Math93.com

Complexes Partie 1

Tle Maths Experte

I. Une approche historique

Remarque historique

Des équations du premier et du second degré (où les coefficients sont des nombres donnés) sont déjà résolues avec une méthode générale par les Babyloniens vers 1700 av. J.C et peut être même plus tôt.
Pour les équations du 3e degré, il faut attendre 1515 avec l'italien Scipio del Ferro (1465-1526) dont les papiers sont cependant perdus. Puis ses compatriotes Nicolo Tartaglia et Gérolamo Cardano (1501-1576) poursuivent ses travaux.
La méthode de résolution des équations de 3e degré va être possible grâce à une astuce de calcul intermédiaire qui utilise la racine carrée de nombre négatif.
Et voici que l'on en vient à considérer de nouvelles entités, pas encore considérées comme des nombres :

$$a + b\sqrt{-1}$$

Les complexes ne seront vraiment admis par l'ensemble de la communauté scientifique qu'au 18e siècle, après que les mathématiciens apprirent à les représenter avec le plan d'Argand-Cauchy.

Pour en savoir plus : www.math93.com/...Les nombres complexes

II. Forme algébrique d'un nombre complexe

II.1 Une définition de $\mathbb{C}$

Théorème 1 (L'ensemble des complexes)

Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$, appelé **ensemble des nombres complexes ou imaginaire**, qui possède les propriétés suivantes :

1. l'ensemble des nombres réel $\mathbb{R}$ est inclus dans $\mathbb{C}$ soit $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$;
2. l'ensemble $\mathbb{C}$ possède un élément noté i tel que $\mathbf{i^2 = -1}$;
3. tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit de manière unique sous la forme $\boldsymbol{z = a + \mathrm{i}\, b}$ où a et b sont des nombres réels ;
4. l'addition et la multiplication des réels se prolongent aux nombres complexes en remplaçant i^2 par (-1).

Définition 1 (Forme algébrique : partie réelle et partie imaginaire)

L'écriture $z = a + \mathrm{i}\, b$ où a et b sont des nombres réels est la **forme algébrique de z**.

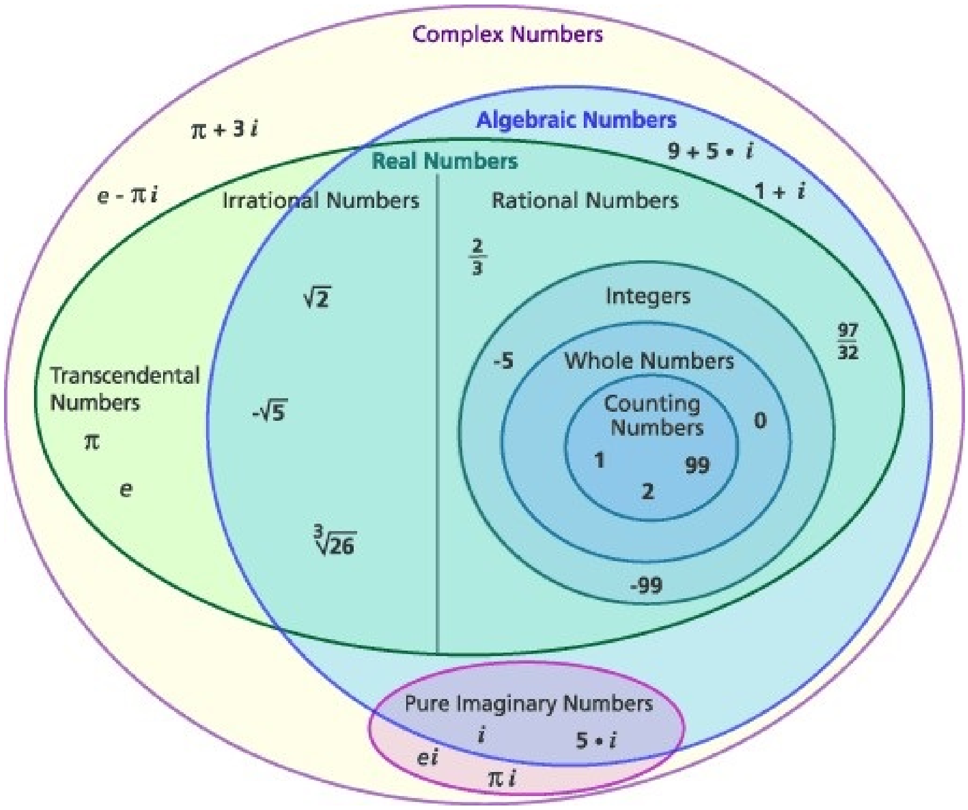
- Partie réelle : a est la **partie réelle de z** et se note **Re** (z).
- Partie imaginaire : b est la **partie imaginaire de z** et se note **Im** (z).
- Attention : $a = \mathrm{Re}\,(z)$ et $b = \mathrm{Im}\,(z)$ sont des réels :

$$a = \mathrm{Re}\,(z) \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad b = \mathrm{Im}\,(z) \in \mathbb{R}$$

Exemple

- Si $z_1 = -2 + 3\mathrm{i}$ on a : $\mathrm{Re}(z_1) = -2$ et $\mathrm{Im}\,(z_1) = 3$.
- Si $z_2 = \sqrt{2}$ on a : $\mathrm{Re}(z_2) = \sqrt{2}$ et $\mathrm{Im}\,(z_2) = 0$.
  On dit dans ce cas que z_2 est un **réel**. .
- Si $z_3 = -\mathrm{i}$ on a : $\mathrm{Re}(z_3) = 0$ et $\mathrm{Im}\,(z_3) = -1$.
  On dit dans ce cas que z_3 est un **imaginaire pur**. .
- 0 est le seul complexe à **la fois réel et imaginaire pur**.

