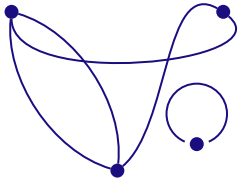
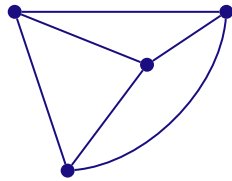
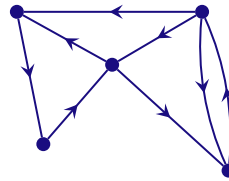
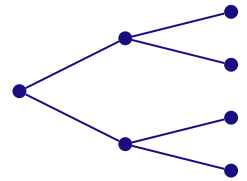




I. La notion de Graphe

De manière générale, un graphe est un ensemble de sommets et d'arêtes (ou arcs) reliant ces sommets. Il existe différents types de graphes, orientés ou non, ou autorisant plusieurs arcs entre deux sommets.

Graphe G_1 Graphe G_2 Graphe G_3 Graphe G_4

I.1 Définitions

Définition 1

Un graphe non orienté $G = (S, A)$ est déterminé par la donnée de deux ensembles :

- un ensemble fini non vide S dont les éléments sont appelés sommets
- un ensemble A de paires de sommets appelées arêtes.



Exemple

- Si $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ est l'ensemble des sommets d'un graphe G , une arête a de l'ensemble A s'écrit $a = \{x_i, x_j\}$ où x_i et x_j sont les extrémités de a .
- Les sommets x_i et x_j sont alors adjacents dans le graphe G et on dit qu'ils sont incidentes avec l'arête a .
- Lorsque les deux extrémités sont confondues ($x_i = x_j$) l'arête s'appelle une boucle.
- Deux arêtes sont dites parallèles lorsqu'elles ont mêmes extrémités.

I.1.1 Ordre d'un graphe

Définition 2

On appelle ordre d'un graphe le nombre (n) de sommets de ce graphe.



Exemple

les graphes G_1 et G_2 sont d'ordre 4 ; le graphe G_3 est d'ordre 5 et le graphe G_4 est d'ordre 7.

I.1.2 Graphe simple

Définition 3

Un graphe est dit simple si deux sommets distincts sont joints par au plus une arête et s'il est sans boucle.

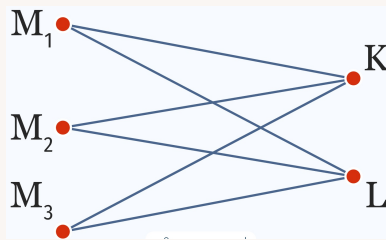
I.1.3 Bilan : premières Définitions

Définition 4

1. Un graphe est une représentation composée de sommets (des points) reliés par des arêtes (segments).
2. Un graphe orienté est un graphe dont les arêtes sont munies d'un sens de parcours.
3. L'ordre d'un graphe est le nombre de sommets de ce graphe.
4. Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes incidentes à ce sommet, sans tenir compte de leur éventuel sens de parcours.
5. Un graphe est dit simple si deux sommets distincts sont joints par au plus une arête et s'il est sans boucle.



Exemple

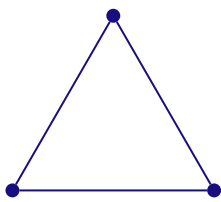


- Le graphe ci-contre est simple d'ordre 5.
- Les sommets K et L sont de degré 3.
- Les sommets M_1 , M_2 et M_3 sont de degré 2.

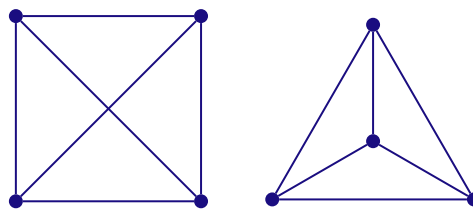
I.2 Graphe Complet (et sommets adjacents)

Définition 5

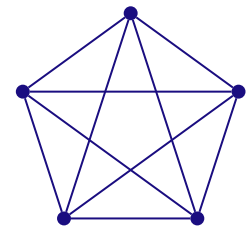
Un graphe complet K_n est un graphe simple d'ordre $n \geq 1$ dont tous les sommets sont deux à deux adjacents.



K_3



Deux représentations du K_4

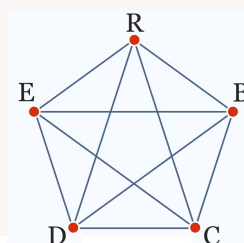


K_5



Exemple

- Le graphe $KL M_1 M_2 M_3$ de l'exemple précédent n'est pas complet car les sommets K et L ne sont pas adjacents.
- Le graphe CDERB ci dessous est complet d'ordre 5.



