Math93.com

Matrices Partie 1 : Calcul matriciel et système

Tle Maths Experte

I. Une approche historique

Remarque historique

Les concepts de déterminants et de matrice sont historiquement très liés. Ils proviennent en fait de l'étude durant le 18ème siècle des systèmes d'équations linéaires. Dès 1678, le mathématicien allemand Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646-1716) les aborde et utilise la notation avec indices dans le cas d'un système de 3 équations à 2 inconnues.
L'historien Jean BAUDET précise que c'est dans un texte de 1683 (ayant peu d'influence sur la communauté scientifique) que LEIBNIZ aborde le sujet.
Dès ses premiers travaux sur la théorie des nombres en 1844, le mathématicien allemand EISENSTEIN (1823-1852) s'approprie et utilise le symbolisme en tableau de son compatriote Carl Friedrich GAUSS (1777-1855).

On considère souvent le mathématicien anglais Arthur CAYLEY (Richmond 1821- Cambridge 1895) comme l'inventeur des matrices. Lorsqu'il les introduit, le déterminant existe déjà, noté en tableau depuis 1815 à l'initiative de CAUCHY Augustin-Louis (1789-1857). CAYLEY et SYLVESTER James Joseph (1814-1897) travaillent en collaboration pendant près de 30 ans (en algèbre).
Le terme de matrice est introduit par SYLVESTER en 1850 pour désigner un tableau rectangulaire de nombres (qu'il ne pouvait pas appeler déterminant) .
Les matrices, une entité distincte des nombres. Mais c'est avec la publication par CAYLEY, en 1858, d'un article des Philosophical Transactions (Londres) : *A memoir on the Theory of Matrices*, que la notion de matrice prend tout son sens.
Les matrices deviennent alors une entité distinctes du déterminant et sont étudiées comme telle.

Pour en savoir plus : www.math93.com/...

II. La notion de Matrice

II.1 Matrice

Définition 1 (Mémo : Ligne $\times$ Colonne)

On appelle matrice de dimension $m \times n$, ou d'ordre $m \times n$, ou de format (m, n), un tableau de m lignes et n colonnes de nombres réels.
Les nombres de la matrice sont appelés **coefficients de la matrice**.
On note $a_{i,j}$ l'élément de la matrice situé à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne.

Mémo : Dimension = (Lignes , Colonnes)

Une matrice A est représentée entre deux parenthèses ou deux crochets

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,j} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \text{ ou } A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,j} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

Exemple

La matrice $P = \begin{pmatrix} 110 & 120 & 130 \\ 210 & 220 & \boxed{230} \end{pmatrix}$ est une matrice d'ordre 2×3.
Le coefficient $a_{2,3}$ de la matrice P est $a_{2,3} = 230$.
On a donc :

$$P = \begin{pmatrix} 110 & 120 & 130 \\ 210 & 220 & 230 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

II.2 Matrices particulières

II.2.1 Matrice carrée

Définition 2

Une matrice ayant le même nombre n de lignes et de colonnes est une matrice carrée d'ordre n.

Exemple

La matrice $M = \begin{pmatrix} -12 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée de dimension 3.

II.2.2 Matrice diagonale

Définition 3

Une matrice carrée dont tous les coefficients sont nuls, sauf éventuellement les coefficients de la diagonale, est appelée matrice diagonale.
On note $\text{Diag}(d_1 ; \cdots ; d_n)$ la matrice diagonale d'ordre n dont les coefficients diagonaux sont respectivement $(d_1 ; \cdots ; d_n)$.

Exemple

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale que l'on peut noter $\text{Diag}(1 ; -5 ; 0)$.

La matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas une matrice diagonale.

II.2.3 Matrice Identité

Définition 4

La matrice diagonale d'ordre n dont tous les coefficients sur la diagonale sont égaux à 1 est appelée matrice identité d'ordre n, on la note I_n.

Exemple

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

II.2.4 Vecteur ligne

Définition 5

Une matrice formée d'une seule ligne et de n colonnes est une matrice ligne ou vecteur ligne.

Exemple

La matrice $A = \begin{pmatrix} 60 & 50 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice ligne de dimension 1×3.

II.2.5 Vecteur colonne

Définition 6

Une matrice formée de m lignes et d'une seule colonne est une matrice colonne ou vecteur colonne.

Exemple

La matrice $C = \begin{pmatrix} 25 \\ 28 \\ 30 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne de dimension 3×1.

