au moins 100 soient vaccinées.
  3. b. Exprimer  $P(X = 0)$  en fonction de  $n$ .
  3. c. Déterminer le nombre minimal de personnes à interroger pour que la probabilité de l'évènement « au moins une des  $n$  personnes interrogées a été vaccinée » soit supérieure à 0,99.

### Exercice 3. D'après Baccalauréat S Polynésie 4 septembre 2019 (c)

Dans cet exercice, les probabilités demandées seront précisées à  $10^{-4}$  près.

Lors d'une communication électronique, tout échange d'information se fait par l'envoi d'une suite de 0 ou de 1, appelés bits, et cela par le biais d'un canal qui est généralement un câble électrique, des ondes radio, ...

Une suite de 8 bits est appelé un octet. Par exemple, 10010110 est un octet.

## Partie A

On se place dans le cas où l'on envoie, sur le canal, successivement 8 bits qui forment un octet. On envoie un octet au hasard. On suppose la transmission de chaque bit indépendante de la transmission des bits précédents. On admet que la probabilité qu'un bit soit mal transmis est égale à 0,01.

On note  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de bits mal transmis dans l'octet lors de cette communication.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire  $X$  ? Justifier.
2. Déterminer la probabilité qu'exactement deux bits de l'octet soient mal transmis.
3. Que peut-on penser de l'affirmation suivante : « La probabilité que le nombre de bits mal transmis de l'octet soit au moins égal à trois est négligeable » ? Argumenter.

## Partie B

Afin de détecter si un ou plusieurs bits de l'octet sont mal transmis, on utilise un protocole de détection d'erreur. Il consiste à ajouter, à la fin de l'octet à transmettre, un bit, appelé bit de parité et qui est transmis après les huit bits de l'octet.

On s'intéresse désormais à la transmission de l'octet suivi de son bit de parité.

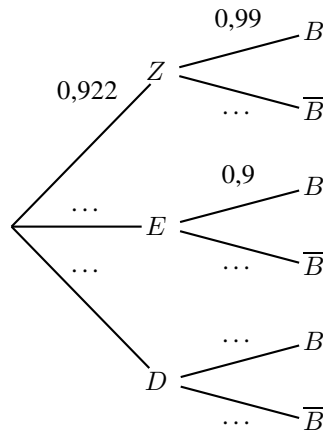
Une étude statistique a permis d'obtenir que :

- la probabilité que les huit bits (octet) soient transmis sans erreur vaut 0,922 ;
- la probabilité que les huit bits (octet) soient transmis avec exactement une erreur vaut 0,075 ;
- si les huit bits (octet) ont été transmis sans erreur, la probabilité que le bit de parité soit envoyé sans erreur vaut 0,99 ;
- si les huit bits (octet) ont été transmis avec exactement une erreur, la probabilité que le bit de parité ait été envoyé sans erreur vaut 0,9 ;
- si les huit bits (octet) ont été transmis avec au moins deux erreurs, la probabilité que le bit de parité soit envoyé sans erreur vaut 0,99.

On choisit au hasard un octet suivi de son bit de parité. On considère les évènements suivants :

- $Z$  : « les huit bits de l'octet sont transmis avec aucune erreur » ;  $E$  : « les huit bits de l'octet sont transmis avec exactement une erreur » ;
- $D$  : « les huit bits de l'octet sont transmis avec au moins deux erreurs » ;  $B$  : « le bit de parité est transmis sans erreur ».

1. Compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



2. Quelle est la probabilité que l'octet soit transmis avec une erreur exactement et que le bit de parité soit transmis sans erreur ?
3. Calculer la probabilité de l'évènement B.

## Deuxième partie

# Probabilités conditionnelles seulement

### Exercice 4. Baccaurément S Liban 31 mai 2019

Les deux parties 1 et 2 sont indépendantes.

Chaque semaine, un agriculteur propose en vente directe à chacun de ses clients un panier de produits frais qui contient une seule bouteille de jus de fruits. Dans un esprit de développement durable, il fait le choix de bouteilles en verre incassable et demande à ce que chaque semaine, le client rapporte sa bouteille vide.

On suppose que le nombre de clients de l'agriculteur reste constant.