I.3 Degré d'un sommet

Définition 6

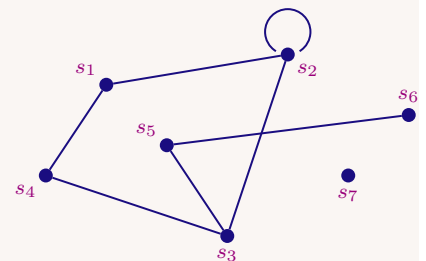
On appelle degré d'un sommet le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité (les boucles étant comptées deux fois). Ce degré vaut 0 si le sommet est isolé.



Exemple

Dans le graphe ci-contre, les degrés des sommets sont :

Sommets	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7
Degrés	2	4	2	3	2	1	0



I.3.1 Degré d'un sommet dans un graphe orienté

Définition 7

Soit s un sommet d'un graphe orienté G .

- On note $d^+(s)$ le degré extérieur du sommet s , c'est-à-dire le nombre d'arcs ayant s comme extrémité initiale.
- On note $d^-(s)$ le degré intérieur du sommet s , c'est-à-dire le nombre d'arcs ayant s comme extrémité finale.

Le degré du sommet s est :

$$d(s) = d^+(s) + d^-(s)$$



Exemple

Dans le graphe ci-contre, les degrés des sommets sont :

$$d^+(s_1) = 2 \text{ et } d^-(s_1) = 1 \text{ d'où } d(s_1) = 3$$

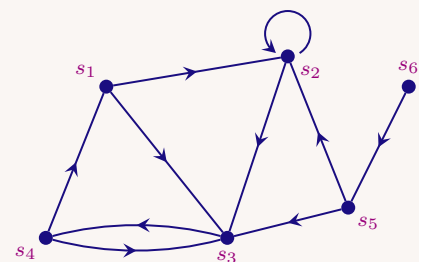
$$d^+(s_2) = 2 \text{ et } d^-(s_2) = 3 \text{ d'où } d(s_2) = 5$$

$$d^+(s_3) = 1 \text{ et } d^-(s_3) = 4 \text{ d'où } d(s_3) = 5$$

$$d^+(s_4) = 2 \text{ et } d^-(s_4) = 1 \text{ d'où } d(s_4) = 3$$

$$d^+(s_5) = 2 \text{ et } d^-(s_5) = 1 \text{ d'où } d(s_5) = 3$$

$$d^+(s_6) = 1 \text{ et } d^-(s_6) = 0 \text{ d'où } d(s_6) = 1$$



Remarque

Dans un graphe orienté, la somme des degrés extérieurs et la somme des degrés intérieurs sont égales au nombre d'arcs.

Si on note a le nombre d'arcs d'un graphe orienté alors $\sum d^+(s) = \sum d^-(s) = a$.

Par exemple si dans une réunion on échange des cadeaux, le nombre de cadeaux offerts est égal au nombre de cadeaux reçus, c'est le nombre de cadeaux échangés.

I.3.2 Théorème et corrolaire

Théorème 1

La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est égale à deux fois le nombre d'arêtes de ce graphe ; c'est donc un nombre pair.



Preuve

| Lorsqu'on additionne les degrés des sommets, une arête est comptée deux fois, une fois pour chaque extrémité.

Théorème 2 (Corrolaire)

Dans un graphe, le nombre de sommets impairs est un entier pair.



Preuve

| Soit p la somme des degrés des sommets pairs et m la somme des degrés des sommets impairs.
 $m + p$ est égal à la somme des degrés des sommets c'est donc un nombre pair donc m est un nombre pair.
 Or une somme d'entiers impairs est paire si, et seulement si, il y a un nombre pair de termes.
 On en déduit que le nombre de sommets impairs est un entier pair.

I.3.3 Proposition

Définition 8

Dans un graphe simple d'ordre $n > 1$, il existe deux sommets distincts s_i et s_j ayant le même degré.



Preuve

| Soit G un graphe simple d'ordre $n > 1$. Le degré d'un sommet s quelconque du graphe G est un entier $d(s)$ tel que :
 $0 \leq d(s) \leq n - 1$.
 Supposons que les degrés des sommets soient différents.
 Les degrés des n sommets sont les entiers $\{0, 1, \dots, n - 1\}$ et il existe un sommet s_i de degré 0 et un sommet s_j de degré $n - 1$.
 Or si $d(s_j) = n - 1$ cela signifie qu'il est adjacent à tous les sommets du graphe et en particulier au sommet s_i donc $d(s_i) \geq 1$
 Ce qui est en contradiction avec $d(s_i) = 0$.