II.3 Égalité de deux matrices

Définition 7

Deux matrices A et B sont égales si, et seulement si, elles ont même dimension et que tous leurs éléments situés à la même place sont égaux.

Exemple

Dire que les matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 2-a & -3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & b+2 \end{pmatrix}$ sont égales signifie que

$$\begin{cases} 2-a=1 \\ b+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases}$$

III. Matrices et opérations

III.1 Transposée d'une matrice et matrice symétrique

Définition 8

La transposée ${}^tA$ (aussi notée A^T) d'une matrice A de dimension $m \times n$ est la matrice de dimension $n \times m$ obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A.
Si la matrice A est de termes a_{ij}, alors sa transposée est de termes a_{ji}.

Exemple

La transposée de la matrice $P = \begin{pmatrix} 60 & 50 & 0 \\ 70 & 90 & 120 \end{pmatrix}$ de dimension 2×3 est la matrice ${}^tP = \begin{pmatrix} 60 & 70 \\ 50 & 90 \\ 0 & 120 \end{pmatrix}$ de dimension 3×2.

Définition 9 (Matrice Symétrique)

Une matrice carrée d'ordre n est symétrique lorsque, pour tous $i \in \{1 ; \cdots ; n\}$ et $j \in \{1 ; \cdots ; n\}$, on a

$$a_{i,j} = aj, i$$

Autrement dit, une matrice carrée est symétrique si elle est égale à sa transposée.

$$\boxed{A \text{ symétrique} \iff A = {}^tA}$$

III.2 Addition de matrices

Définition 10

La somme de deux matrices A et B de **même dimension** est la matrice notée $A + B$ obtenue en ajoutant les éléments de A et ceux de B situés à la même place.
Si $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ sont deux matrices d'ordre $m \times n$ alors

$$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$$

Exemple

Soient les matrices $P_0 = \begin{pmatrix} 50 & 40 & 0 \\ 70 & 90 & 120 \end{pmatrix}$ et $P_1 = \begin{pmatrix} 60 & 50 & 0 \\ 70 & 90 & 120 \end{pmatrix}$:

$$P_0 + P_1 = \begin{pmatrix} 50+60 & 40+50 & 0+0 \\ 70+70 & 90+90 & 120+120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 & 90 & 0 \\ 140 & 180 & 240 \end{pmatrix}$$

III.2.1 Propriétés

Définition 11

Si A, B et C sont des matrices de même dimension alors :

- $A+B=B+A$.
- $A+(B+C)=(A+B)+C$

III.3 Multiplication par un réel

Définition 12

Le produit d'une matrice A par un réel k est la matrice kA obtenue en multipliant chaque élément de A par le réel k.
Si $A=(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}}$ est une matrice d'ordre $m\times n$ alors pour tout réel k

$$kA=(ka_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}}$$

Exemple

Si $P=\begin{pmatrix}60&50&0\\70&90&120\end{pmatrix}$ alors :

$$1,1\times P=\begin{pmatrix}1,1\times 60&1,1\times 50&1,1\times 0\\1,1\times 70&1,1\times 90&1,1\times 120\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}66&55&0\\77&99&132\end{pmatrix}$$

III.3.1 Propriété

Définition 13

Soient A et B deux matrices de même dimension et k un réel on a :

$$k\,(A+B)=kA+kB$$

IV. Produit de matrices

IV.1 Multiplication d'une matrice ligne par une matrice colonne

Définition 14

Soient L une matrice ligne de dimension $1 \times n$ et C une matrice colonne de dimension $n \times 1$.
Le produit $L \times C$ de ces deux matrices est :

$$\begin{pmatrix} l_1 & \cdots & l_i & \cdots & l_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_i \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = (l_1 \times c_1 + \cdots + l_i \times c_i + \cdots + l_n \times c_n)$$

Le produit $L \times C$ de ces deux matrices est la matrice de dimension 1×1 qui n'a qu'un seul élément.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 60 & 50 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 25 \\ 28 \\ 30 \end{pmatrix} = (60 \times 25 + 50 \times 28 + 0 \times 30) = (2900)$$

IV.2 Produit de deux matrices (Ligne $\times$ Colonne)