Une étude statistique réalisée donne les résultats suivants :

- à l'issue de la première semaine, la probabilité qu'un client rapporte la bouteille de son panier est 0,9 ;
- si le client a rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est 0,95 ;
- si le client n'a pas rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est 0,2.

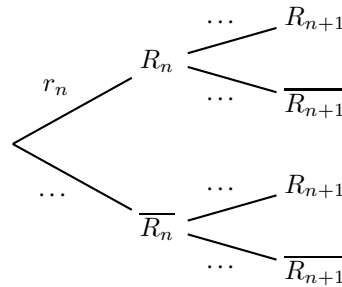
On choisit au hasard un client parmi la clientèle de l'agriculteur. Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on note  $R_n$  l'évènement « le client rapporte la bouteille de son panier de la  $n$ -ième semaine ».

1.

1. a. Modéliser la situation étudiée pour les deux premières semaines à l'aide d'un arbre pondéré qui fera intervenir les évènements  $R_1$  et  $R_2$ .
1. b. Déterminer la probabilité que le client rapporte ses bouteilles des paniers de la première et de la deuxième semaine.
1. c. Montrer que la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la deuxième semaine est égale à 0,875.
1. d. Sachant que le client a rapporté la bouteille de son panier de la deuxième semaine, quelle est la probabilité qu'il n'ait pas rapporté la bouteille de son panier de la première semaine ?  
On arrondira le résultat à  $10^{-3}$ .

2. Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on note  $r_n$  la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la  $n$ -ième semaine. On a alors  $r_n = p(R_n)$ .

2. a. Recopier et compléter l'arbre pondéré (aucune justification n'est attendue) :



2. b. Justifier que pour tout entier naturel  $n$  non nul,

$$r_{n+1} = 0,75r_n + 0,2$$

2. c. Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul,

$$r_n = 0,1 \times 0,75^{n-1} + 0,8$$

2. d. Calculer la limite de la suite  $(r_n)$ . Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.



### Réponses

Le corrigé complet sur [www.math93.com](http://www.math93.com)

## Exercice 5. Baccalauréat S Antilles-Guyane 18 juin 2019

Lors d'une soirée, une chaîne de télévision a retransmis un match. Cette chaîne a ensuite proposé une émission d'analyse de ce match.

On dispose des informations suivantes :

- 56 % des téléspectateurs ont regardé le match ;
- un quart des téléspectateurs ayant regardé le match ont aussi regardé l'émission ;
- 16,2 % des téléspectateurs ont regardé l'émission.

On interroge au hasard un téléspectateur. On note les évènements :

- $M$  : « le téléspectateur a regardé le match » et  $E$  : « le téléspectateur a regardé l'émission ».

On note  $x$  la probabilité qu'un téléspectateur ait regardé l'émission sachant qu'il n'a pas regardé le match.

1. Construire un arbre pondéré illustrant la situation.

2. Déterminer la probabilité de  $M \cap E$ .

3.

3. a. Vérifier que  $p(E) = 0,44x + 0,14$ .

3. b. En déduire la valeur de  $x$ .

4. Le téléspectateur interrogé n'a pas regardé l'émission. Quelle est la probabilité, arrondie à  $10^{-2}$ , qu'il ait regardé le match ?



### Réponses

Le corrigé complet sur [www.math93.com](http://www.math93.com)

### Exercice 6. Baccalauréat S Asie 20 juin 2019 (c)

Dans tout l'exercice, on arrondira les résultats au **millième**.

En France, la consommation de produits bio croît depuis plusieurs années.

En 2017, le pays comptait 52 % de femmes. Cette même année, 92 % des Français avaient déjà consommé des produits bio.

De plus, parmi les consommateurs de produits bio, 55 % étaient des femmes.

On choisit au hasard une personne dans le fichier des Français de 2017. On note :

- $F$  l'évènement « la personne choisie est une femme » ;
- $H$  l'évènement « la personne choisie est un homme » ;
- $B$  l'évènement « la personne choisie a déjà consommé des produits bio ».

1. Traduire les données numériques de l'énoncé à l'aide des évènements  $F$  et  $B$ .

2.

2. a. Montrer que  $P(F \cap B) = 0,506$ .

2. b. En déduire la probabilité qu'une personne ait consommé des produits bio en 2017, sachant que c'est une femme.

