Math93.com

Devoir Surveillé n°2A (Correction)

Maths Expertes

Arithmétique
Durée 50 min - Coeff. 1
Noté sur 20 points

La calculatrice en mode examen est autorisée.

Exercice 1. Divisibilité — 5 points

Déterminer tous les entiers naturels n tels que : $(n+11)$ soit divisible par $(n-1)$.

Aide

Corrigé

On a, d'une part, $(n-1) \mid (n+11)$ et, d'autre part, $(n-1) \mid (n-1)$. Cela implique que $n-1$ divise toute combinaison linéaire de $n+11$ et $n-1$. En particulier, on a :

$$n-1 \mid (n+11-n+1).$$

Cela revient à dire que :

$$n-1 \mid 12.$$

De plus, puisque $n \in \mathbb{N}$, on a $n-1 \geqslant -1$. Ainsi, les valeurs possibles de $n-1$ sont les diviseurs de 12 supérieurs ou égaux à -1, à savoir :

$$-1, 1, 2, 3, 4, 6, 12.$$

Les valeurs possibles de n sont donc :

$$0, 2, 3, 4, 7, 13.$$

Réciproquement

Si $n=0$, alors $n-1=-1$, $n+11=12$ et $-1 \mid 12$, donc 0 est bien une solution.
Si $n=2$, alors $n-1=1$, $n+11=13$ et $1 \mid 13$, donc 2 est bien une solution.
Si $n=3$, alors $n-1=2$, $n+11=14$ et $2 \mid 14$, donc 3 est bien une solution.
Si $n=4$, alors $n-1=3$, $n+11=15$ et $3 \mid 15$, donc 4 est bien une solution.
Si $n=7$, alors $n-1=6$, $n+11=18$ et $6 \mid 18$, donc 7 est bien une solution.
Si $n=13$, alors $n-1=12$, $n+11=24$ et $12 \mid 24$, donc 13 est bien une solution.

Conclusion

Les solutions de ce problème sont donc :

$$\boxed{0, 2, 3, 4, 7, 13}.$$

Exercice 2. Équation — 5 points

Déterminer les entiers naturels x et y tels que :

$$x^2 - 4y^2 = 36$$

Corrigé

Pour tous x et y entiers naturels, l'équation $x^2 - 4y^2 = 36$ est équivalente à :

$$(x-2y)(x+2y) = 36.$$

- D'une part, x et y sont des entiers naturels, donc positif et :

$$x - 2y \leqslant x + 2y$$

- De plus, comme $36 > 0$, cela implique que $x-2y$ et $x+2y$ sont du même signe.
- Par ailleurs puisque x et y sont positifs :

$$x + 2y \geqslant 0$$

- Ainsi, on a :

$$\boxed{0 \leqslant x - 2y \leqslant x + 2y}.$$

- D'autre part, les diviseurs positifs de 36 sont :

$$1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36.$$

Nous allons maintenant résoudre les systèmes suivants en prenant les différentes paires de diviseurs de 36 :

$$\left\{\begin{array}{l} x-2y=1 \\ x+2y=36 \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{l} x-2y=2 \\ x+2y=18 \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{l} x-2y=3 \\ x+2y=12 \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{l} x-2y=4 \\ x+2y=9 \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{l} x-2y=6 \\ x+2y=6 \end{array}\right.$$

Les seuls systèmes qui admettent des solutions entières sont le second système, qui donne la solution $(x, y) = (10, 4)$, ainsi que le dernier système, qui donne la solution $(x, y) = (6, 0)$.
Les couples solution de l'équation $x^2 - 4y^2 = 36$ sont donc :

$$\boxed{(10,4) \quad \text{et} \quad (6,0)}.$$

Exercice 3. Deux Critères de divisibilité par 11 — 6 points

1. Démontrer le critère de divisibilité par 11 :
n est divisible par 11 si et seulement si la différence entre la somme des chiffres de rang pair et la somme des chiffres de rang impair est divisible par 11.

Corrigé

Soit n un entier écrit en base 10 sous la forme :

$$n = a_k a_{k-1} \ldots a_2 a_1 a_0$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_k$ sont les chiffres du nombre n. On peut donc écrire n comme :

$$n = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot 10^i.$$

Nous allons démontrer que n est divisible par 11 si et seulement si la différence entre la somme des chiffres de rang impair et la somme des chiffres de rang pair est divisible par 11.

1. Exprimer $n \mod 11$

On commence par exprimer $n \mod 11$:

$$n = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot 10^i.$$

Nous cherchons à étudier la valeur de $n \mod 11$, c'est-à-dire le reste de la division de n par 11.

