Math93.com

Matrices Partie 3 : Calcul matriciel et Suites

Tle Maths Experte

I. Étude des suites de matrices de la forme $U_{n+1} = A.U_n$

k désigne un entier naturel non nul, $k \in \mathbb{N}^*$.

I.1 Définitions

Définition 1 (Notation de l'ensemble des matrices (même notation aux US))

L'ensemble des matrices à coefficients dans K (par exemple $K = \mathbb{R}$, ou $K = \mathbb{C}$, ou $K = \mathbb{N}$) possédant m lignes et n colonnes est noté $M_{m,n}(K)$ (ou parfois $M(m, n, K)$).
Lorsque $m = n$ (cas des matrices carrées) on note plus simplement $M_n(K)$.

Définition 2

Une suite de matrices colonnes (respectivement lignes) de taille $k \times 1$ (respectivement $1 \times k$) est une fonction qui, à tout entier naturel n, associe une matrice colonne (respectivement ligne) de même taille.

Exemple

La fonction U définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$U \ : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & M_{2,1}(\mathbb{N}) \\ n & \longmapsto & U_n = \begin{pmatrix} n \\ n^2 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

définit une suite de matrices colonnes de taille 2×1.

On a notamment :

$$\mathrm{U}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{U}_5 = \begin{pmatrix} 5 \\ 25 \end{pmatrix}$$

I.2 Propriété

Propriété 1

Soient A une matrice carrée d'ordre k et $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de matrices colonnes de taille $k \times 1$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{U}_0 \\ \mathrm{U}_{n+1} = AU_n \end{array} \right.$$

Alors pour tout entier n :

$$\mathrm{U}_n = A^n U_0$$

Preuve

La démonstration de cette propriété repose sur un raisonnement par récurrence et ne pose pas de difficulté.

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et (U_n) la suite de matrices définie par :

$$\mathrm{U}_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{U}_{n+1} = AU_n$$

1. Calculer U_1.

2. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, U_n en fonction de A et de n.

3. À l'aide de la calculatrice, calculer U_{10}.

Solution

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

II. Étude des suites de matrices de la forme $U_{n+1} = A.U_n + B$

On note dans la suite A une matrice carrée d'ordre k telle que $A - I_k$ est inversible et B une matrice colonne de taille $k \times 1$.

II.1 Propriétés

Propriété 2

Soit (U_n) une suite de matrices colonnes de taille $k \times 1$ dont le premier terme est la matrice colonne U_0 et vérifiant, pour tout entier naturel n,

$$U_{n+1} = AU_n + B$$

On définit également la matrice colonne

$$\mathrm{C} = -\left(\mathrm{A} - I_k\right)^{-1} B$$

et, pour tout entier naturel n, la suite de matrices colonnes (V_n) de terme général

$$\mathrm{V}_n = U_n - C$$

Alors la suite (V_n) vérifie :

$$\begin{cases} \mathrm{V}_0 = \mathrm{U}_0 - C \\ \mathrm{V}_{n+1} = \mathrm{AV}_n \end{cases}$$

et, pour tout entier naturel n,

$$\mathrm{V}_n = A^n V_0.$$

Par ailleurs, pour tout entier naturel n,

$$\mathrm{U}_n = A^n\left(\mathrm{U}_0 - C\right) + C$$

Remarque

Le principe est le même que celui des les suites arithmético-géométriques.

1. Pour mémoriser l'expression de C, il suffit de déterminer un invariant de U, pour cela on résout $U = AU + B$ et on obtient bien :
$$U = \mathrm{C} = -\left(\mathrm{A} - I_k\right)^{-1} B$$
2. Ensuite on démontre que la suite (V_n) définie par $V_n = U_n - C$ est une suite géométrique et on exprime V_n en fonction de n.
3. On termine en exprimant U_n en fonction de n.