3. Calculer  $P_H(\overline{B})$ . Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

### Exercice 7. Baccalauréat S Métropole - La Réunion 21 juin 2019

Une plateforme informatique propose deux types de jeux vidéo : un jeu de type A et un jeu de type B.

On admet que, dès que le joueur achève une partie, la plateforme lui propose une nouvelle partie selon le modèle suivant :

- si le joueur achève une partie de type A, la plateforme lui propose de jouer à nouveau une partie de type A avec une probabilité de 0,8 ;
- si le joueur achève une partie de type B, la plateforme lui propose de jouer à nouveau une partie de type B avec une probabilité de 0,7.

Pour un entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 1, on note  $A_n$  et  $B_n$  les évènements :

$A_n$  : « la  $n$ -ième partie est une partie de type A. »

$B_n$  : « la  $n$ -ième partie est une partie de type B. »

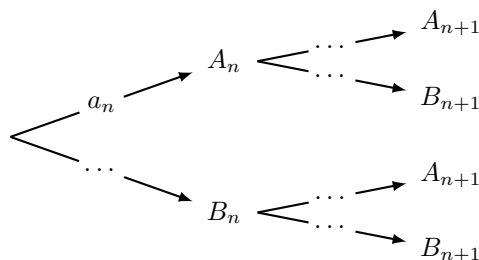
Pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 1, on note  $a_n$  la probabilité de l'évènement  $A_n$ .

1.

1. a. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci contre

1. b. Montrer que pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on a :

$$a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3$$



Dans la suite de l'exercice, on note  $a$  la probabilité que le joueur joue au jeu A lors de sa première partie, où  $a$  est un nombre réel appartenant à l'intervalle  $[0 ; 1]$ . La suite  $(a_n)$  est donc définie par :  $a_1 = a$ , et pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ,  $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3$ .

2. *Étude d'un cas particulier.* Dans cette question, on suppose que  $a = 0,5$ .

2. a. Montrer par récurrence, que pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on a :

$$0 \leq a_n \leq 0,6$$

2. b. Montrer que la suite  $(a_n)$  est croissante.

2. c. Montrer que la suite  $(a_n)$  est convergente et préciser sa limite.

3. *Étude du cas général.* Dans cette question, le réel  $a$  appartient à l'intervalle  $[0 ; 1]$ .

On considère la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n \geq 1$  par :

$$u_n = a_n - 0,6$$

3. a. Montrer que la suite  $(u_n)$  est une suite géométrique.

3. b. En déduire que pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on a :

$$a_n = (a - 0,6) \times 0,5^{n-1} + 0,6$$

3. c. Déterminer la limite de la suite  $(a_n)$ . Cette limite dépend-elle de la valeur de  $a$  ?

3. d. La plateforme diffuse une publicité insérée en début des parties de type  $A$  et une autre insérée en début des parties de type  $B$ . Quelle devrait-être la publicité la plus vue par un joueur s'adonnant intensivement aux jeux vidéo ?



### Réponses

§ Le corrigé complet sur [www.math93.com](http://www.math93.com)

### Exercice 8. Baccaauréat S Antilles-Guyane 9 septembre 2019 (c)

Une association offre à ses adhérents des paniers de légumes. Chaque adhérent a le choix entre trois tailles de panier :

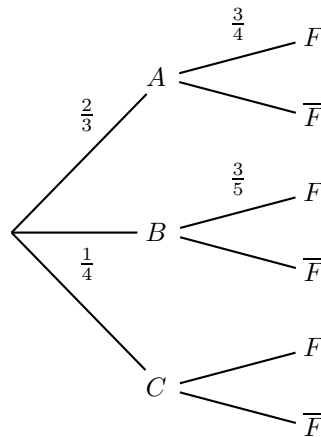
- un panier de petite taille ;
- un panier de taille moyenne ;
- un panier de grande taille.

L'association envisage de proposer en outre des livraisons d'œufs frais. Pour savoir si ses adhérents sont intéressés, elle réalise un sondage.

On interroge un adhérent au hasard. On considère les évènements suivants :

- $A$  : « l'adhérent choisit un panier de petite taille » ;
- $B$  : « l'adhérent choisit un panier de taille moyenne » ;
- $C$  : « l'adhérent choisit un panier de grande taille » ;
- $F$  : « l'adhérent est intéressé par une livraison d'œufs frais ».