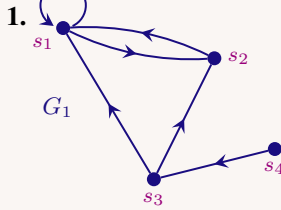
I.4 Représentation matricielle d'un graphe

Définition 9

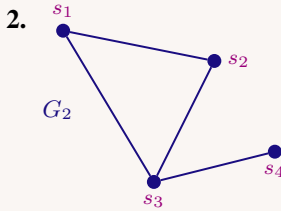
Soit $G = (S, A)$ un graphe d'ordre n dont les sommets sont numérotés de 1 à n .
 La matrice d'adjacence de G est égale à la matrice carrée $M = (m_{ij})$ de dimension $n \times n$ où m_{ij} est égal au nombre d'arêtes d'extrémités les sommets s_i et s_j .
 Dans le cas d'un graphe orienté, m_{ij} est égal au nombre d'arcs ayant pour origine le sommet s_i et pour extrémité finale le sommet s_j .



Exemple



La matrice d'adjacence du graphe orienté G_1 est $M(G_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$



La matrice d'adjacence du graphe simple G_2 est $M(G_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$



Remarque

1. La matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est symétrique.
2. La diagonale de la matrice d'adjacence d'un graphe simple ne comporte que des 0.
3. La demi somme de tous les coefficients de la matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est égale au nombre d'arêtes de ce graphe.
4. La somme de tous les coefficients de la matrice d'adjacence d'un graphe orienté est égale au nombre d'arcs de ce graphe.
 - La somme des coefficients de la ligne i est égale au nombre de successeurs du sommet s_i .
 - La somme des coefficients de la colonne i est égale au nombre de prédécesseurs du sommet s_i .

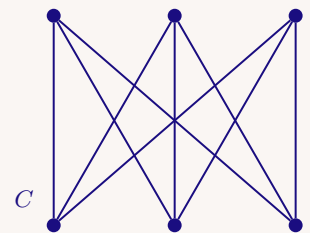
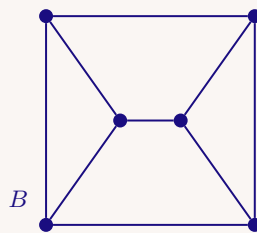
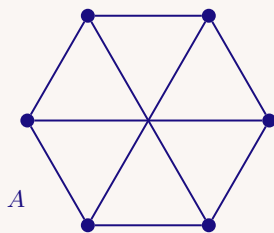
I.5 Graphes isomorphes

Deux graphes isomorphes ont la même structure : peu importe la façon dont ils sont dessinés, il est possible de déplacer les sommets pour que l'un soit la copie conforme de l'autre.



Exemple

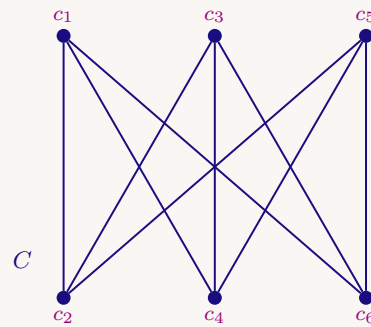
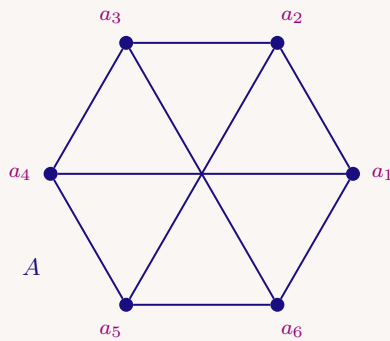
Considérons les trois graphes ci-dessous :



Les trois graphes ont le même ordre (6), le même nombre d'arêtes (9) et les sommets des trois graphes sont tous de degré 3.

Or dans B il y a deux sous graphes complets d'ordre 3 ce qui n'est pas le cas pour les graphes A et C. Donc B n'est pas isomorphe à A et C.

Montrons que les graphes A et C sont isomorphes.



Les sommets étant numérotés comme indiqué ci-dessus les deux graphes ont la même matrice d'adjacence :

$$M_A = M_C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc A et C sont isomorphes.



Remarque

- Le graphe B est planaire : on peut le dessiner sans que ses arêtes se croisent.
- Le graphe C (ou A) est un graphe biparti : il existe une partition de son ensemble S de sommets en deux sous-ensembles X et Y telle que chaque arête du graphe a une extrémité dans X et l'autre dans Y .
Ce n'est pas un graphe planaire, il est impossible de le dessiner sans que ses arêtes se croisent.

II. Chaînes, cycles

Les graphes sont souvent utilisés pour modéliser des problèmes associés à des parcours ou à des successions d'actions. Pour cela, on introduit la notion de chaîne.

II.1 Définitions

Définition 10

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté.

Une chaîne est une liste finie et alternée de sommets et d'arêtes, débutant et finissant par des sommets, telle que chaque arête est incidente avec les sommets qui l'encadrent dans la liste.

Le premier et le dernier élément de la liste sont les extrémités initiale et finale de la chaîne.