II.2 Sets of Numbers ... in the US



Remarque

- Les anglo-saxons appellent souvent que les « *counting numbers* », les « *natural numbers* » et notent l'ensemble $\mathbb{N}$. Cet ensemble ne comporte pas le 0.
- Pour nous $\mathbb{N}$ représente les « *whole numbers* ».
  Les anglo-saxons le notent parfois $\mathbb{N}^0$ ou $\mathbb{N}_0$.
- *An algebraic number is a number that is a root of a non-zero polynomial (of finite degree) in one variable with integer (or, equivalently, rational) coefficients. For example, the golden ratio,* $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ *is an algebraic number, because it is a root of the polynomial* $x^2 - x - 1$*. That is, it is a value for x for which the polynomial evaluates to zero.*
- Nous montrerons que tous les complexes de la forme $a + \mathrm{i}\, b$ où a et b sont des entiers sont des nombres algébriques.
- *Real and complex numbers that are not algebraic, such as* π *and* e*, are called transcendental numbers.*

II.3 Additions et multiplications dans $\mathbb{C}$

Propriété 1 (Somme de deux complexes)

Soit z et z' deux nombres complexes de formes algébriques : $z = a + \mathrm{i}\,b$ et $z' = a' + \mathrm{i}\,b'$.

$$z + z' = (a + \mathrm{i}\,b) + (a' + \mathrm{i}\,b') = (a + a') + \mathrm{i}\;(b + b')$$

Propriété 2 (Produit de deux complexes)

Soit z et z' deux nombres complexes de formes algébriques : $z = a + \mathrm{i}\,b$ et $z' = a' + \mathrm{i}\,b'$.

$$zz' = (a + \mathrm{i}\,b) \times (a' + \mathrm{i}\,b') = (aa' - bb') + \mathrm{i}\;(ab' + ba')$$

Exemple

Soit z et z' deux nombres complexes de formes algébriques : $z = -2 + 3\,\mathrm{i}$ et $z' = 5 - 7\,\mathrm{i}$.
Déterminer la somme et le produit de ces deux complexes.

- $z + z' = -2 + 3\,\mathrm{i} + 5 - 7\,\mathrm{i} = (-2 + 5) + \mathrm{i}\,(3 - 7) = \underline{3 - 4\,\mathrm{i}}$.
  On ajoute les partie réelles entre elles et les parties imaginaires entre elles.
- Pour le produit, on développe en appliquant la double distributivité et on remplace i^2 par (-1) :

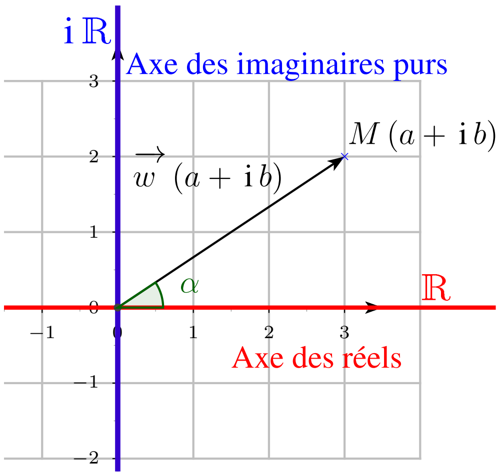
$$\begin{aligned} zz' &= (-2 + 3\,\mathrm{i}) \times (5 - 7\,\mathrm{i}) \\ zz' &= -10 + 14\,\mathrm{i} + 15\,\mathrm{i} - 21\left(\mathrm{i}^2\right) \\ zz' &= -10 + 29\,\mathrm{i} - 21 \times (-1) \\ zz' &= \underline{11 + 29\,\mathrm{i}} \end{aligned}$$

II.4 Représentation dans le plan complexe : le plan d'Argand-Cauchy

Définition 2

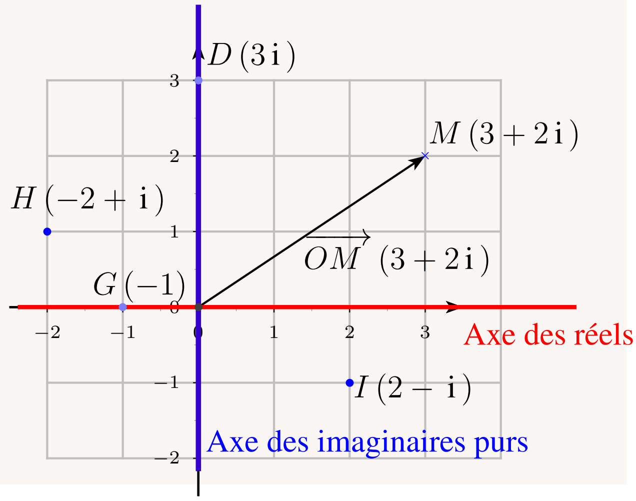
Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct :

- à tout nombre complexe $z = a + \mathrm{i}\,b$, (où a et b sont réels), on associe le point $M(a\ ;\ b)$ et le vecteur $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \overrightarrow{w}$ qui sont le **point image** et le **vecteur image de z** ;
- à tout point $M(a\ ;\ b)$ et vecteur $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \overrightarrow{u}$ on associe le nombre complexe $z = a + \mathrm{i}\,b$ appelé **affixe de M** et **affixe de $\overrightarrow{w}$** .
- Le plan est alors appelé le **plan complexe**.



Exemple

- Le point image d'un réel appartient à l'axe des abscisses, c'est **l'axe des réels**. Par exemple ici $G(-1)$ est le point image du réel (-1).
- Si la partie imaginaire du complexe est nulle alors $z = b\,\mathrm{i}$ et le point image appartient à l'axe des ordonnées, c'est l'**axe des imaginaires purs**. Par exemple ici $D(3\,\mathrm{i})$ est le point image de l'imaginaire pur $3\,\mathrm{i}$.