On dispose de certaines données, qui sont résumées dans l'arbre ci-dessous :



1. Dans cette question, on ne cherchera pas à compléter l'arbre.
  1. a. Calculer la probabilité que l'adhérent choisisse un panier de petite taille et soit intéressé par une livraison d'œufs frais.
  1. b. Calculer  $P(B \cap \bar{F})$ , puis interpréter ce résultat à l'aide d'une phrase.
  1. c. La livraison d'œufs frais ne sera mise en place que si la probabilité de l'évènement  $F$  est supérieure à 0,6. Pourquoi peut-on affirmer que cette livraison sera mise en place ?
2. Dans cette question, on suppose que  $P(F) = 0,675$ .
  2. a. Démontrer que la probabilité conditionnelle de  $F$  sachant  $C$ , notée  $P_C(F)$ , est égale à 0,3.
  2. b. L'adhérent interrogé est intéressé par la livraison d'œufs frais.  
Quelle est la probabilité qu'il ait choisi un panier de grande taille ? Arrondir le résultat à  $10^{-2}$ .

# Corrections

## Correction de l'exercice 2 page 2

Le virus de la grippe atteint chaque année, en période hivernale, une partie de la population d'une ville. La vaccination contre la grippe est possible ; elle doit être renouvelée chaque année.

### Partie A

L'efficacité du vaccin contre la grippe peut être diminuée en fonction des caractéristiques individuelles des personnes vaccinées, ou en raison du vaccin, qui n'est pas toujours totalement adapté aux souches du virus qui circulent. Il est donc possible de contracter la grippe tout en étant vacciné.

Une étude menée dans la population de la ville à l'issue de la période hivernale a permis de constater que :

- 40 % de la population est vaccinée ;
- 8 % des personnes vaccinées ont contracté la grippe ;
- 20 % de la population a contracté la grippe.

On choisit une personne au hasard dans la population de la ville et on considère les événements :

$V$  : « la personne est vaccinée contre la grippe » ;

$G$  : « la personne a contracté la grippe ».

1.

1. a. Donner la probabilité de l'évènement  $G$ .



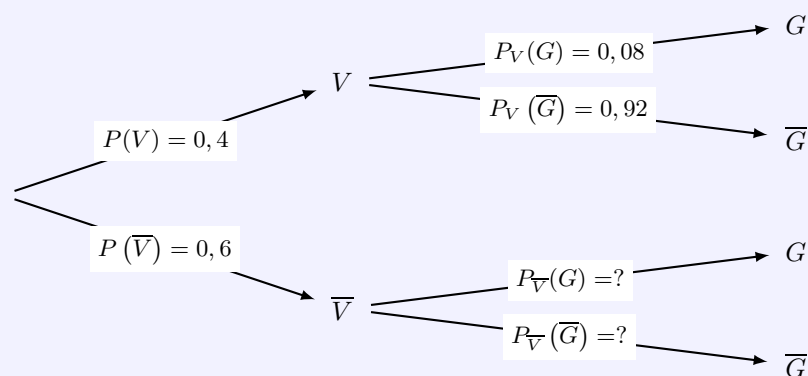
**Corrigé**

20% de la population a contracté la grippe donc  $P(G) = 0,2$ .

1. b. Reproduire l'arbre pondéré ci-dessous et compléter les pointillés indiqués sur quatre de ses branches.



**Corrigé**



2. Déterminer la probabilité que la personne choisie ait contracté la grippe et soit vaccinée.



**Corrigé**

La probabilité que la personne choisie ait contracté la grippe et soit vaccinée est :

$$P(G \cap V) = 0,4 \times 0,08 = \underline{0,032}$$

3. La personne choisie n'est pas vaccinée. Montrer que la probabilité qu'elle ait contracté la grippe est égale à 0,28.



### Corrigé

Sachant que la personne choisie n'est pas vaccinée, la probabilité qu'elle ait contracté la grippe est d'après la formule de Bayes :

$$P_{\bar{V}}(G) = \frac{P(\bar{V} \cap G)}{P(\bar{V})} = \frac{P(\bar{V} \cap G)}{0,6}$$

- Calculons  $P(\bar{V} \cap G)$ .