Définition 11

Si le graphe est simple, on peut définir une chaîne par la liste de ses sommets ou de ses arêtes.

1. La longueur d'une chaîne est égale au nombre d'arêtes qui la composent.
2. Une chaîne dont toutes les arêtes sont distinctes est une chaîne simple.
3. Une chaîne dont tous les sommets (sauf peut-être les extrémités) sont distincts est une chaîne élémentaire.
4. Une chaîne est fermée si l'origine et l'extrémité finale de la chaîne sont confondues.
5. Une chaîne fermée est un cycle si elle est composée d'arêtes toutes distinctes.



Remarque

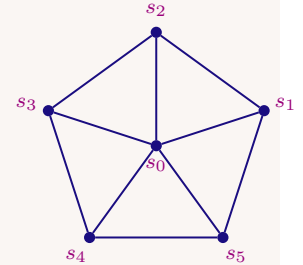
Les définitions précédentes, peuvent être transposées au cas des graphes orientés. On parlera de chaîne orientée ou chemin et de cycle orienté ou circuit.



Exemple

Dans le graphe ci-contre :

- La chaîne $\{s_0; s_1; s_0; s_2; s_0; s_3; s_0; s_4; s_0; s_5; s_0\}$ est une chaîne fermée de longueur 10.
- La chaîne $\{s_1; s_2; s_3; s_0; s_4; s_5\}$ est une chaîne élémentaire de longueur 5.
- La chaîne $\{s_1; s_2; s_0; s_3; s_4; s_0; s_5; s_1\}$ est un cycle de longueur 7.



II.2 Chaînes de longueur donnée

II.2.1 Nombre de chaînes

Définition 12

Soit G un graphe et M sa matrice d'adjacence.

Le nombre de chaînes de longueur n joignant le sommet i au sommet j est donné par le terme d'indice i, j de la matrice M^n .

Soient n et k deux entiers naturels non nuls et M la matrice d'adjacence d'un graphe d'ordre n , dont les sommets sont numérotés de 1 à n et rangés dans l'ordre croissant.

Le terme de la i -ième ligne et de la j -ième colonne de la matrice M^k donne le nombre de chaînes (ou de chemins) de longueur k reliant le sommet i au sommet j .



Remarque

$M^1 = M$ donne le nombre de chaînes (ou de chemins) de longueur 1 reliant deux sommets.

II.2.2 Distance

Définition 13

Soit G un graphe; si x et y sont deux sommets de G , la distance de x à y notée $d(x, y)$, est la longueur d'une plus courte chaîne de G reliant x à y .



Remarque

- La distance d'un sommet à lui même est nulle.
- S'il n'existe pas de chaînes joignant deux sommets x et y , la distance de x à y est infinie.

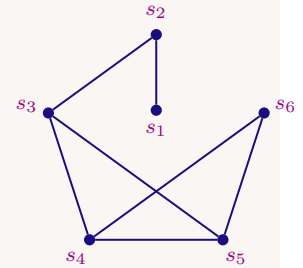
II.2.3 Diamètre

Définition 14

On appelle diamètre d'un graphe la plus grande des distances entre deux sommets du graphe.



Exemple



Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice d'adjacence du graphe G ci-contre

Déterminons la matrice des distances D du graphe, dont le coefficient $d_{i,j}$ est égal à la distance entre les sommets i et j . La distance d'un sommet à lui même est nulle et, on utilise le symbole ∞ pour indiquer que la distance entre deux sommets n'est pas encore fixée.

$$D = \begin{pmatrix} 0 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ donne les distances égales à 1 :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 1 & 0 & 1 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 1 & 0 & 1 & 1 & \infty \\ \infty & \infty & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \infty & \infty & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \infty & \infty & \infty & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ donne les distances égales à 2 :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \infty & \infty & \infty \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & \infty \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ \infty & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \infty & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \infty & \infty & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 6 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 6 & 4 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 6 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ donne les distances égales à 3 :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & \infty \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \infty & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice $M^4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 2 & 7 & 7 & 2 \\ 4 & 2 & 16 & 10 & 10 & 12 \\ 1 & 7 & 10 & 16 & 15 & 9 \\ 1 & 7 & 10 & 15 & 16 & 9 \\ 2 & 2 & 12 & 9 & 9 & 10 \end{pmatrix}$ donne les distances égales à 4 :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La plus grande des distances entre deux sommets du graphe est 4 donc le diamètre du graphe est 4.

III. Graphes connexes

III.1 Connexité

Définition 15

Un graphe G est connexe s'il existe au moins une chaîne entre deux sommets quelconques G .

Autrement dit : Un graphe est connexe si on peut atteindre n'importe quel sommet à partir d'un sommet quelconque en parcourant différentes arêtes

III.1.1 Algorithme

L'algorithme suivant permet de déterminer tous les sommets qui peuvent être atteints à partir d'un sommet.

