Math93.com

Devoir Surveillé n°1A (Correction)

Maths Expertes

Complexes

Durée 50 min - Coeff. 1

Noté sur 26 points

La calculatrice en mode examen est autorisée.

Exercice 1. Forme algébrique, Module et conjugué — 5 points

Déterminer la forme algébrique puis le module et le conjugué des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = (-5+7\,\mathrm{i})(-2+3\,\mathrm{i})$

Corrigé

- $z_1 = -1 - 29\,\mathrm{i}$
- $\overline{z_1} = -1 + 29\,\mathrm{i}$
- $|z_1| = \sqrt{962}$

2. $z_2 = \dfrac{1}{3-2\,\mathrm{i}}$

Corrigé

- $z_2 = \dfrac{3+2\,\mathrm{i}}{13}$
- $\overline{z_2} = \dfrac{3-2\,\mathrm{i}}{13}$
- $|z_2| = \dfrac{1}{\sqrt{13}}$

3. $z_3 = \mathrm{i}^{10}$

Corrigé

- $z_3 = (i^2)^5 = -1$
- $\overline{z_3} = -1$
- $|z_3| = 1$

Exercice 2. Équations — 9 points

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z + 3\,\mathrm{i} = \frac{z+2}{1+\mathrm{i}}$$

Corrigé

$$z + 3\,\mathrm{i} = \frac{z+2}{1+\mathrm{i}} \iff \boxed{z = -3 - 5\,\mathrm{i}}$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$\mathrm{i}\,\overline{z} - 1 = 2z + \mathrm{i}$$

Corrigé

Posons $z = x + \mathrm{i}\, y$ avec x et y réel. Alors $\overline{z} = x + \mathrm{i}\, y$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}\,\overline{z} - 1 = 2z + \mathrm{i} &\iff \mathrm{i}\,(x - \mathrm{i}\,y) - 1 = 2(x + \mathrm{i}\,y) + \mathrm{i} \\
&\iff (-1 + y) + \mathrm{i}\,x = 2x + \mathrm{i}\,(2y + 1) \\
&\iff \begin{cases} -1 + y = 2x \\ x = 2y + 1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases} \\
\mathrm{i}\,\overline{z} - 1 = 2z + \mathrm{i} &\iff \boxed{z = -1 - \mathrm{i}}
\end{aligned}$$

3.

3. a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$Z^2 - Z + 1 = 0$$

3. b. Montrer que pour tout complexe z on a :

$$(z - \mathrm{i}\,)^2 - (z - \mathrm{i}\,) + 1 = z^2 + (-2\,\mathrm{i}\, - 1)z + \mathrm{i}$$

3. c. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation .

$$z^2 + (-2\,\mathrm{i}\, - 1)z + \mathrm{i}\, = 0$$

Corrigé

3.

3. a.

$$Z^2 - Z + 1 = 0 \iff \boxed{Z \in \left\{ \frac{1}{2} - \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\, \frac{1}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}}$$

3. b. Pour tout complexe z on a :

$$\begin{aligned}
(z - \mathrm{i}\,)^2 - z + \mathrm{i}\, + 1 &= z^2 - 2\,\mathrm{i}\,z - 1 - z + \mathrm{i}\, + 1 \\
&= \underline{z^2 + (-2\,\mathrm{i}\, - 1)z + \mathrm{i}}
\end{aligned}$$

3. c. On va effectuer un changement de variable :

$$\begin{aligned}
z^2 + (-2\,\mathrm{i}\, - 1)z + \mathrm{i}\, = 0 &\iff (z - \mathrm{i}\,)^2 - z + \mathrm{i}\, + 1 = 0 \\
&\iff (z - \mathrm{i}\,)^2 - (z - \mathrm{i}\,) + 1 = 0 \\
&\iff \begin{cases} Z = z - \mathrm{i} \\ Z^2 - Z + 1 = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

On applique les résultats de la question (3a)

$$z^2+(-2\,\mathrm{i}-1)z+\mathrm{i}=0 \iff \begin{cases} Z=z-\mathrm{i} \\ Z=\dfrac{1}{2}-\mathrm{i}\,\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ Z=\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\,\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z-\mathrm{i}=\dfrac{1}{2}-\mathrm{i}\,\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ z-\mathrm{i}=\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\,\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\iff \boxed{z=\frac{1}{2}+\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathrm{i} \quad \text{ou} \quad z=\frac{1}{2}+\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathrm{i}}$$

Exercice 3. Racines d'un polynôme — 6 points

On cherche à déterminer toutes les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme P définie par :

$$P(z)=2z^3-8z^2+12z-8$$

1. Calculer $P(2)$.

Corrigé

On a facilement $P(2)=0$. Donc 2 est une racine de P.