Les évènements  $V$  et  $\bar{V}$  forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales on a :

$$P(G) = P(G \cap V) + P(\bar{V} \cap G) \iff 0,2 = 0,032 + P(\bar{V} \cap G)$$

Donc

$$P(\bar{V} \cap G) = 0,2 - 0,032 = \underline{0,168}$$

- Conclusion :

$$P_{\bar{V}}(G) = \frac{0,168}{0,6} = \underline{0,28}$$

La personne choisie n'est pas vaccinée. La probabilité qu'elle ait contracté la grippe est égale à 0,28



### Remarque historique

Thomas Bayes (1702 – 1761) est un mathématicien britannique et pasteur de l'Église presbytérienne, connu pour avoir formulé le théorème de Bayes.

## Partie B

Dans cette partie, les probabilités demandées seront données à  $10^{-3}$  près.

Un laboratoire pharmaceutique mène une étude sur la vaccination contre la grippe dans cette ville.

Après la période hivernale, on interroge au hasard  $n$  habitants de la ville, en admettant que ce choix se ramène à  $n$  tirages successifs indépendants et avec remise. On suppose que la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la ville soit vaccinée contre la grippe est égale à 0,4.

On note  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de personnes vaccinées parmi les  $n$  interrogées.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire  $X$  ?



### Corrigé

#### Modélisation

Il y a répétition de  $n = n$  événements indépendants et identiques (on tire un habitant).

Chaque tirage a deux issues possibles (épreuve de Bernoulli) :

- succès de probabilité  $p = 0,4$  quand un habitant est vacciné ;
- et échec de probabilité  $1 - p = 0,6$  sinon.

Donc la variable aléatoire  $X$  qui est égale au nombre de succès au cours de ces  $n$  épreuves *indépendantes* de *Bernoulli* de paramètre  $p = 0,4$  suit une *loi binomiale* de paramètres  $n = n$  et  $p = 0,4$ .

On peut écrire :

$$X \text{ suit } \mathcal{B}(n ; 0,4) \text{ ou } X \sim \mathcal{B}(n ; 0,4).$$

2. Dans cette question, on suppose que  $n = 40$ .

2. a. Déterminer la probabilité qu'exactement 15 des 40 personnes interrogées soient vaccinées.



### Corrigé

Puisque  $X$  suit une loi Binomiale de paramètre  $n = 40$  et  $p = 0,4$  on a :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{40}{k} \times 0,4^k \times (0,6)^{40-k}$$

Et donc

$$p(X = 15) = \binom{40}{15} \times 0,4^{15} \times 0,6^{25}$$

Soit :

$$p(X = 15) \approx 0,123$$

#### Calculatrices

- Sur la TI Voyage 200 : TISat.binomDdP ( 40 , 0,4 , 15 )  $\approx$  0,123
- Sur TI82/83+ : Menu Distrib  $\Rightarrow$  binomFdp ( 40 , 0,4 , 15 )  $\approx$  0,123
- Sur Casio 35+ ou 75 : Menu Opt/STAT/DIST/DINM  $\Rightarrow$  binomialPD ( 15 , 40 , 0,4 )  $\approx$  0,123
- Sur Numworks : Menu probabilité

2. b. Déterminer la probabilité qu'au moins la moitié des personnes interrogées soit vaccinée.



### Corrigé

La probabilité qu'au moins la moitié des personnes interrogées soit vaccinée est, en passant à l'évènement contraire : vaccinée est  $P(X \geq 20)$  soit

$$P(X \geq 20) = 1 - P(X \leq 19) \approx \underline{0,13}$$

#### Calculatrices

- Sur la TI Voyage 200 : TISat.binomFdR ( 40 , 0,4 , 19 )  $\approx$  0,870 23
- Sur TI82/83+ : Menu Distrib  $\Rightarrow$  binomFrép ( 40 , 0,4 , 19 )  $\approx$  0,870 23
- Sur Casio 35+ ou 75 : Menu Opt/STAT/DIST/DINM  $\Rightarrow$  binomialCD ( 19 , 40 , 0,4 )  $\approx$  0,870 23

2. c. Déterminer la probabilité qu'entre 5 à 10 des personnes interrogées soient vaccinées.