Remarque historique

Le mathématicien suisse Jean-Robert Argand (1768-1822) introduit en 1806 la configuration plane des nombres complexes. Cette dernière est faite avant lui par Wessel (1745-1818) dans l'article "Sur la représentation analytique d'une direction" qui associe à tout nombre complexe un vecteur d'origine 0 et interprète sur ces vecteurs les opérations élémentaires sur les complexes. Cette publication passe cependant inaperçue à l'époque et les travaux de Wessel ne seront retrouvés qu'en 1897. Pour en savoir plus : www.math93.com/... le plan d'Argand-Cauchy

II.5 Propriétés

Propriété 3

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$. Soit les points A et B d'affixes z_A et z_B alors :

- **le vecteur** $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $(z_B - z_A)$;
- **le milieu I** du segment $[AB]$ a pour affixe $\boxed{z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}}$.
- Soit $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w'}$ d'affixes z et z'. Alors :
  - Le **vecteur somme** $\overrightarrow{w} + \overrightarrow{w'}$ d'affixe $z + z'$.
  - Le **produit par un réel** $k\,\overrightarrow{w}$ d'affixe $k\,z$.

II.6 Égalité de deux complexes

Propriété 4

Deux complexes sont égaux si et seulement si ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

Remarques

- Un complexe est réel si, et seulement si, sa partie imaginaire est nulle soit :

$$\boxed{z \in \mathbb{R} \iff \text{Im}\,(z) = 0}$$

- Un complexe est imaginaire pur si, et seulement si, sa partie réelle est nulle soit :

$$\boxed{z \in \mathrm{i}\,\mathbb{R} \iff \text{Re}(z) = 0}$$

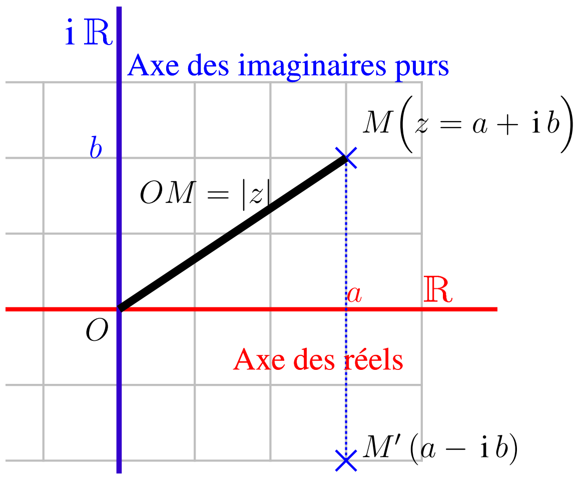
III. Conjugué et module

III.1 Définitions : Conjugué et module

Définition 3

On se place dans un repère orthonormé $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.
Soit $z = a + \mathrm{i}\,b$ un complexe de point image M.

- Le nombre complexe **conjugué de z**, noté $\overline{z}$ est le nombre complexe : $\boxed{\overline{z} = a - \mathrm{i}\,b}$.
- Les points d'affixes z et $\overline{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des réels.
- Le **module du complexe z**, noté $|z|$ est égal à la distance OM soit : $\boxed{|z| = \sqrt{a^2 + b^2}}$.



III.2 Premières propriétés

Propriété 5

On se place dans un repère orthonormé $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. Soit $z = a + \mathrm{i}\,b$ un complexe de point image M.

1. $\boxed{|z|^2 = z\overline{z} = a^2 + b^2}$.
2. $\boxed{z + \overline{z} = 2\text{Re}\,(z) = 2a}$ et $\boxed{z - \overline{z} = 2\,\mathrm{i}\,\text{Im}\,(z) = 2b\,\mathrm{i}}$
3. Le conjugué de $\overline{z}$ est : $\boxed{\overline{\overline{z}} = z}$.

III.3 Calcul de longueur

Propriété 6

On se place dans un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. Soit deux points A et B d'affixes z_A et z_B.
La distance AB est, en unité de longueur :

$$AB = |z_B - z_A|$$

IV. Opérations sur les complexes

IV.1 Inverse et quotient

Propriété 7

Tout nombre complexe non nul z admet dans $\mathbb{C}$ un inverse noté $\frac{1}{z}$. On a :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+\mathrm{i}\,b} = \frac{a-\mathrm{i}\,b}{a^2+b^2} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} \Longrightarrow \boxed{\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}}$$

Exemple

Pour déterminer la forme algébrique de l'inverse d'un complexe, on multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué :
Par déterminons l'inverse du complexe $z = 3 - 2\,\mathrm{i}$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z} &= \frac{1}{3-2\,\mathrm{i}} = \frac{3+2\,\mathrm{i}}{(3-2\,\mathrm{i})(3+2\,\mathrm{i})}\\ &= \frac{3+2\,\mathrm{i}}{3^2+2^2} = \frac{3+2\,\mathrm{i}}{13}\\ \frac{1}{3-2\,\mathrm{i}} &= \frac{3}{13} + \frac{2}{13}\,\mathrm{i}\end{aligned}$$

IV.2 Propriété du conjugué

Propriété 8

1. Un nombre complexe z est réel si et seulement si il est égal à son conjugué $z = \overline{z}$.

$$\boxed{z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}}$$

2. Un nombre complexe z est imaginaire pur si et seulement si il est égal à l'opposé de son conjugué $z = -\overline{z}$.

$$\boxed{z \in \mathrm{i}\,\mathbb{R} \iff z = -\overline{z}}$$

Preuve

1. Soit $z = a + \mathrm{i}\,b$. On a alors :

$$z = \overline{z} \iff a + \mathrm{i}\,b = a - \mathrm{i}\,b \iff b = -b \iff b = 0 \iff z \in \mathbb{R}$$