Soit G un graphe et x un sommet de G :

Marquer provisoirement (au crayon) le sommet x
 TANT QUE des sommets sont provisoirement marqués

choisir un sommet y provisoirement marqué

marquer provisoirement les sommets adjacents non marqués

marquer définitivement (à l'encre) y

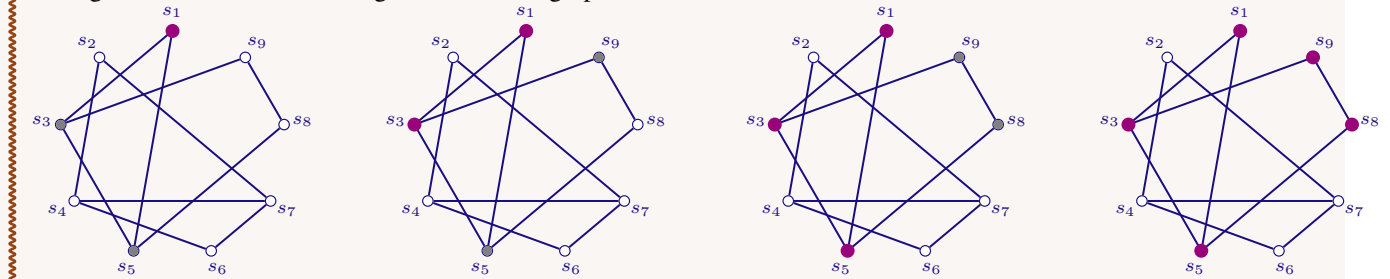
FIN TANT QUE

Si tous les sommets sont définitivement marqués alors le graphe est connexe, sinon on a obtenu la classe de connexité du sommet x .



Exemple

La figure suivante illustre cet algorithme sur un graphe



Le graphe n'est pas connexe, il n'existe pas de chaîne entre les sommets s_1 et s_2 .

III.2 Cycle eulérien

III.2.1 Définition

Définition 16

Un cycle eulérien (respectivement une chaîne eulérienne) dans un graphe G est un cycle (respectivement une chaîne) contenant chaque arête de G une et une seule fois.

III.2.2 Théorème 1

Définition 17

Un graphe connexe admet un cycle eulérien si, et seulement si, tous ses sommets ont un degré pair.



Preuve

- Si le graphe possède 0 ou 1 sommet, la preuve est triviale, nous supposons donc que l'ordre du graphe est supérieur ou égal à 2.

Si le graphe connexe admet un cycle eulérien alors en chaque sommet le cycle eulérien « entrant » dans le sommet doit « ressortir » et comme les arêtes du cycle ne peuvent être utilisées qu'une fois, chaque sommet est de degré pair.

- Réciproquement :

Soit G un graphe connexe dont tous les sommets sont de degré pair.

Comme G possède au moins deux sommets, tous les sommets de G sont de degré supérieur ou égal à 2. Ceci implique qu'il existe au moins un cycle dans G .

Formons un cycle C_1 dans G (chaîne fermée dont toutes les arêtes sont distinctes).

- Si C_1 contient toutes les arêtes du graphe alors G admet un cycle eulérien et le théorème est démontré.
- Dans le cas contraire, le sous graphe H de G défini par les arêtes non utilisées par C_1 a tous ses sommets de degré pair, le cycle contenant un nombre pair d'arêtes incidentes pour chaque sommet.

Comme G est connexe, H possède au moins un sommet commun avec le cycle C_1 . Soit x_i un tel sommet. Construisons alors, de la même manière que précédemment, un cycle C_2 dans H à partir de x_i .

En insérant dans le cycle C_1 à partir du sommet x_i le cycle C_2 , on obtient un cycle C'_1 . Si ce cycle contient toutes les arêtes de G , C'_1 est le cycle eulérien cherché.

Sinon, on continue ce processus, qui se terminera car les sommets du graphe G sont en nombre fini.

III.2.3 Théorème 2

Définition 18

Un graphe connexe possède une chaîne eulérienne si, et seulement si, le nombre de sommets de degré impair est égal à 0 ou 2.

Si le nombre de sommets de degré impair est égal à 2, alors les deux sommets de degré impair sont les extrémités de la chaîne eulérienne



Preuve

Soit G un graphe connexe. Si le nombre de sommets de degré impair est nul, alors le graphe G admet un cycle eulérien.

Si le nombre de sommets de degré impair est égal à 2. Soit s_i et s_j les deux sommets de degré impair.

Le graphe G' obtenu en ajoutant l'arête $s_i s_j$ au graphe G est connexe et tous ses sommets sont de degré pair. G' admet un cycle eulérien dont l'origine est le sommet s_i .

Par conséquent G contient une chaîne eulérienne qui commence en s_i et se termine en s_j .