### Corrigé

La probabilité qu'entre 5 à 10 des personnes interrogées soient vaccinées est :

$$P(5 \leq X \leq 10) = P(X \leq 10) - P(X \leq 4) \approx \underline{0,035}$$

2. d. Déterminer l'espérance de la variable  $X$  et interpréter le résultat dans le cadre de l'exercice.



### Corrigé

L'espérance de la variable  $X$  est  $E(X) = np = 40 \times 0,4 = 16$ . Cela signifie qu'en moyenne, 16 personnes sur les 40 interrogées seront vaccinées.

3. Dans cette question,  $n$  est un entier naturel non nul.

3. a. Déterminer le nombre minimal de personnes à interroger pour qu'en moyenne, au moins 100 soient vaccinées.



### Corrigé

L'espérance de la variable  $X$  est  $E(X) = np = 0,4n$ . Pour qu'en moyenne, au moins 100 soient vaccinées il faut que :

$$0,4n \geq 100 \iff n \geq 250$$

Le nombre minimal de personnes à interroger pour qu'en moyenne, au moins 100 soit vaccinées est donc de 250.

3. b. Exprimer  $P(X = 0)$  en fonction de  $n$ .



### Corrigé

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} \times 0,4^k \times 0,6^{n-k}$$

Donc

$$\boxed{P(X = 0) = 0,6^n}$$

3. c. Déterminer le nombre minimal de personnes à interroger pour que la probabilité de l'évènement « au moins une des  $n$  personnes interrogées a été vaccinée » soit supérieure à 0,99.



### Corrigé

La probabilité de l'évènement « au moins une des  $n$  personnes interrogées a été vaccinée » est  $P(X \geq 1)$ . Or on a :  $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$  et donc :

$$P(X \geq 1) \geq 0,99 \iff 1 - P(X = 0) \geq 0,99 \iff P(X = 0) \leq 0,01$$

Il faut donc résoudre l'inéquation :  $0,6^n \leq 0,01$ .

On pourra utiliser la fonction logarithme plus tard mais ici, la calculatrice suffisait. On montre rapidement que la suite de terme général  $u_n = 0,6^n$  est strictement décroissante. Par ailleurs :

$$\begin{cases} 0,6^9 > 0,01 \\ 0,6^{10} < 0,01 \end{cases} \implies n \geq 10$$

De ce fait, le nombre minimal de personnes à interroger pour que la probabilité de l'évènement « au moins une des  $n$  personnes interrogées a été vaccinée » soit supérieure à 0,99 est de 10 personnes.

## Correction de l'exercice 3 page 3 : polynésie sept. 2019

---

Dans cet exercice, les probabilités demandées seront précisées à  $10^{-4}$  près.

Lors d'une communication électronique, tout échange d'information se fait par l'envoi d'une suite de 0 ou de 1, appelés bits, et cela par le biais d'un canal qui est généralement un câble électrique, des ondes radio, ...

Une suite de 8 bits est appelé un octet. Par exemple, 10010110 est un octet.

### Partie A

On se place dans le cas où l'on envoie, sur le canal, successivement 8 bits qui forment un octet.

On envoie un octet au hasard. On suppose la transmission de chaque bit indépendante de la transmission des bits précédents.

On admet que la probabilité qu'un bit soit mal transmis est égale à 0,01.

On note  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de bits mal transmis dans l'octet lors de cette communication.

#### 1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire $X$ ? Justifier.

##### Modélisation

Il y a répétition de  $n = 8$  événements indépendants et identiques (on tire un bit).

Chaque tirage a deux issues possibles (épreuve de Bernoulli) :

- succès de probabilité  $p = 0,01$  quand un bit est mal transmis ;
- et échec de probabilité  $1 - p = 0,99$  sinon.

Donc la variable aléatoire  $X$  qui est égale au nombre de succès au cours de ces 8 épreuves *indépendantes* de *Bernoulli* de paramètre  $p = 0,01$  suit une *loi binomiale* de paramètres  $n = 8$  et  $p = 0,01$ .

On peut écrire :

$$X \text{ suit } \mathcal{B}(8; 0,01) \text{ ou } X \sim \mathcal{B}(8; 0,01).$$

#### 2. Déterminer la probabilité qu'exactly deux bits de l'octet soient mal transmis. On a

$$P(X = 2) = \binom{8}{2} \times 0,01^2 \times (1 - 0,01)^{8-2} = 28 \times 0,01^2 \times 0,99^6 \approx 0,00263$$

soit  $P(X = 2) \approx 0,0026$  à  $10^{-4}$  près.