2. Et :

$$z = -\overline{z} \iff a + \mathrm{i}\,b = -a + \mathrm{i}\,b \iff a = -a \iff a = 0 \iff z \in \mathrm{i}\,\mathbb{R}$$

Propriété 9

Pour tous nombres complexes z et z' on a :

1. $\boxed{\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}}$
2. $\boxed{\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}}$
3. Pour $z \neq 0$, on a : $\boxed{\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}}$
4. Pour $z \neq 0$, on a : $\boxed{\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\overline{z'}}{\overline{z}}}$

Preuve

Pour tous nombres complexes z et z' on a :

1. $z + z' = a + a' + \mathrm{i}\,(b + b')$ donc

$$\overline{z+z'} = a + a' - \mathrm{i}\,(b+b') = (a - \mathrm{i}\,b) + (a' - \mathrm{i}\,b') = \overline{z} + \overline{z'}$$

2. $zz' = (a + \mathrm{i}\,b) \times (a' + \mathrm{i}\,b') = (aa' - bb') + \mathrm{i}\,(ab' + ba')$ donc

$$\overline{zz'} = (aa' - bb') - \mathrm{i}\,(ab' + ba')$$

Par ailleurs

$$\overline{z}\,\overline{z'} = (a - \mathrm{i}\,b)(a' - \mathrm{i}\,b') = (aa' - bb') - \mathrm{i}\,(ab' + ba')$$

Donc

$$\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$$

3. Pour $z \neq 0$, on a :

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

Donc puisque $|z|^2$ est un réel strictement positif on a :

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{\overline{\overline{z}}}{|z|^2} = \frac{z}{|z|^2} = \frac{z}{z\overline{z}} = \frac{1}{\overline{z}}$$

4. Pour $z \neq 0$, on a en appliquant la propriété du produit (2) :

$$\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \overline{z'} \times \overline{\left(\frac{1}{z}\right)}$$

Puis en appliquant la propriété de l'inverse (3) :

$$\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \overline{z'} \times \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \overline{z'} \times \left(\frac{1}{\overline{z}}\right) = \frac{\overline{z'}}{\overline{z}}$$

Propriété 10

Pour tout complexe z et tout entier naturel n non nul on a :

$$\boxed{\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n}$$

Remarque : cette propriété reste vraie si $z \neq 0$ et $n < 0$.

Preuve

Notons pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ la propriété

$$P(n) \ : \ \overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$$

- **Initialisation**
  Pour $n = 1$, la propriété $P(n)$ est vraie puisque :

$$\overline{(z^1)} = \overline{z} \text{ et } (\overline{z})^1 = \overline{z}$$

- **Hérédité**
  Supposons que pour n entier fixé, $P(n)$ soit vérifiée et montrons qu'alors elle est aussi vraie au rang $n+1$.

Remarque

On admet que :

- $\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$
- $\overline{z.z'} = \overline{z}.\overline{z'}$

Et on cherche à montrer que :

$\boxed{\overline{(z^{n+1})} = (\overline{z})^{n+1}}$ à prouver

Pour tout complexes z et z' et pour n entier naturel non nul :

$$\overline{(z^{n+1})} = \overline{(z^n.z)}$$

On applique alors la propiété IV.2 : $\overline{z.z'} = \overline{z}.\overline{z'}$

$$\overline{(z^{n+1})} = \overline{(z^n)}.\overline{z}$$

On applique l'hypothèse de récurrence qui implique que $P(n)$ soit vérifiée et donc que $\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$.

$$\begin{aligned}\overline{(z^{n+1})} &= (\overline{z})^n.\overline{z}\\ &= (\overline{z})^{n+1}\end{aligned}$$

On a alors montré que $\overline{(z^{n+1})} = (\overline{z})^{n+1}$ et donc que $P(n+1)$ est vraie. La propriété est donc héréditaire.

- **Conclusion**
  On a montré que $P(1)$ est vraie. De plus, la propriété est héréditaire. De ce fait la relation est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

$$\boxed{\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n}$$

IV.3 Propriétés du module

IV.3.1 Propriétés liées à la définition (et rappels)

Propriété 11

Dans le plan complexe, on se place dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.

1. Le **module du complexe z**, noté $|z|$ est égal à la distance OM soit : $\boxed{|z| = \sqrt{a^2+b^2}}$.
2. $\boxed{|z|^2 = z\overline{z} = a^2+b^2}$.
3. Pour tout z complexe, on a $|z|$ est un réel positif.
4. $|z| = 0 \iff z = 0$

IV.3.2 Propriétés du module

Propriété 12

Dans le plan complexe, on se place dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$. Pour tous complexes z et z' et tout entier naturel n.

1. Produit : $|z \times z'| = |z| \times |z'|$.
2. Puissance : $|z^n| = |z|^n$
3. Inverse : pour $z \neq 0$ on a : $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$.
4. Quotient : pour $z' \neq 0$ on a : $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$.
5. Conjugué : $|\overline{z}| = |z|$

Preuve

On pose $z = a + \mathrm{i}\,b$ et $z' = a' + \mathrm{i}\,b'$ et on cherche les parties réelles et imaginaires de chaque membre.

IV.4 Inverse et Quotient

Propriété 13

Soit $z = a + \mathrm{i}\, b$ un nombre complexe non nul et $z' = a' + \mathrm{i}\, b'$ un complexe.

1. On a en multipliant numérateur et dénominateur par le conjugué $\overline{z}$:

$$\boxed{\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{a - \mathrm{i}\, b}{a^2 + b^2}}$$

2. On a en multipliant numérateur et dénominateur par le conjugué $\overline{z}$:

$$\boxed{\frac{z'}{z} = \frac{z'.\overline{z}}{z.\overline{z}} = \frac{(a' + \mathrm{i}\, b')\,(a - \mathrm{i}\, b)}{a^2 + b^2}}$$

Remarque

1. On en déduite que : $\boxed{\frac{1}{\mathrm{i}} = -\mathrm{i}}$
2. Multiplier numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur permet d'obtenir la forme algébrique d'un quotient.