Définition 15

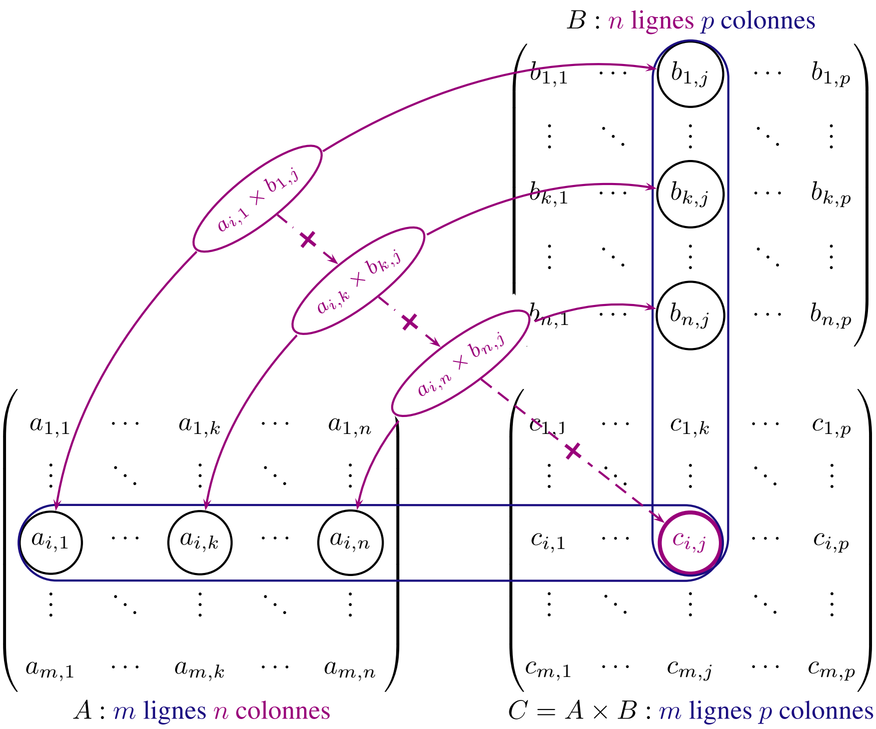
Soit A et B deux matrices d'ordres respectifs (m, n) et (n, p).
La produit $A \times B$ est la matrice P d'ordre (m, p), de coefficients p_{ij} avec :

$$p_{ij} = L_i \times C_j$$

où L_i est la $i^{\text{ième}}$ ligne de A et C_j est la $j^{\text{ième}}$ colonne de B.

Chaque élément $p_{i,j}$ de la matrice P est le produit de la matrice constituée de la i-ième ligne de la matrice A par la matrice constituée de la j-ième colonne de la matrice B ($1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant p$).

***Mémo* : Ligne $\times$ Colonne**



Exemple

Soient les deux matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 60 & 50 & 0 \\ 70 & 90 & 120 \end{pmatrix}$$

La matrice A est d'ordre 2×2 et la matrice B est d'ordre 2×3. Le produit $C = A \times B$ est une matrice d'ordre 2×3 :

- L1xC1 : L'élément $c_{1,1}$ de la matrice C s'obtient en effectuant le produit $\begin{bmatrix} 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 60 \\ 70 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2 \times 60 + 0,4 \times 70 \end{bmatrix}$
- L1xC2 : L'élément $c_{1,2}$ de la matrice C s'obtient en effectuant le produit $\begin{bmatrix} 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 50 \\ 90 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2 \times 50 + 0,4 \times 90 \end{bmatrix}$
- L1xC3 : L'élément $c_{1,3}$ de la matrice C s'obtient en effectuant le produit $\begin{bmatrix} 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 120 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2 \times 0 + 0,4 \times 120 \end{bmatrix}$
- L2xC1 : L'élément $c_{2,1}$ de la matrice C s'obtient en effectuant le produit $\begin{bmatrix} 0,8 & 0,6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 60 \\ 70 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 \times 60 + 0,6 \times 70 \end{bmatrix}$
- L2xC2 : L'élément $c_{2,2}$ de la matrice C s'obtient en effectuant le produit $\begin{bmatrix} 0,8 & 0,6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 50 \\ 90 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 \times 50 + 0,6 \times 90 \end{bmatrix}$
- L2xC3 : L'élément $c_{2,3}$ de la matrice C s'obtient en effectuant le produit $\begin{bmatrix} 0,8 & 0,6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 120 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 \times 0 + 0,6 \times 120 \end{bmatrix}$