Exercice 2

Soit $\mathbb{U}_n$ la suite définie par $\mathrm{U}_0 = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}$ et pour tout entier n par $\mathrm{U}_{n+1} = AU_n + B$ avec :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0 \\ 0 & 1{,}1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer U_1.
2. Justifier que $A - I_2$ est inversible.
3. Calculer C, l'élément invariant tel que $C = AC + B$.
4. Montrer que la suite (V_n) définie par $V_n = U_n - C$ vérifie $V_{n+1} = AV_n$.
5. En déduire le terme général de V_n.
6. Calculer V_{10}.

Solution

III. Graphes Probabilistes et chaîne de Markov (*Markov chain*)

III.1 Définitions

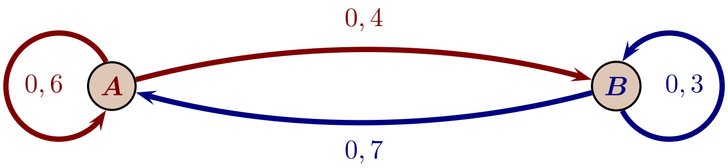
Définition 3

1. Un graphe pondéré est un graphe dans lequel chaque arête est affectée d'un nombre réel positif appelé poids de cette arête.
2. Un graphe probabiliste est un graphe orienté pondéré (sans arêtes parallèles) dans lequel la somme des poids des arêtes issues de chaque sommet est égale à 1.
   Autre définition : Un graphe probabiliste est un graphe orienté pondéré par des réels compris entre 0 et 1 et dans lequel la somme des poids des arêtes issues de chaque sommet est égale à 1.

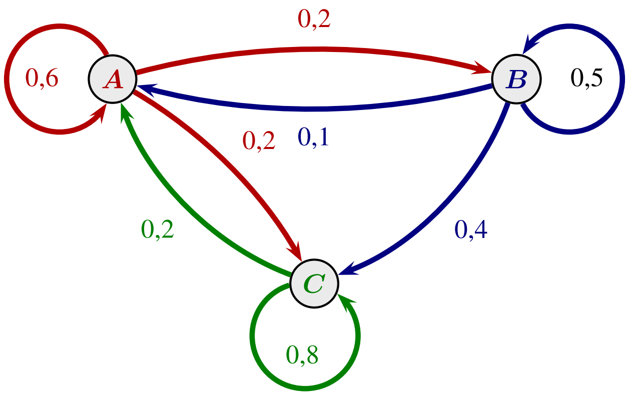
Les graphes probabilistes sont utilisés pour modéliser l'évolution d'un système pouvant changer aléatoirement d'état :

- les sommets du graphe sont les états possibles du système ;
- le poids d'une arête orientée issue du sommet i et d'extrémité j est la probabilité de passer de l'état i à l'état j.

Exemples



Ex. 1 : Graphe probabiliste à 2 états A et B.



Ex. 2 : Graphe probabiliste à 3 états A, B et C.

Définition 4 (Chaîne de Markov (*Markov chain*))

Une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires est une chaîne de Markov à deux états a et b (respectivement à trois états a, b et c) lorsque, pour tous x_i dans $\{a\ ;\ b\}$ (respectivement dans $\{a\ ;\ b\ ;\ c\}$), on a :

$$p_{\mathrm{X}_0=x_0,X_1=x_1,\ldots,X_k=x_k}\left(\mathrm{X}_{k+1}=x_{k+1}\right)=p_{\mathrm{X}_k=x_k}\left(\mathrm{X}_{k+1}=x_{k+1}\right)$$

La probabilité

$$p_{\mathrm{X}_k=x_k}\left(\mathrm{X}_{k+1}=x_{k+1}\right)$$

s'appelle probabilité de transition de l'état x_k à l'état x_{k+1}. L'ensemble $\{a\ ;\ b\}$ (respectivement $\{a\ ;\ b\ ;\ c\}$) est appelé espace des états.

Remarque

La définition d'une chaîne de Markov signifie que les états passés n'ont aucune influence sur les états futurs : seul l'état présent a son importance.

Markov Chain : In probability theory and statistics, a Markov chain or Markov process is a stochastic process describing a sequence of possible events in which the probability of each event depends only on the state attained in the previous event. Informally, this may be thought of as, "What happens next depends only on the state of affairs now." A countably infinite sequence, in which the chain moves state at discrete time steps, gives a discrete-time Markov chain (DTMC). A continuous-time process is called a continuous-time Markov chain (CTMC). Markov processes are named in honor of the Russian mathematician Andrey Markov (14 June 1856 - 20 July 1922) .