IV.4.1 Inégalité triangulaire

Propriété 14 (Inégalité triangulaire (Admise))

Pour tous complexes z et z' on a :

$$\boxed{|z + z'| \leqslant |z| + |z'|}$$

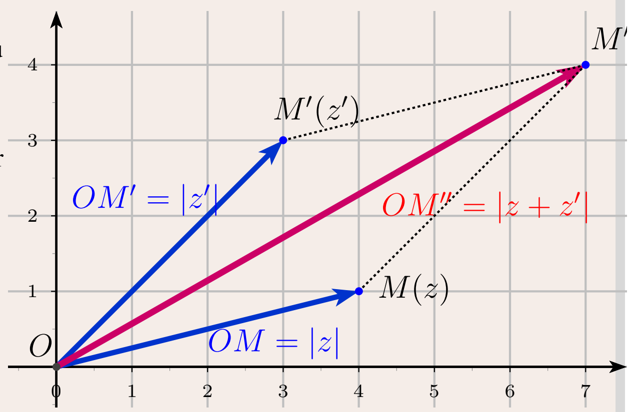
Cas d'égalité (Hors Programme)
On peut montrer que $|z + z'| = |z| + |z'|$ si et seulement si il existe deux réels positifs a et b, $(a\ ;\ b) \neq (0\ ;\ 0)$ tels que $az = bz'$.

Remarque

On se place dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ du plan complexe.
Soit les points $M(z)$, $M'(z')$ et $M''(z + z')$.
Soit les vecteurs $\overrightarrow{OM}\,(z)$ et $\overrightarrow{OM'}\,(z')$ et le vecteur somme $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM''}$ est d'affixe $(z + z')$.
Ainsi le quadrilatère OMM''M' est un parallélogramme.
L'inégalité $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$ signifie que

$$OM'' \leqslant OM + MM''$$

d'où le nom de cette inégalité.



V. Équations du second degré dans $\mathbb{C}$

V.1 Équations de la forme $z^2 = a$, avec a réel

Propriété 15

Soit a un nombre réel. On cherche à résoudre l'équation $z^2 = a$.

1. Si $a = 0$, l'équation $z^2 = a$ admet une unique solution qui est $z = 0$.
2. Si $a > 0$, l'équation $z^2 = a$ admet deux solutions réelles qui sont $z = \sqrt{a}$ et $z = -\sqrt{a}$.

$$\boxed{\begin{cases} z^2 = a \\ a > 0 \end{cases} \iff z = \sqrt{a} \text{ ou } z = -\sqrt{a}}$$

3. Si $a < 0$, l'équation $z^2 = a$ admet deux solutions complexes conjuguées qui sont $z = \mathrm{i}\sqrt{|a|}$ et $z = -\mathrm{i}\sqrt{|a|}$.

$$\boxed{\begin{cases} z^2 = a \\ a < 0 \end{cases} \iff z = \mathrm{i}\sqrt{|a|} \text{ ou } z = -\mathrm{i}\sqrt{|a|}}$$

Preuve

Les cas 1 et 2 ont été traités en seconde (et troisième). Supposons que $a < 0$, alors :

$$a = (-1) \times |a| \iff a = \mathrm{i}^2 \times |a|$$

De ce fait :

$$\begin{aligned} z^2 = a &\iff z^2 = \mathrm{i}^2 \times |a| \\ &\iff z^2 = \mathrm{i}^2 \times \left(\sqrt{|a|}\right)^2 \\ &\iff z^2 - \left(\mathrm{i}\sqrt{|a|}\right)^2 = 0 \\ &\iff \left(z - \mathrm{i}\sqrt{|a|}\right)\left(z + \mathrm{i}\sqrt{|a|}\right) = 0 \\ &\iff z = \mathrm{i}\sqrt{|a|} \text{ ou } z = -\mathrm{i}\sqrt{|a|} \end{aligned}$$

V.2 Équations du second degré à coefficients réels

Propriété 16 (Équation du second degré $az^2+bz+c=0$)

Soit l'équation $az^2+bz+c=0$ d'inconnue z, où a, b et c sont des réels avec $a\neq 0$.
Le discriminant de cette équation est le réel $\Delta=b^2-4ac$.

1. Si $\Delta>0$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes : $\boxed{z_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}$.

2. Si $\Delta=0$, l'équation admet une unique solution réelle : $\boxed{z_0=\dfrac{-b}{2a}}$.

3. Si $\Delta<0$, l'équation admet deux solutions imaginaires conjuguées distinctes :

$$\boxed{z_1=\frac{-b-\mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2=\overline{z_1}=\frac{-b+\mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}}$$

Preuve

Les cas 1 et 2 ont été traités en première. Supposons donc que $\Delta<0$ et bien sûr que $a\neq 0$. On reprend le début de la démonstration de première, jusqu'à l'obtention de la forme canonique.

$$\begin{aligned}
az^2+bz+c=0 &\iff a\left[z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a}\right]=0\\
&\iff a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]=0\\
&\iff a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]=0
\end{aligned}$$

Puisque $\Delta<0$ on peut écrire $\Delta=-|\Delta|=\mathrm{i}^2|\Delta|$ soit :

$$\begin{aligned}
az^2+bz+c=0 &\iff a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\mathrm{i}^2|\Delta|}{4a^2}\right]=0\\
&\iff a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}\right)^2\right]=0\\
&\iff a\left[\left(z+\frac{b}{2a}-\frac{\mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}+\frac{\mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}\right)\right]=0\\
&\iff a\left[\left(z-\frac{-b+\mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}\right)\left(z-\frac{-b-\mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}\right)\right]=0\\
az^2+bz+c=0 &\iff z=\frac{-b-\mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a} \text{ ou } z=\frac{-b+\mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}
\end{aligned}$$

Aide

Dans la pratique, lorsque le discriminant est négatif, on cherchera à l'écrire sous la forme $(\mathrm{i}\,|\Delta|)^2$. Par exemple pour résoudre l'équation $z^2+z+1=0$, on écrira

$$\Delta=-3=\left(\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2 \implies z_1=\frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} \text{ et } z_2=\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$$

VI. Équations polynomiales à coefficients réels

VI.1 Définition et propriété

Définition 4

Soient n un entier naturel et a_0, a_1, ..., a_n des nombres **réels** avec $a_n \neq 0$.