Soit en définitive :

$$C = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 60 & 50 & 0 \\ 70 & 90 & 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & 46 & 48 \\ 90 & 94 & 72 \end{pmatrix}$$

Exercice 1

A vous maintenant !
Effectuez le produit des deux matrices :

$$A' = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} \text{ et } B' = \begin{pmatrix} 60 & 50 \\ 70 & 90 \end{pmatrix}$$

La matrice A' est d'ordre 2×2 et la matrice B' est d'ordre 2×2. Le produit $C' = A' \times B'$ est une matrice d'ordre 2×2 :

Correction

- L1xC1 : L'élément $c'_{1,1}$ de la matrice C' s'obtient en effectuant le produit

$$\begin{bmatrix} 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 60 \\ 70 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2 \times 60 + 0,4 \times 70 \end{bmatrix} = [40]$$

- L1xC2 : L'élément $c'_{1,2}$ de la matrice C' s'obtient en effectuant le produit

$$\begin{bmatrix} 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 50 \\ 90 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2 \times 50 + 0,4 \times 90 \end{bmatrix} = [46]$$

- L2xC1 : L'élément $c'_{2,1}$ de la matrice C' s'obtient en effectuant le produit

$$\begin{bmatrix} 0,8 & 0,6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 60 \\ 70 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 \times 60 + 0,6 \times 70 \end{bmatrix} = [90]$$

- L2xC1 : L'élément $c'_{2,2}$ de la matrice C' s'obtient en effectuant le produit

$$\begin{bmatrix} 0,8 & 0,6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 50 \\ 90 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 \times 50 + 0,6 \times 90 \end{bmatrix} = [94]$$

Soit en définitive :

$$C' = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 60 & 50 \\ 70 & 90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & 46 \\ 90 & 94 \end{pmatrix}$$

IV.2.1 Remarque : Attention aux dimensions

Si le nombre de colonnes de la matrice A est différent du nombre de lignes de la matrice B, le produit $A \times B$ n'est pas défini !

IV.3 Attention : Non Commutativité

Il n'y a pas commutativité de la multiplication matricielle, il faut faire très attention à l'ordre dans lequel on effectue les calculs :

$$A \times B \neq B \times A \qquad \text{(en général)}$$

Remarque : On peut trouver des matrices qui "commutent" mais la commutativité n'est pas généralisable à toutes les matrices.

Exemple

- Un exemple de non commutativité :

$$C \times D = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$D \times C = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Un exemple de deux matrices qui commutent : Soient A et B définies par :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 2 \\ 14 & -8 & 2 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Alors :

- D'une part :

$$B \times A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 2 \\ 14 & -8 & 2 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4 \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4I_3$$

- D'autre part :

$$A \times B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 & -4 & 2 \\ 14 & -8 & 2 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4 \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4I_3$$

- On a bien exhibé deux matrices qui commutent :

$$A \times B = B \times A$$

Remarque historique

La notion de matrices commutatives a été introduite par Cayley dans son mémoire sur la théorie des matrices, qui a également fourni la première axiomatisation des matrices. Les premiers résultats significatifs sur les matrices commutatives ont été prouvés par Frobenius en 1878.

IV.4 Cas particulier : Avec des matrices lignes et colonnes

Propriété 1

Par définition du produit matricielle :

- Le produit d'une matrice d'ordre (m, n) par une matrice colonne d'ordre $(n, 1)$ est une matrice colonne d'ordre $(m, 1)$.
- Le produit d'une matrice ligne d'ordre $(1, n)$ par une matrice d'ordre (n, p) par une matrice ligne d'ordre $(1, p)$.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 10 + 2 \times 11 + 3 \times 12 \\ 4 \times 10 + 1 \times 11 + 0 \times 12 \\ 2 \times 10 + 0 \times 11 + 1 \times 12 \\ 0 \times 10 + 1 \times 11 + 2 \times 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 68 \\ 51 \\ 32 \\ 35 \end{pmatrix}$$

Exemple

$$\begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underbrace{10 \times 1 + 11 \times 0 + 12 \times 2}_{34} & \underbrace{10 \times 2 + 11 \times 1 + 12 \times 0}_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & 31 \end{pmatrix}$$

IV.5 Puissances d'une matrice carré

Définition 16

Soit A une matrice carré d'ordre n et p un entier supérieur ou égal à 1.
La puissance p-ième de la matrice A est la matrice carrée d'ordre n obtenue en effectuant le produit de p matrices égales à A.

$$A^p = \underbrace{A \times A \times \cdot \times A}_{p \text{ fois}}$$

Par convention, une matrice quelconque non nulle à la puissance 0 est égale à la matrice identité, on a :

$$A^0 = I_n$$

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$:

$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 2 \\ 14 & -8 & 2 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 2 \\ 14 & -8 & 2 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4 \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4I_3$$

Mais on a aussi

$$A^3 = A \times A^2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 & -4 & 2 \\ 14 & -8 & 2 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I_3$$

On remarque que les matrices A et A^2 commutent, c'était l'exemple proposé dans le paragraphe IV.3 : $A \times A^2 = A^2 \times A$.