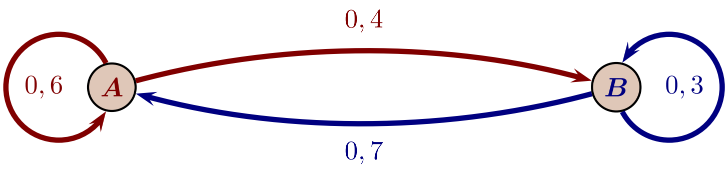
III.2 Matrice de transition (*transition matrix*)

Définition 5

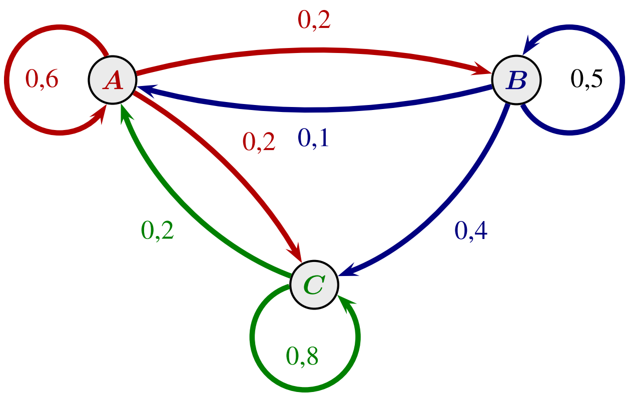
La <u>matrice de transition</u> (*transition matrix*) associée à un graphe probabiliste d'ordre k est la matrice carrée $M = (m_{i,j})$ d'ordre k telle que, pour tous entiers i et j vérifiant $1 \leqslant i \leqslant k$ et $1 \leqslant j \leqslant k$, $m_{i,j}$ est égal au poids de l'arête orientée d'origine le sommet i et d'extrémité le sommet j si cette arête existe, et est égal à 0 sinon.

<u>Autre formulation</u> : On considère une chaîne de Markov à k états, numérotés $1 ; \cdots ; k$, et on note $E = \{1 ; \cdots ; k\}$ l'espace des états.
La matrice de transition P associée à cette chaîne de Markov est la matrice carrée d'ordre k telle que, pour tout $i \in E$ et pour tout $j \in E$, le coefficient $m_{i,j}$ correspond à la probabilité de transition de l'état i vers l'état j.

Exemples



Ex. 1 : Graphe probabiliste à 2 états A et B.



Ex. 2 : Graphe probabiliste à 3 états A, B et C.

Exemples

Dans l'exemple 1, la matrice de transition M se construit à partir des probabilités suivantes :

- 1ère ligne : probabilité d'aller de A vers A, de A vers B ;
- 2ème ligne : probabilité d'aller de B vers A, de B vers B.

On obtient donc :

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}}$$

Dans l'exemple 2, la matrice de transition M se construit à partir des probabilités suivantes :

- 1ère ligne : probabilité d'aller de A vers A, de A vers B, de A vers C ;
- 2ème ligne : probabilité d'aller de B vers A, de B vers B, de B vers C ;
- 3ème ligne : probabilité d'aller de C vers A, de C vers B, de C vers C.

On obtient donc :

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,5 & 0,4 \\ 0,2 & 0 & 0,8 \end{pmatrix}}$$

Remarque

- Tous les coefficients sont positifs ou nuls.
- Pour chaque ligne la somme des coefficients est égale à 1.
- Cette matrice décrit le passage d'un état au suivant. Le coefficient $m_{i,j}$ est la probabilité conditionnelle d'être dans l'état j à l'instant $n+1$ sachant que l'on est dans l'état i à l'instant n.

III.3 État probabiliste

Définition 6

Un état probabiliste est une loi de probabilité sur l'ensemble des états possibles.
Cette loi est représentée par une matrice ligne telle que la somme des termes est égale à 1.