1. On appelle fonction polynôme de degré n à coefficients réels la fonction P définie sur $\mathbb{C}$ et à valeur dans $\mathbb{C}$ par :

$$P : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \end{array} \right.$$

2. Degré de P.
L'entier n est le degré de P qu'on peut noter $\deg(P)$.
3. Équation $P(z) = 0$.
L'équation $P(z) = 0$ est appelée **équation polynomiale de degré n à coefficients réels**.
4. Racines du Polynôme.
Les solutions de cette équation dans $\mathbb{C}$ sont appelées les **racines du polynôme** ou les **racines de l'équation**.
5. Polynôme unitaire : Lorsque le coefficient du terme de plus haut degré est 1 (soit $a_n = 1$) , on dit que P est unitaire.

Remarque

Un polynôme P est nul, c'est à dire tel que $P(z) = 0$ pour tout complexe z, à la seule condition de tous ses coefficients soient nuls.

Propriété 17 (Factorisation par $(x - \alpha)$)

Soient z et α deux nombres complexes.
Pour tout entier naturel n non nul, il existe un polynôme P unitaire de degré $(n - 1)$ tel que :

$$\boxed{z^n - \alpha^n = (z - \alpha)P(z)}$$

On a l'égalité :

$$\boxed{z^n - \alpha^n = (z - \alpha) \times \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k}.\alpha^k = (z - \alpha) \times \left(z^{n-1} + z^{n-2}\alpha^+ z^{n-3}\alpha^2 + \cdots + \alpha^{n-1}\right)}$$

Preuve

Soient z et α deux nombres complexes.
Pour tout entier naturel n non nul :

$$\begin{aligned}(z - \alpha) \times \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k}.\alpha^k &= \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-k}.\alpha^k - \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k}.\alpha^{k+1} \\ &= z^n\alpha^0 + z^{n-1}\alpha + z^{n-2}\alpha^2 + \cdots + z^1\alpha^{n-1} - \left(z^{n-1}\alpha + z^{n-2}\alpha^2 + \cdots + z^1\alpha^{n-1} + z\alpha^n\right) \\ &= z^n - \alpha^n\end{aligned}$$

Exemple

On peut appliquer directement la formule ci-dessus pour factoriser ou effectuer une division dite polynômiale, pas vraiment au programme mais bien utile.
Par exemple pour factoriser dans $\mathbb{R}$ le polynôme P définie par $P(x) = x^3 - 1$ on écrit :

$$P(x) = x^3 - 1^3$$

- La formule donne directement :
$$P(x) = x^3 - 1^3 = (x-1)(x^2+x+1)$$
On peut chercher à factoriser le deuxième facteur qui est du second degré, le discriminant est négatif et l'on n'a pas de racine réelle.
- Ou alors par division polynomiale :

$$\begin{array}{rrr|l}
x^3 & & -1 & x-1 \\ \cline{4-4}
-x^3+x^2 & & & x^2+x+1 \\ \cline{1-1}
x^2 & & & \\
-x^2+x & & & \\ \cline{1-2}
 & x-1 & & \\
 & -x+1 & & \\ \cline{2-3}
 & & 0 &
\end{array}$$

Division Polynomiale en Vidéo

Pour une explication en vidéo de la division polynomiale : https://youtu.be/Ra-bie1t5iE?si=oCflOYoji5rFhTnI

Exercice 1

Factoriser dans $\mathbb{C}$ le polynôme P définie par $P(z) = z^3 + 1$.

Correction

- La formule donne directement :
$$P(z) = z^3 - (-1)^3 = (z+1)(z^2-z+1)$$
- Remarque : On avait par division polynomiale :

$$\begin{array}{rrr|l}
z^3 & & +1 & z+1 \\ \cline{4-4}
-z^3-z^2 & & & z^2-z+1 \\ \cline{1-1}
-z^2 & & & \\
z^2+z & & & \\ \cline{1-2}
 & z+1 & & \\
 & -z-1 & & \\ \cline{2-3}
 & & 0 &
\end{array}$$

- On peut chercher à factoriser le deuxième facteur qui est du second degré.
L'expression $z^2 - 1z + \ 1$ est du second degré de la forme $az^2 + bz + c$ avec :

$$\left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{array}\right. \Bigg| \implies \Delta = -3 < 0$$

Le discriminant Δ étant strictement négatif, l'expression polynôme admet deux racines complexes conjugués :

$$z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \overline{z_1} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$$

- Donc

$$\boxed{P(x) = (z+1)\left(z - \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)\left(z - \frac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)}$$

VI.2 Racines d'un polynôme

Propriété 18 (Racines d'un polynôme)

Soit α un nombre complexe. Soit P un polynôme à coefficients réels de degré n non nul.
Si α est une racine de P, alors il existe un polynôme Q de degré $n-1$ tel que, pour tout complexe z,

$$P(z) = (z-\alpha)Q(z)$$

Preuve

- Soit α un nombre complexe. Soit P un polynôme à coefficients réels de degré n non nul.
  On a donc des coefficients réels a_k avec $a_n \neq 0$ tels que :

$$P(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

- D'après la propriété 17, pour tout entier naturel non nul p et pour α complexe il existe Q_{p-1} polynôme unitaire de degré $p-1$ tel que :

$$z^p - \alpha^p = (z-\alpha) \times Q_{p-1}(z)$$

- Si α est une racine de P, alors $P(\alpha) = 0$ et donc :

$$\begin{aligned} P(z) &= P(z) - P(\alpha) \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k z^k - \sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k \underbrace{\left(z^k - \alpha^k\right)}_{(z-\alpha)\times Q_{k-1}(z)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k \times (z-\alpha) \times Q_{k-1}(z) \\ &= (z-\alpha) \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k \times Q_{k-1}(z)}_{Q \text{ de degré } (n-1)} \\ &= (z-\alpha)Q(z) \end{aligned}$$

Exercice 2

Déterminer toutes les racines complexes du polynôme $z^3 - 2z^2 + z - 2$ après avoir trouvé une racine entière.