III.2.4 Algorithme

Les démonstrations précédentes permettent de construire une chaîne eulérienne dans un graphe connexe dont le nombre de sommets de degré impair est 0 ou 2.

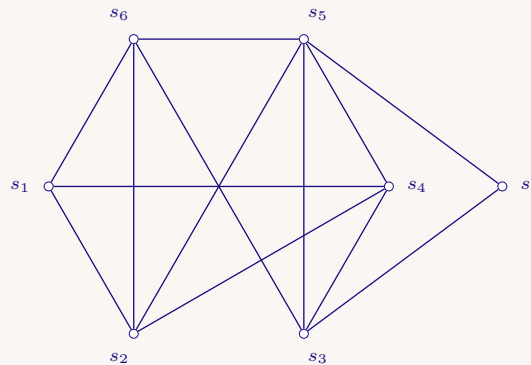
```

SI tous les sommets sont de degré pair
    construire un cycle  $C$  à partir d'un sommet quelconque
SINON
    construire une chaîne simple  $C$  ayant pour extrémités les deux sommets de degré impair
FIN SI
Marquer les arêtes de  $C$ 
TANT QUE il reste des arêtes non marquées
    choisir un sommet  $x$  de  $C$ 
    SI il existe un cycle d'origine  $x$  ne contenant aucune des arêtes marquées
        marquer les arêtes du cycle d'origine  $x$ 
        remplacer dans  $C$  le sommet  $x$  par le cycle d'origine  $x$ 
    FIN SI
FIN TANT QUE
  
```



Exemple

Considérons le graphe suivant :



Le cycle $\{s_1; s_6; s_5; s_7; s_3; s_4; s_2; s_1\}$ contient tous les sommets du graphe. Donc G est connexe.

Il n'y a que deux sommets de degré impair s_1 et s_5 et le graphe est connexe donc il existe une chaîne eulérienne d'extrémités s_1 et s_5 .

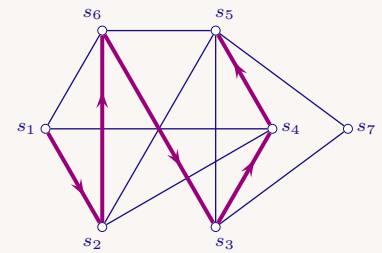
ÉTAPE 1

Les deux sommets de degré impair sont s_1 et s_5

On construit une chaîne simple joignant ces deux sommets :

$$C = \{s_1 ; s_2 ; s_6 ; s_3 ; s_4 ; s_5\}$$

On marque les arêtes de la chaîne C



ÉTAPE 2

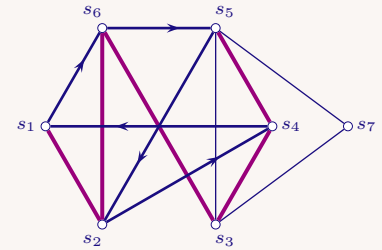
Le cycle simple $c_1 = \{s_1 ; s_6 ; s_5 ; s_2 ; s_4 ; s_1\}$ ne contient aucune des arêtes de la chaîne C .

On marque le cycle c_1

On fusionne la chaîne C avec le cycle c_1 en remplaçant le sommet s_1 dans la chaîne C par le cycle c_1 :

$$C = \{s_1 ; s_6 ; s_5 ; s_2 ; s_4 ; s_1 ; s_2 ; s_6 ; s_3 ; s_4 ; s_5\}$$

Il reste encore des arêtes non marquées, on recommence l'étape 2

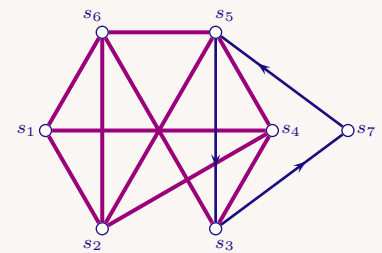


Le cycle $c_2 = \{s_3 ; s_7 ; s_5 ; s_3\}$ ne contient aucune des arêtes de la chaîne C .

On fusionne la chaîne C avec le cycle c_2 en remplaçant le sommet s_3 dans la chaîne C par le cycle c_2 :

$$C = \{s_1 ; s_6 ; s_5 ; s_2 ; s_4 ; s_1 ; s_2 ; s_6 ; s_3 ; s_7 ; s_5 ; s_3 ; s_4 ; s_5\}$$

Toutes les arêtes sont marquées C est une chaîne eulérienne.



IV. Plus court chemin

La recherche du meilleur itinéraire que ce soit en distance, en temps ou en coût d'un point à un autre peut être modélisée par la recherche du plus court chemin dans un graphe.

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à la recherche d'un plus court chemin dans un graphe entre deux sommets donnés.