Propriétés des puissances de 10 modulo 11

Il est important de noter que les puissances de 10 modulo 11 suivent un certain cycle. Calculons quelques puissances de 10 modulo 11 :

$$10^0 \equiv 1 \mod 11,$$

$$10^1 \equiv -1 \mod 11,$$
$$10^2 \equiv 1 \mod 11,$$
$$10^3 \equiv -1 \mod 11,$$
$$10^4 \equiv 1 \mod 11, \quad \text{etc.}$$

On remarque que $10^i \mod 11$ alterne entre 1 et 10 en fonction de la parité de i :

- Si i est pair, $10^i \equiv 1 \mod 11$,
- Si i est impair, $10^i \equiv -1 \mod 11$.

2. Réécrire $n \mod 11$

En utilisant ces résultats, nous pouvons réécrire $n \mod 11$ en séparant les termes selon la parité des puissances de 10 :

$$n \equiv \sum_{\text{i pair}} a_i \cdot 1 + \sum_{\text{i impair}} a_i \cdot (-1) \mod 11.$$

Autrement dit, on peut écrire :

$$n \equiv \sum_{\text{i pair}} a_i - \sum_{\text{i impair}} a_i \mod 11.$$

ou encore plus simplement

$$n \equiv a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \cdots \mod 1$$

3. Critère de divisibilité par 11

11 divise n si et seulement si :

$$n \equiv 0 \mod 11 \iff a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \cdots \equiv 0 \mod 11$$

Soit

$$\left(\sum_{\text{i pair}} a_i - \sum_{\text{i impair}} a_i \right) \equiv 0 \mod 11.$$

Ainsi, n est divisible par 11 si et seulement si la différence entre la somme des chiffres de rang pair et la somme des chiffres de rang impair est divisible par 11.

2. A l'aide de ce critère , trouver un nombre de 5 chiffres, divisible par 11 et de la forme :

$$n = 12a_2a_1a_0$$

Corrigé

On cherche a_2 ; a_1 ; a_0 tels que :

$$a_0 - a_1 + a_2 - 2 + 1 \equiv 0 \mod 11$$

On peut choisir le nombre :

$$\boxed{12331}$$

3. On peut aussi trouver un autre critère de divisibilité par 11 : Montrer qu'un nombre entier N est divisible par 11 si, et seulement si, la différence entre son nombre de dizaines et son chiffre des unités est divisible par 11.

Aide

On peut écrire $N = 10a + b$ avec a et b deux entiers avec $0 \leqslant b \leqslant 9$ (b le chiffre des unités et a le nombre entier de dizaines).

Corrigé

On peut écrire $N = 10a + b$ avec a et b deux entiers avec $0 \leqslant b \leqslant 9$ (b le chiffre des unités et a le nombre entier de dizaines).

Alors puisque $10 \equiv -1 \mod 11$ on a :

$$N \equiv 10a + b \mod 11 \iff N \equiv -a + b \mod 11$$

Donc 11 divise N si et seulement si $-a + b \equiv 0 \mod 11$.

Un nombre entier N est divisible par 11 si, et seulement si, la différence entre son nombre de dizaines et son chiffre des unités est divisible par 11.

Exercice 4. Avec des puissances : Un classique ... inévitable ! 4 points

Quel est le reste de la division euclidienne de 41^{2024} par 7 ?

Corrigé

Nous devons déterminer le reste de la division de 41^{2024} par 7, c'est-à-dire calculer $41^{2024} \mod 7$.

Étape 1 : Réduire $41 \mod 7$

On a :

$$41 = 6 + 5 \times 7$$

Donc, on a :

$$41 \equiv 6 \mod 7.$$

Cela implique que :

$$41^{2024} \equiv 6^{2024} \mod 7.$$

Étape 2 : Examiner les puissances de 6 modulo 7

Nous devons maintenant simplifier $6^{2024} \mod 7$. Pour ce faire, observons les puissances de 6 modulo 7.
Calculons les premières puissances de 6 modulo 7 :

$$6^1 \equiv 6 \mod 7,$$

$$6^2 = 36 \equiv 1 \mod 7.$$

Nous constatons que $6^2 \equiv 1 \mod 7$, ce qui signifie que les puissances de 6 modulo 7 suivent un cycle de période 2. En effet :

$$6^3 = 6 \times 6^2 \equiv 6 \times 1 = 6 \mod 7,$$
$$6^4 = 6^2 \times 6^2 \equiv 1 \times 1 = 1 \mod 7.$$

Le cycle est donc périodique de période 2, ce qui implique que :

- Si n est impair, $6^n \equiv 6 \mod 7$,
- Si n est pair, $6^n \equiv 1 \mod 7$.

Étape 3 : Appliquer la périodicité

Puisque 2024 est un nombre pair, nous avons :

$$6^{2024} \equiv 1 \mod 7.$$

Conclusion

Le reste de la division de 41^{2024} par 7 est donc :

$$\boxed{1}.$$

Fin du devoir

Bonus (3 points)

Montrer que si n est un entier naturel impair, alors $n^2 - 1$ est divisible par 8.