#### 3. Que peut-on penser de l'affirmation suivante : « La probabilité que le nombre de bits mal transmis de l'octet soit au moins égal à trois est négligeable »? Argumenter.

On a

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) \approx 0,0000539$$

soit  $10^{-4}$  près  $P(X \geq 3) \approx 0,0001$  ce qui est effectivement négligeable.

### Partie B

Afin de détecter si un ou plusieurs bits de l'octet sont mal transmis, on utilise un protocole de détection d'erreur. Il consiste à ajouter, à la fin de l'octet à transmettre, un bit, appelé bit de parité et qui est transmis après les huit bits de l'octet. On s'intéresse désormais à la transmission de l'octet suivi de son bit de parité. Une étude statistique a permis d'obtenir que :

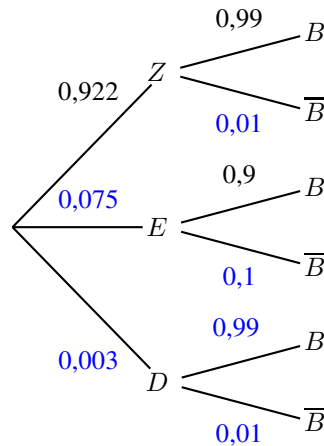
- la probabilité que les huit bits (octet) soient transmis sans erreur vaut 0,922 ;
- la probabilité que les huit bits (octet) soient transmis avec exactement une erreur vaut 0,075 ;
- si les huit bits (octet) ont été transmis sans erreur, la probabilité que le bit de parité soit envoyé sans erreur vaut 0,99 ;
- si les huit bits (octet) ont été transmis avec exactement une erreur, la probabilité que le bit de parité ait été envoyé sans erreur vaut 0,9 ;
- si les huit bits (octet) ont été transmis avec au moins deux erreurs, la probabilité que le bit de parité soit envoyé sans erreur vaut 0,99.

On choisit au hasard un octet suivi de son bit de parité. On considère les événements suivants :

- $Z$  : « les huit bits de l'octet sont transmis avec aucune erreur » ;

- $E$  : « les huit bits de l'octet sont transmis avec exactement une erreur » ;
- $D$  : « les huit bits de l'octet sont transmis avec au moins deux erreurs » ;
- $B$  : « le bit de parité est transmis sans erreur ».

1. Compléter l'arbre pondéré de l'annexe 1 à rendre avec la copie.



2. Quelle est la probabilité que l'octet soit transmis avec une erreur exactement et que le bit de parité soit transmis sans erreur ?

La probabilité demandée est

$$P(E \cap B) = P(E) \times P_E(B) = 0,075 \times 0,9 = \underline{0,0675}$$

3. Calculer la probabilité de l'évènement B.

D'après la loi des probabilités totales, puisque les évènements  $Z$ ,  $E$  et  $D$  forment une partition de l'univers :

$$\begin{aligned} P(B) &= P(Z \cap B) + P(E \cap B) + P(D \cap B) \\ &= 0,922 \times 0,99 + 0,075 \times 0,9 + 0,003 \times 0,99 = \underline{0,98325} \end{aligned}$$

soit  $P(B) = 0,9833$  à  $10^{-4}$  près.

## Correction de l'exercice 6 page 6 : Asie 2019

1. Traduire les données numériques de l'énoncé à l'aide des évènements  $F$  et  $B$ .

Traduction des données :

$$P(F) = 0,52 ; P(B) = 0,92 ; P_B(F) = 0,55$$

2.

2. a. Montrer que  $P(F \cap B) = 0,506$ .

On a :

$$P(F \cap B) = P_B(F) \times P(B) = 0,55 \times 0,92 = 0,506$$

2. b. En déduire la probabilité qu'une personne ait consommé des produits bio en 2017, sachant que c'est une femme.

On en déduit :

$$P_F(B) = \frac{P(F \cap B)}{P(F)} = \frac{0,506}{0,52} \approx \underline{0,973}$$

La probabilité qu'une personne ait consommé des produits bio en 2017, sachant que c'est une femme vaut environ 0,973.