IV.1 Graphe pondéré

IV.1.1 Définition

Définition 19

On appelle graphe pondéré, un graphe (orienté ou non) dont les arêtes ont été affectées d'un nombre appelé poids (ou coût).

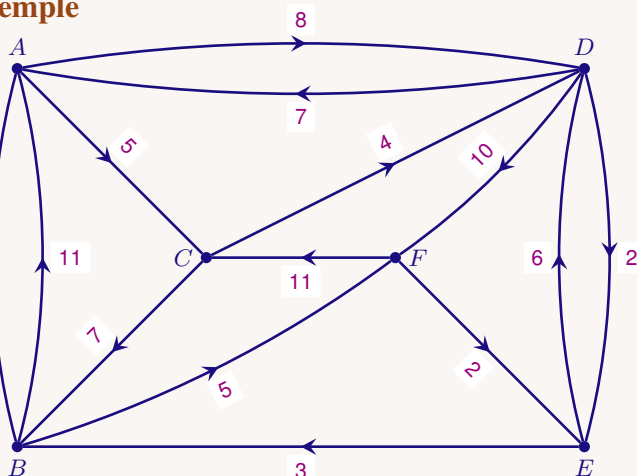
Par analogie avec la matrice d'adjacence, on peut définir la matrice des poids $P(a_{i,j})$ du graphe, dont les coefficients $a_{i,j}$ correspondent aux poids des arêtes (ou des arcs dans le cas d'un graphe orienté) :

$$a_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ \infty & \text{s'il n'existe pas d'arêtes (ou d'arc) entre les sommets } x_i \text{ et } x_j \\ p_{ij} & \text{où } p_{ij} \text{ est le poids de l'arête (ou de l'arc) entre les sommets } x_i \text{ et } x_j \end{cases}$$

On utilise le symbole ∞ pour indiquer qu'il n'y a pas d'arêtes entre deux sommets.



Exemple



Les sommets du graphe étant rangés dans l'ordre alphabétique :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 13 & 5 & 8 & \infty & \infty \\ 11 & 0 & \infty & \infty & \infty & 5 \\ \infty & 7 & 0 & 4 & \infty & \infty \\ 7 & \infty & \infty & 0 & 2 & 10 \\ \infty & 3 & \infty & 6 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & 11 & \infty & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

IV.1.2 Longueur d'un chemin

Définition 20

Soit $C(x, y)$ un chemin (ou une chaîne) dans un graphe pondéré G du sommet x vers le sommet y . La longueur de ce chemin est égale à la somme des poids de chacun arcs (ou de chacune des arêtes) qui le constituent.



Remarque

Cette définition généralise la définition de la longueur d'une chaîne dans un graphe non pondéré, il suffit d'attribuer un poids égal à 1 à chaque arête du graphe.

Dans l'exemple précédent, la longueur du chemin $ACDEBF$ est 19.

Si on souhaite déterminer le plus court chemin du sommet A au sommet F, on peut essayer d'énumérer tous les chemins $ABF, ADF, ACBF, ACDF, ADEBF, ACDEBF$ et calculer leurs longueurs. Mais avec un graphe de taille plus importante, ceci risque de devenir rapidement impossible.

Pour résoudre ce problème, on fait appel à des algorithmes.

IV.2 Algorithme de dijkstra

E. W. Dijkstra (1930-2002) a proposé en 1959 un algorithme qui permet de calculer le plus court chemin entre un sommet particulier et tous les autres dans un graphe pondéré dont tous les poids sont positifs.

L'algorithme comporte une phase d'initialisation. À chaque sommet on attribue un poids qui vaut 0 pour le sommet de départ et infini pour les autres sommets.

Le traitement de l'algorithme consiste à examiner les sommets les uns après les autres et à sélectionner le sommet x auquel on a affecté la plus petite distance du sommet de départ jusqu'à x .

On recommence tant qu'il reste des sommets à sélectionner.

Soit G un graphe connexe dont les arêtes sont pondérées par des nombres positifs.

NOTATIONS :

- S la liste des sommets du graphe
- s_0 le sommet du graphe à partir duquel on veut déterminer les plus courts chemins aux autres sommets
- $l(x, y)$ le poids de l'arête entre deux sommets x et y
- $\delta_s(x)$ la longueur d'un chemin du sommets s_0 au sommet x
- $V^+(x)$ la liste des successeurs du sommet x
- $p(x)$ le prédécesseur du sommet x
- X liste des sommets restant à traiter.
- E liste des sommets déjà traités.