Correction

- $\alpha = 2$ est une racine évidente de ce polynôme puisque $P(2) = 0$.
- Par division polynomiale :

$$\begin{array}{r|l} z^3 - 2z^2 + z - 2 & z-2 \\ \cline{2-2} -\, z^3 + 2z^2 & z^2+1 \\ \cline{1-1} z - 2 & \\ -\, z + 2 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

- Le deuxième facteur est un polynôme du second degré aux racines évidentes i et $-\mathrm{i}$.
- Donc le polynôme P admet 3 racines distinctes : 2 ; i et $-\mathrm{i}$.

Définition 5 (Ordre de multiplicité, racine simple, racine multiple)

Soit α un nombre complexe. Soit P un polynôme à coefficients réels de degré n non nul.
Soit α une racine de P et m entier, $m \geqslant 1$.

- Si il existe un polynôme Q de degré $(n-m)$ tel que, pour tout complexe z,

$$P(z) = (z-\alpha)^m \times Q(z)$$

  On dit que α est une racine d'ordre m du polynôme P.

- On dit que α est racine simple de P si $m = 1$, et racine multiple si $m > 1$.

Exercice 3

- Déterminer les racines du polynôme P_1 défini par $P_1(z) = z^2 + 1$ avec leur ordre de multiplicité.
- de même avec le polynôme P_2 défini par $P_2(z) = z^3 - 4z^2 + 5z - 2$.

Correction

- Le polynôme P_1 défini par $P_1(z) = z^2 + 1$ admet deux racines simples qui sont i et $-\mathrm{i}$:

$$P_1(z) = (z - \mathrm{i})(z + \mathrm{i})$$

- Déterminer les racines du polynôme P_2 défini par $P_2(z) = z^3 - 4z^2 + 5z - 2$.

  - $\alpha = 1$ est une racine évidente de P_2 car $P_2(1) = 0$ et de ce fait :

$$P_2(Z) = (z-1)(az^2 + bz + c), \quad (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$$

  - En développant on obtient :

$$\begin{aligned}(z-1)(az^2+bz+c) &= az^3 + (-a+b)z^2 + (c-b)z - c \\ &= z^3 - 4z^2 + 5z - 2\end{aligned}$$

    Par identification des coefficients :

$$\begin{cases} a = 1 \\ -a + b = -4 \\ c - b = 5 \\ c = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = 2 \\ b = -3 \end{cases}$$

    Donc

$$P_2(Z) = (z-1)(z^2 - 3z + 2)$$

  - On pouvait aussi directement effectuer une division polynomiale :

$$\begin{array}{r|l} z^3 - 4z^2 + 5z - 2 & z-1 \\ \cline{2-2} -z^3 + z^2 & z^2 - 3z + 2 \\ \cline{1-1} -3z^2 + 5z & \\ 3z^2 - 3z & \\ \cline{1-1} 2z - 2 & \\ -2z + 2 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

- Donc pour tout complexe z :

$$P_2(z) = (z-1)(z^2 - 3z + 2)$$

Or le polynôme du second degré $Q(z) = z^2 - 3z + 2$ est de discriminant $\Delta = 1$ et admet deux racines réelles 1 et 2. De ce fait :

$$Q(z) = z^2 - 3z + 2 = (z-1)(z-2)$$

- Pour conclure : Le polynôme P_2 défini par $P_2(z) = z^3 - 4z^2 + 5z - 2$ admet une racine multiple $\alpha = 1$ qui est d'ordre 2 et une racine simple $\beta = 2$ car :

$$P_2(z) = (z-1)^2(z-2)$$

Propriété 19

Pour tout entier naturel n, un polynôme de degré n admet au plus n racines distinctes.

Preuve

- Pour $n \in \mathbb{N}$, on note R_n la proposition « Un polynôme de degré n admet au plus n racines. » On souhaite démontrer que R_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Initialisation : Un polynôme de degré 0 est une constante non nulle. Ce polynôme n'a donc pas de racine, c'est-à-dire qu'il a au plus 0 racine. On en déduit que R_0 est vraie.
- Hérédité : supposons que pour n fixé, la proposition R_n est vraie « Un polynôme de degré n admet au plus n racines.»

  Soit P un polynôme de degré $n+1$.

  - Si P n'a pas de racine, il en compte alors 0 et $0 < n+1$, donc R_{n+1} est vraie.
  - Si P admet au moins une racine a, alors, d'après la propriété précédente, il se factorise par $(z-a)$: il existe donc un polynôme Q de degré n tel que, pour tout nombre complexe z,

  $$P(z) = (z-a)Q(z)$$

  D'après l'hypothèse de récurrence, Q a au plus n racines, ce qui fait que P en a au plus $n+1$. Ainsi, R_{n+1} est vraie et la propriété est bien héréditaire.
- Conclusion : la propriété R_n est vraie au rang 0 et est héréditaire, donc d'après le principe de récurrence elle est vraie pour tout entier n.