3. Calculer  $P_H(\overline{B})$ . Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Les évènements  $F$  et  $H$  forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totale :

$$P(B) = P(B \cap F) + P(B \cap H)$$

donc

$$P(B \cap H) = P(B) - P(B \cap \bar{H}) = 0,92 - 0,506 = 0,414$$

On a

$$P_H(B) = \frac{P(B \cap H)}{P(H)} = \frac{0,414}{0,48}$$

donc

$$P_H(\bar{B}) = 1 - \frac{0,414}{0,48} = \boxed{0,1375}$$

La probabilité qu'une personne n'ait pas consommé des produits bio en 2017, sachant que c'est un homme vaut environ 0,1375.

## Correction de l'exercice 8 page 8 : Antilles septembre 2019

Une association offre à ses adhérents des paniers de légumes. Chaque adhérent a le choix entre trois tailles de panier : un panier de petite taille, un panier de taille moyenne, et un panier de grande taille.

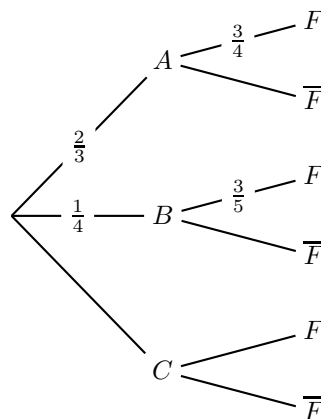
### Partie A

L'association envisage de proposer en outre des livraisons d'œufs frais. Pour savoir si ses adhérents sont intéressés, elle réalise un sondage.

On interroge un adhérent au hasard. On considère les événements suivants :

- $A$  : « l'adhérent choisit un panier de petite taille » ;
- $B$  : « l'adhérent choisit un panier de taille moyenne » ;
- $C$  : « l'adhérent choisit un panier de grande taille » ;
- $F$  : « l'adhérent est intéressé par une livraison d'œufs frais ».

On dispose de certaines données, qui sont résumées dans l'arbre ci-dessous :



1. Dans cette question, on ne cherchera pas à compléter l'arbre.

1. a. « L'adhérent choisit un panier de petite taille et est intéressé par une livraison d'œufs frais. » est l'événement  $A \cap F$  :

$$P(A \cap F) = P(A) \times P_A(F) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$$

1. b. on a :

$$P(B \cap \bar{F}) = P(B) \times P_B(\bar{F}) = P(B) \times (1 - P_B(F)) = \frac{1}{4} \times \left(1 - \frac{3}{5}\right) = \frac{1}{10}$$

La probabilité que l'adhérent choisisse un panier de taille moyenne et qu'il ne soit pas intéressé par une livraison d'œufs frais est égale à  $\frac{1}{10}$ .

1. c. La livraison d'œufs frais ne sera mise en place que si la probabilité de l'évènement  $F$  est supérieure à 0,6. Pourquoi peut-on affirmer que cette livraison sera mise en place ?

D'après la formule des probabilités totales, puisque les évènements  $A$ ,  $B$  et  $C$  forment une partition de l'univers :

$$\begin{aligned} P(F) &= P(A \cap F) + P(B \cap F) + P(C \cap F) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{5} + P(C \cap F) \\ &= 0,65 + P(C \cap F) \geq 0,65 \end{aligned}$$

Donc  $P(F) \geq 0,65$ , donc la livraison d'œufs frais sera mise en place.

2. Dans cette question, on suppose que  $P(F) = 0,675$ .

2. a.  $P_C(F) = \frac{P(F \cap C)}{P(C)}$

- $P(C \cap F) = P(F) - (P(A \cap F) + P(B \cap F)) = 0,675 - 0,65 = 0,025$
- $P(C) = 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

$$P_C(F) = \frac{P(F \cap C)}{P(C)} = \frac{0,025}{\frac{1}{12}} = 12 \times 0,025 = \underline{0,3}$$

2. b. L'adhérent interrogé est intéressé par la livraison d'œufs frais. La probabilité qu'il ait choisi un panier de grande taille est

$$P_F(C) = \frac{P(C \cap F)}{P(F)} = \frac{0,025}{0,675} \approx \underline{0,04}$$