INITIALISATION :

POUR CHAQUE $x \in S$ FAIRE $\delta_s(x) = \infty$ On attribue un poids ∞ à chacun des sommets x

$\delta_s(s) = 0$ Le poids du sommet s_0 est nul

$X = S$ La liste des sommets restant à traiter est initialisée à S

$E = \emptyset$ La liste des sommets déjà traités vide

TRAITEMENT :

TANT_QUE $X \neq \emptyset$ FAIRE Tant que la liste des sommets restant à traiter n'est pas vide

Sélectionner dans la liste X le sommet x avec $\delta_s(x)$ minimum

Retirer le sommet x de la liste X

Ajouter le sommet x à la liste E

POUR CHAQUE $y \in V^+(x) \cap X$ FAIRE On examine tous les successeurs y du sommet x qui ne sont pas traités

SI $\delta_s(y) > \delta_s(x) + l(x, y)$ ALORS

$\delta_s(y)$ prend la valeur $\delta_s(x) + l(x, y)$ La distance du sommet s_0 au sommet y est minimale

$p(y) = x$ le sommet x est le prédécesseur du sommet y

FIN SI

FIN POUR

FIN TANT_QUE



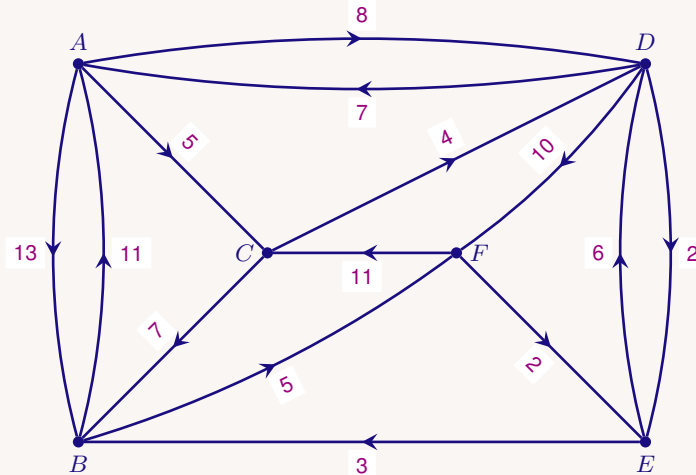
Remarque

- L'algorithme de Dijkstra fournit les longueurs des plus courts chemins du sommet origine aux différents sommets.
- Pour déterminer le plus court chemin du sommet origine à un sommet x , il suffit de remonter la liste des prédécesseurs en partant de x .



Exemple

Considérons le graphe suivant :



On souhaite déterminer le plus court chemin du sommet A au sommet F.

A	B	C	D	E	F	Sommets sélectionnés
0	∞	∞	∞	∞	∞	A(0)
	13(A)	5(A)	8(A)	∞	∞	C(5)
	12(C)		8(A)	∞	∞	D(8)
	12(C)			10(D)	18(D)	E(10)
	12(C)				18(D)	B(12)
					17(B)	F(17)

COMMENTAIRES

Initialisation;
 $\delta(A) = 0$ A est sélectionné.

B, C et D sont les successeurs de A qui ne sont pas traités;
 $0 + 13 < \infty$ donc $\delta(B) = 13$ et $p(B) = A$;
 $0 + 5 < \infty$ donc $\delta(C) = 5$ et $p(C) = A$;
 $0 + 8 < \infty$ donc $\delta(D) = 8$ et $p(D) = A$;
 $\delta_{min} = 5$, Le sommet C est sélectionné.

B et D sont les successeurs de C qui ne sont pas traités;
 $5 + 7 < 13$ donc $\delta(B) = 12$ et $p(B) = C$;
 $5 + 4 > 8$ on ne change pas $\delta(D) = 8$ et $p(D) = A$;
 $\delta_{min} = 8$, Le sommet D est sélectionné.

E et F sont les successeurs de D qui ne sont pas traités;
 $8 + 2 < \infty$ donc $\delta(E) = 10$ et $p(E) = D$;
 $8 + 10 < \infty$ donc $\delta(F) = 18$ et $p(F) = D$;
 $\delta_{min} = 10$, Le sommet E est sélectionné.

B est le successeur de E qui n'est pas traité;
 $10 + 3 > 13$ on ne change pas $\delta(B) = 12$ et $p(B) = C$;
 $\delta_{min} = 12$, Le sommet B est sélectionné.

F est le successeur de D qui n'est pas traité;
 $12 + 5 < 18$ donc $\delta(F) = 17$ et $p(F) = B$;
Le sommet F est le dernier sommet traité.

Ainsi, le plus court chemin de A à F est un chemin de longueur 17.

Dans la colonne F on lit que le prédécesseur de F est le sommet B . Le prédécesseur de B est C et le prédécesseur de C est A .
Ainsi, la liste des prédécesseurs est $F \leftarrow B \leftarrow C \leftarrow A$.
Le plus court chemin de A à F est donc : $A - C - B - F$.



Méthode

↳ Pour plus de clarté, suivre la vidéo présente sur cette page et faire le TP associé : www.math93.com

↩ **Fin du cours** ↪