IV.6 Propriétés et opérations

Définition 17

Soient A, B et C trois matrices carrées et k en réel non nul :

- $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$.
- $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$.
- $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$.
- $k(A \times B) = (kA) \times B$.
- Si $A = B$ alors on a :

$$A \times C = B \times C \text{ et } C \times A = C \times B$$

ATTENTION

$A \times C = B \times C$ ne signifie pas nécessairement que $A = B$

Exemple

$$A \times C = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & -5 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$B \times C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & -5 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ATTENTION

$A \times B = 0$ ne signifie pas nécessairement que $A = 0$ ou $B = 0$.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -6 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -3 \\ 5 & -6 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

V. Inverse d'une Matrice carrée

V.1 Matrice identité

Propriété 2

Soit A une matrice carrée d'ordre n et I_n la matrice identité d'ordre n alors

$$A \times I_n = I_n \times A = A$$

Exemple

$$A \times I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

et

$$I_3 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

V.2 Inverse d'une matrice carrée

V.2.1 Définition

Définition 18 (et propriété)

Soit A une matrice carrée d'ordre n.

- S'il existe une matrice carrée B d'ordre n telle que

$$A \times B = B \times A = I_n$$

  Alors la matrice A est dite inversible et B est son inverse.
- Si la matrice A est inversible, son inverse est unique et est notée A^{-1}.

En pratique, pour montrer qu'une matrice est la matrice inverse d'une matrice donnée on ne va montrer qu'une seule égalité, en effet :

Propriété 3

Soit B une matrice carrée d'ordre n telle que $A \times B = I_n$, alors on a nécessairement $B \times A = I_n$.

Exercice 2

Les exercices ne demandent que rarement de calculer l'inverse d'une matrice donnée. Si c'est la cas, on exige juste le résultat à l'aide de la calculatrice. La question est plus classiquement de prouver qu'une matrice est l'inverse d'une autre.

Exemple : **Soit A et B définies ci-dessous. Montrer que B est l'inverse de la matrice A.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -4 & 3 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 15 & 8 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & -9 & -5 \end{pmatrix}$$

Preuve

On a facilement :

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

Cela suffit puisque l'on a montré (propriété 3) que :

$$AB = I_3 \Longrightarrow BA = I_3$$

La matrice A est inversible, d'inverse la matrice $B = A^{-1}$.

V.2.2 Inverse d'une Matrice carrée d'ordre 2

Définition 19

Soit A une matrice carrée d'ordre 2 définie par :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice A est le nombre définie par :

$$\boxed{\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc}$$

La notion de déterminant de matrice se généralise aux matrices carrées d'ordre n mais la définition est plus délicate ...

Propriété 4

- Une matrice carrée est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.
- En particulier, si A est une matrice carrée d'ordre 2 inversible :

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

V.3 Généralisations (Hors programme)

Propriété 5 (Règle de Sarrus : déterminant d'ordre 3 (Hors Programme))

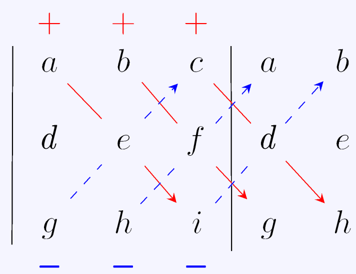
Soit une matrice A de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

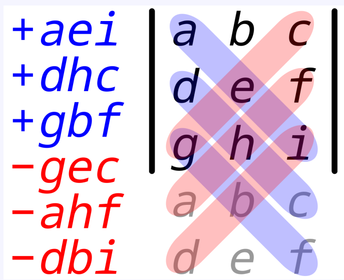
Le déterminant de A peut être calculé selon la règle de Sarrus :

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32})$$

On peut retrouver cette formule avec cet arrangement :



ou celui-ci :



Propriété 6 (Généralisation (Hors Programme))

Il existe une formule générale pour obtenir l'inverse d'une matrice carrée d'ordre n.
Elle nécessite le calcul du déterminant de la matrice (chose parfois difficile) et des n^2 cofacteurs qui sont au signe près, des déterminants d'ordre $(n-1)$.