Exemples

Dans un graphe probabiliste à 2 états comme dans l'exemple 1, l'état probabiliste à l'étape n peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix} \text{ où } q_n = 1 - p_n$$

Dans un graphe probabiliste à 3 états comme dans l'exemple 2, l'état probabiliste à l'étape n peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{pmatrix} p_n & q_n & r_n \end{pmatrix} \text{ où } p_n + q_n + r_n = 1$$

IV. Évolution d'un état au cours du temps

IV.1 Proposition

On considère un système qui peut se trouver dans k états $1, 2, \cdots, k$ avec une certaine probabilité et on étudie l'évolution de ce système au cours du temps.

Définition 7

Soit $P_n = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_k \end{pmatrix}$ l'état probabiliste du système à l'instant n, M la matrice de transition et P_{n+1} l'état probabiliste du système à l'instant $n+1$. Alors, pour tout entier n, on a

$$P_{n+1} = P_n \times M$$

IV.2 Théorème

Définition 8

Si M est la matrice de transition d'un graphe probabiliste d'ordre p, si P_0 est la matrice ligne décrivant l'état initial et P_n l'état probabiliste à l'étape n, on a

$$P_n = P_0 \times M^n$$

Autre formulation : On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont on note M la matrice de transition associée et P_0 la distribution initiale. On note P_n la loi de X_n. On a, pour tout entier n,

$$P_{n+1} = P_n \times M \text{ et } P_n = P_0 \times M^n$$

IV.3 État stable

Définition 9 (État stable)

Un état stable d'un graphe probabiliste à deux états, de matrice de transition M est un état $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ tel que :

$$\begin{cases} P = P \times M \\ a + b = 1 \end{cases}$$

Propriété 3

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov à 2 ou 3 états de matrice de transition M. Il existe au moins une distribution initiale π telle que

$$\pi \times M = \pi$$

Une telle distribution est appelée distribution invariante de la chaîne de Markov.

IV.4 Propriété

Propriété 4 (État stable)

Pour tout graphe probabiliste, dont la matrice de transition M ne comporte pas de 0, l'état P_n converge vers un état stable π indépendant de l'état initial P_0.
Cet état stable vérifie l'égalité :

$$\pi = \pi \times M$$

Remarque

C'est une propriété fondamentale des chaînes de Markov à temps discret, en particulier celles qui sont irréductibles et apériodiques. Ces chaînes de Markov possèdent une matrice de transition M dont tous les éléments sont positifs (donc aucune transition impossible, ce qui est garanti par "ne comporte pas de 0").

Exemple

Exemple concret : Répartition des passagers dans un aéroport
Considérons un aéroport avec trois terminaux : Terminal A, Terminal B et Terminal C. Nous voulons modéliser les déplacements des passagers entre ces terminaux.
Matrice de transition
La matrice de transition M est donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}$$

Distribution stationnaire
Nous voulons trouver la distribution stationnaire $\pi = (\pi_A, \pi_B, \pi_C)$ telle que :

$$\pi = \pi \times M$$

Système d'équations
Cela revient à résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \pi_A = 0.6\pi_A + 0.2\pi_B + 0.1\pi_C \\ \pi_B = 0.3\pi_A + 0.5\pi_B + 0.3\pi_C \\ \pi_C = 0.1\pi_A + 0.3\pi_B + 0.6\pi_C \\ \pi_A + \pi_B + \pi_C = 1 \end{cases}$$

En soustrayant les termes adéquats de chaque équation et en ajoutant la condition $\pi_A + \pi_B + \pi_C = 1$, nous résolvons ce système pour trouver :

$$\pi = \left(\frac{16}{37}, \frac{11}{37}, \frac{10}{37}\right)$$

ou de manière simplifiée :

$$\pi \approx (0.432, 0.297, 0.270)$$

Interprétation
Cela signifie qu'à long terme, la répartition des passagers entre les terminaux sera environ 43.2% dans le Terminal A, 29.7% dans le Terminal B, et 27.0% dans le Terminal C, indépendamment du terminal initial.

Fin du cours