VI.3 Théorème fondamental de l'algèbre ou Théorème de d'Alembert-Gauss

Remarque historique

- Le mathématicien hollandais GIRARD Albert (1595-1632), poursuivant les travaux de CARDAN, affirme :

  « *qu'un polynôme de degré n admet exactement n racines (comptés avec leur ordre de multiplicité)* ».

- Ce théorème appelé, encore aujourd'hui, théorème fondamentale de l'algèbre voit sa première démonstration proposée par D'Alembert (1717 - 1783). Cependant celle-ci est incomplète car considère comme acquis un résultat intermédiaire très délicat.
- En 1799, le mathématicien allemand GAUSS Carl Friedrich (1777-1855), passe sa thèse dont le sujet est la démonstration du théorème fondamentale de l'algèbre (appelé maintenant théorème de d'Alembert-Gauss). Il remarque que les démonstrations de d'ALEMBERT, EULER et LAGRANGE sont incomplètes. Pour sa 1ère démonstration de 1799, il introduit la représentation plane des nombres complexes et raisonne géométriquement. GAUSS publiera 2 nouvelles démonstrations en 1816 et 1850.
- Ce théorème est démontré complètement pour la première fois en 1806 par Argand (1768 - 1822)

Théorème 2 (Théorème fondamental de l'algèbre ou Théorème de d'Alembert-Gauss)

- Pour tout entier naturel n, un polynôme de degré n admet exactement n racines, comptées avec leur ordre de multiplicité.
- Autre formulation : Tout polynôme non constant à coefficients réels s'écrit comme un produit de polynômes à coefficients réels de degrés 1 ou 2.

Remarque

La démonstration est largement hors programme mais il faut vraiment connaitre et comprendre ce résultat.

Propriété 20 (Formules de Viète (Admis))

Soient n un entier naturel non nul et $P(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$ un polynôme de degré n à coefficients réels.

- La somme S de toutes ses racines (comptées avec leur ordre de multiplicité) est égale à :

$$\boxed{S = -\frac{a_{n-1}}{a_n}}$$

- et leur produit P est égal à :

$$\boxed{P = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}}$$

Remarque

Dans le cas d'un polynôme unitaire de degré 2, on en déduit pour α et β donnés, α et β sont les racines du polynôme :

$$A(x) = x^2 - Sx + P$$

où $S = \alpha + \beta$ et $P = \alpha \times \beta$.

Remarque historique

Ces formules portent le nom de François Viète, mathématicien français du 16e siècle, juriste et conseiller privé du Roi Henri IV.
Il est considéré comme le premier algébriste moderne.
Pour en savoir plus : www.math93.com

Exercice 4

Déterminer un pôlynôme dont les racines sont $\alpha = 1 + 2\,\mathrm{i}$ et $\beta = \overline{\alpha}$

Corrigé

- D'après la remarque précédente, α et β sont les racines du trinôme A définie par :

$$A(z) = z^2 - Sz + P$$

avec :

$$\begin{cases} S = \alpha + \beta = 2 \\ P = \alpha \times \beta = \alpha\overline{\alpha} = |\alpha|^2 = 5 \end{cases}$$

- Donc

$$\boxed{A(z) = z^2 - 2z + 5}$$

VII. Formule du binôme de Newton

VII.1 Combinaisons (on prend de l'avance ...)

Définition 6 (Combinaisons)

Une **combinaison** de p éléments d'un ensemble fini E ayant n éléments est une partie de E ayant p éléments.

On note $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ le nombre de combinaisons de p éléments de E mais aussi C_n^p. On peut le lire p parmi n.

Remarque : $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ est le nombre de façons de choisir p éléments parmi n.

Remarque

Pour une combinaison de p éléments, on ne tient pas compte de l'ordre des éléments, c'est ce qui la distingue des p-uplets ou p-listes.
Aide - Combinaison : tirage du loto (pas d'ordre) et p-uplets ou p-listes : podium olympique ou tiercé (ordre).

Exemple

Soit $E = \{a\ ;\ b\ ;\ c\ ;\ d\}$ un ensemble ayant $n = 4$ éléments.
On a alors :

- 1 combinaison à 0 élément de E : $\varnothing$ donc $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$;
- 4 combinaison à 1 élément de E : $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$ donc $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 4$;
- 6 combinaison à 2 éléments de E : $\{a\ ;\ b\}$, $\{a\ ;\ c\}$, $\{a\ ;\ d\}$, $\{b\ ;\ c\}$, $\{b\ ;\ d\}$, $\{c\ ;\ d\}$ donc $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 6$;
- 4 combinaison à 3 éléments de E : $\{a\ ;\ b\ ;\ c\}$, $\{a\ ;\ b\ ;\ d\}$, $\{a\ ;\ c\ ;\ d\}$, $\{b\ ;\ c\ ;\ d\}$, donc $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 4$;
- 1 combinaison à 4 éléments de E : $\{a\ ;\ b\ ;\ c\ ;\ d\}$ donc $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 1$;

Propriété 21

Soit n et p des entiers naturels tels que $1 \leqslant p \leqslant n$. L'ensemble E possède n éléments.

1.

$$\boxed{\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)}{p!}}$$

2.

$$\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \quad ; \quad \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} = n \quad ; \quad \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = 1$$

VII.2 Formule du binôme de Newton

Théorème 3 (Formule du binôme de Newton)

Pour tous nombres complexes a et b, et pour tout entier naturel n, on a :

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \; a^k \, b^{n-k}}$$

Preuve

Une preuve en vidéo :

https://youtu.be/raWJysLaIsU?si=DxPPyUX6GaoNbLjr

La démonstration se fait par récurrence en utilisant la relation de Pascal qui est utilisée pour construire le triangle du même nom :

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

Exemple

$(2+i)^3 =$ ....
....
....
....
....
....
....
....

$(1-2i)^5 =$ ....
....
....
....
....
....
....
....

Fin du cours