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} . {}^t\mathrm{com}(\mathbf{A})$$

Cette formule n'a guère qu'un intérêt théorique car en pratique, elle est trop lourde pour calculer explicitement A^{-1} dès que $n \geqslant 4$ et la méthode plus élémentaire à base d'opérations élémentaires sur les lignes (inversion par pivot de Gauss) est plus efficace, aussi bien pour l'humain que pour la machine.

VI. Application aux systèmes linéaires

Définition 20

Un système linéaire à n équations et n inconnues :

$$(S) \quad : \quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$$

peut s'écrire sous la forme matricielle

$$AX = B$$

où

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \; ; \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \; ; \; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

A est une matrice carrée d'ordre n, X et B sont des matrices colonnes de dimension $n \times 1$.

Propriété 7

Soit un système linéaire ayant pour écriture matricielle $AX = B$, où A est une matrice carrée d'ordre n, X et B sont des matrices colonnes de dimension $n \times 1$.
Si la matrice A est inversible, alors le système admet une unique solution donnée par $X = A^{-1}B$.

Exercice 3

Soit le système

$$(S) \quad : \quad \begin{cases} x - 3y + z = 6 \\ 2x - y + 3z = -2 \\ -4x + 3y - 6z = 1 \end{cases}$$

Posons

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -4 & 3 & -6 \end{pmatrix} \; ; \; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alors le système (S) peut s'écrire sous la forme matricielle $AX = B$.
En utilisant le résultat de l'exemple précédent, résoudre ce système.

Preuve

La matrice A est inversible et d'après l'exemple du V.2.1 on a :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 15 & 8 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & -9 & -5 \end{pmatrix}$$

On en déduit en multipliant les deux membres de l'égalité par A^{-1} que :

$$AX = B \Leftrightarrow A^{-1} \times AX = A^{-1} \times B$$

Or le produit d'une matrice par son inverse est égal à la matrice identité soit :

$$\begin{aligned} AX = B &\Leftrightarrow \underbrace{A^{-1} \times A}_{I_3} \times X = A^{-1} \times B \\ &\Leftrightarrow I_3 \times X = A^{-1}B \\ &\Leftrightarrow X = A^{-1}B \end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 15 & 8 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & -9 & -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

On obtient ainsi, l'unique solution du système $\underline{x = -4\,;\, y = -3 \text{ et } z = 1}$.

Remarque

Si la matrice A n'est pas inversible alors, soit le système n'admet pas de solution, soit il en admet une infinité.

VII. Matrices et transformations du plan

On se place dans un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan. Soient $a, b, cetd$ quatre nombres réels.

VII.1 Translation (par addition)

Définition 21 (Translation)

- La translation de vecteur $\vec{t}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est l'application qui à tout point $M(x\ ;\ y)$ associe le point $M'(x'\ ;\ y')$ tel que :

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{t} \iff \begin{pmatrix} x'-x \\ y-y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

- On peut définir cette transformation par une addition matricielle :

$$\boxed{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}} \iff \boxed{X' = X + T}$$

VII.2 Symétrie, rotation et homothétie (par multiplication)

Propriété 8

Soit la matrice de transformation notée :

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

On se place dans un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan.
On considère la transformation du plan qui à tout point $M(x\ ;\ y)$ associe le point $M'(x'\ ;\ y')$ tel que :

$$\boxed{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} \iff \boxed{X' = TX}$$

1. Pour une symétrie axiale par rapport à l'axe des abscisses :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \text{Diag}\,(1\ ;\ -1)$$

2. Pour une symétrie axiale par rapport à l'axe des ordonnées :

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{Diag}\,(-1\ ;\ 1)$$

3. Pour une rotation de centre O et d'angle θ :

$$T = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

4. Pour une homothétie de centre O et de rapport k :

$$T = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = kI_2$$

Exercice 4

Écrire la matrice associée à la rotation de centre O et d'angle $\theta = -\dfrac{2\pi}{3}$.

Preuve

On obtient avec $\theta = -\dfrac{2\pi}{3}$:

$$\mathrm{T} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Fin du cours