2. En déduire une factorisation de P de la forme :

$$P(z)=(z-\alpha)(az^2+bz+c)$$

Corrigé

Puisque 2 est une racine de P on a par division polynomiale :

$$\begin{array}{r|l} 2z^3-8z^2+12z-8 & z-2 \\ \cline{2-2} -2z^3+4z^2 \qquad\qquad\quad & 2z^2-4z+4 \\ \cline{1-1} -4z^2+12z-8 & \\ 4z^2-8z \qquad & \\ \cline{1-1} 4z-8 & \\ -4z+8 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Donc :

$$\boxed{P(z)=(z-2)(2z^2-4z+4)}$$

3. Déterminer les racines du polynôme P en précisant leur ordre de multiplicité.

Corrigé

$$P(z) = (z-2)(2z^2 - 4z + 4)$$

On a déjà la racine 2, on cherche celles du deuxième facteur, le polynôme du second degré $(2z^2 - 4z + 4)$.

L'expression $2z^2 \ -4z + \ \ 4$ est du second degré de la forme $az^2 + bz + c$ avec :

$$\left\{\begin{array}{l} a = 2 \\ b = -4 \\ c = 4 \end{array}\right. \Bigg| \implies \Delta = -16 < 0$$

Le discriminant Δ étant strictement négatif, l'expression polynôme admet deux racines complexes conjugués :

$$z_1 = \frac{4 + i\sqrt{16}}{4} \quad \text{et} \quad z_2 = \overline{z_1} = \frac{4 - i\sqrt{16}}{4}$$

Soit

$$z_1 = 1 + \mathrm{i} \ \text{ et } \ z_2 = 1 - \mathrm{i}$$

Les racines de P sont donc : $\underline{2, (1 + \mathrm{i}) \text{ et } (1 - \mathrm{i})}$.

4. Factoriser P en produit de polynôme de degré 1.

Corrigé

$$\boxed{P(z) = 2(z-2)(z-1+\mathrm{i})(z-1-\mathrm{i})}$$

Tournez la page . . .

Exercice 4. Une équation de degré 4 — 6 points

Soit $P(X) = 2X^4 + 3X^3 - X^2 + 3X + 2$. On pose $Y = X + \frac{1}{X}$.

1. On admet que 0 n'est pas racine de P, exprimer $Y^2 - 2$ en fonction de X.

Corrigé

Nous savons que $Y = X + \frac{1}{X}$ et $Y^2 = X^2 + 2 + \frac{1}{X^2}$, donc :

$$X^2 + \frac{1}{X^2} = Y^2 - 2.$$

2. Montrer qu'il existe un polynôme Q, de degré 2 tel que $Q(Y) = \frac{P(X)}{X^2}$.

Corrigé

Calculons $\frac{P(X)}{X^2}$:

$$\frac{P(X)}{X^2} = \frac{2X^4 + 3X^3 - X^2 + 3X + 2}{X^2} = 2X^2 + 3X - 1 + \frac{3}{X} + \frac{2}{X^2}.$$

Nous savons que :

$$X^2 + \frac{1}{X^2} = Y^2 - 2.$$

En utilisant cette relation, nous pouvons exprimer $\frac{P(X)}{X^2}$ en fonction de Y :

$$\frac{P(X)}{X^2} = 2(X^2 + \frac{1}{X^2}) + 3(X + \frac{1}{X}) - 1 = 2(Y^2 - 2) + 3Y - 1 = 2Y^2 - 4 + 3Y - 1 = 2Y^2 + 3Y - 5.$$

Ainsi, le polynôme $Q(Y)$ est :

$$Q(Y) = 2Y^2 + 3Y - 5.$$

3. Calculer les racines de Q.

Corrigé

Pour trouver les racines de $Q(Y) = 2Y^2 + 3Y - 5$, nous résolvons l'équation quadratique :

$$2Y^2 + 3Y - 5 = 0.$$

Utilisons la formule quadratique $Y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, où $a = 2$, $b = 3$, et $c = -5$:

$$Y = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5)}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 40}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{-3 \pm 7}{4}.$$

Donc, les racines sont :

$$Y_1 = \frac{4}{4} = 1 \quad \text{et} \quad Y_2 = \frac{-10}{4} = -\frac{5}{2}.$$

4. En déduire les racines de P dans $\mathbb{C}$.

Corrigé

Pour $Y = 1$, nous avons :

$$X + \frac{1}{X} = 1 \implies X^2 - X + 1 = 0.$$

Les racines de cette équation sont :

$$X = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Pour $Y = -\frac{5}{2}$, nous avons :

$$X + \frac{1}{X} = -\frac{5}{2} \implies 2X^2 + 5X + 2 = 0.$$

Les racines de cette équation sont :

$$X = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-5 \pm 3}{4}.$$

Donc, les racines sont :

$$X_1 = -2 \quad \text{et} \quad X_2 = -\frac{1}{2}.$$

Ainsi, les racines de $P(X)$ sont :

$$X = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2},\ -2,\ -\frac{1}{2}.$$

La factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$ est :

$$P(X) = 2\,(X+2)\left(X+\frac{1}{2}\right)\left(X^2 - X + 1\right).$$

La factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$ est :

$$P(X) = 2\,(X+2)\left(X+\frac{1}{2}\right)\left(X - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X - \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right).$$

Fin du devoir