Math93.com

Devoir Surveillé n°2A (Correction)

Maths Expertes

Matrices

Durée 50 min - Coeff. 1

Noté sur 20.5 points

La calculatrice en mode examen est autorisée.

Exercice 1. Puissances et diagonalisation — 8.5 points

On considère les matrices $P = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

1. Calculer D^2, D^3 et D^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Corrigé

$D^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & \frac{1}{16} \end{pmatrix}, \quad D^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & \frac{1}{64} \end{pmatrix}.$

Pour $n \in \mathbb{N}$, :

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix}$$

2. Démontrer que P et inversible (avec le déterminant) et calculer, à la main avec les formules du cours son inverse.

Corrigé

Calculons l'inverse de P. Une matrice P admet une inverse si et seulement si son déterminant $\det(P) \neq 0$. La matrice P est donnée par :

$$P = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Le déterminant est calculé comme suit :

$$\det(P) = 3 \cdot \frac{1}{3} - (-2) \cdot 1 = 1 + 2 = 3.$$

Comme $\det(P) \neq 0$, la matrice est inversible. La formule pour P^{-1} est donnée par :

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

où a, b, c, d sont les coefficients de P :

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Substituons les valeurs :

$$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Vérifions que $P \times P^{-1} = I_2$:

$$P \times P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cela confirme que P^{-1} est correct.

3. Soit $A = P \times D \times P^{-1}$. On admet que :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{7}{2} \\ \frac{7}{36} & \frac{17}{12} \end{pmatrix}.$$

Montrer part récurrence que pour tout entier $n \geqslant 0$ on a :

$$A^n = P \times D^n \times P^{-1}$$

Corrigé

Montrons par récurrence que $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$.

Initialisation : Pour $n = 0$, on a par définition :

$$A^0 = Id$$

par ailleurs

$$P \times D^0 \times P^{-1} = P \times Id \times P^{-1} = P \times P^{-1} = Id$$

La propriété est donc vraie au rang $n = 0$.

Hérédité : Supposons qu'il existe un entier $k \geqslant 0$ tel que $A^k = P \times D^k \times P^{-1}$. Montrons que $A^{k+1} = P \times D^{k+1} \times P^{-1}$.

On a par définition de A^{k+1} :

$$A^{k+1} = A^k \times A.$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on remplace A^k par $P \times D^k \times P^{-1}$, ce qui donne :

$$A^{k+1} = (P \times D^k \times P^{-1}) \times (P \times D \times P^{-1}).$$

Or, $P^{-1} \times P = I_2$, donc :

$$A^{k+1} = P \times D^k \times (I_2) \times D \times P^{-1} = P \times (D^k \times D) \times P^{-1}.$$

Comme $D^k \times D = D^{k+1}$, on obtient :

$$A^{k+1} = P \times D^{k+1} \times P^{-1}.$$

Conclusion : Par le principe de récurrence, la propriété est vraie au rang 0 et héréditaire, donc elle est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.

4. En déduire A^n en fonction de n pour n entier naturel .

Corrigé

D'après la propriété démontrée par récurrence, pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$A^n = P \times D^n \times P^{-1}.$$

En utilisant l'expression de D^n, on a :

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, A^n peut être calculé en multipliant les matrices :

$$A^n = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Les résultats des produits matriciels permettent d'obtenir explicitement A^n.
Calculons A^n. Nous avons $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$, où :

$$P = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calcul intermédiaire : $P \times D^n$

$$P \times D^n = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^n & -\frac{2}{4^n} \\ 2^n & \frac{1}{3 \cdot 4^n} \end{pmatrix}.$$

2. Calcul final : $A^n = (P \times D^n) \times P^{-1}$

$$A^n = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^n & -\frac{2}{4^n} \\ 2^n & \frac{1}{3 \cdot 4^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Élément par élément :
- (a_{11}^n) :

$$(3 \cdot 2^n) \cdot \frac{1}{9} + \left(-\frac{2}{4^n}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2^n}{3} + \frac{2}{3 \cdot 4^n}.$$

- (a_{12}^n) En haut à droite :

$$(3 \cdot 2^n) \cdot \frac{2}{3} + \left(-\frac{2}{4^n}\right) \cdot 1 = 2^{n+1} - \frac{2}{4^n}.$$

- (a_{21}^n) En bas à gauche :

$$(2^n) \cdot \frac{1}{9} + \left(\frac{1}{3 \cdot 4^n}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2^n}{9} - \frac{1}{9 \cdot 4^n}.$$

- (a_{22}^n) En bas à droite :

$$(2^n) \cdot \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3 \cdot 4^n}\right) \cdot 1 = \frac{2^{n+1}}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4^n}.$$

Résultat final :

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} \frac{2^n}{3} + \frac{2}{3 \cdot 4^n} & 2^{n+1} - \frac{2}{4^n} \\ \frac{2^n}{9} - \frac{1}{9 \cdot 4^n} & \frac{2^{n+1}}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4^n} \end{pmatrix}}.$$

Exercice 2. Matrice et inverse 6 points

Soit la matrice :

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Montrez qu'il existe deux réels α et β tels que :

$$\mathrm{B}^2 = \alpha \mathrm{B} + \beta I_3.$$

2. En déduire que la matrice B est inversible et exprimez B^{-1} en fonction de B et I_3.

3. Déterminez explicitement B^{-1}.

Corrigé

1. Calculons B^2 :

$$\mathrm{B}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

En effectuant le produit matriciel, on obtient :

$$\mathrm{B}^2 = \begin{pmatrix} 17 & 16 & 16 \\ 16 & 17 & 16 \\ 16 & 16 & 17 \end{pmatrix}.$$

On observe que :

$$\mathrm{B}^2 = 8\mathrm{B} - 7I_3,$$

où $\alpha = 8$ et $\beta = -7$.

2. Puisque $\mathrm{B}^2 = 8\mathrm{B} - 7I_3$, en réarrangeant :

$$\mathrm{B}^2 - 8\mathrm{B} + 7I_3 = 0.$$

En factorisant :

$$\mathrm{B}(\mathrm{B} - 8I_3) + 7I_3 = 0 \implies \mathrm{B}(\mathrm{B} - 8I_3) = -7I_3.$$

Ainsi, B est inversible car $\det(\mathrm{B}) \neq 0$. On en déduit que :

$$\mathrm{B}^{-1} = \frac{1}{7}(8I_3 - \mathrm{B}).$$

3. En substituant B dans l'expression précédente, on calcule explicitement :

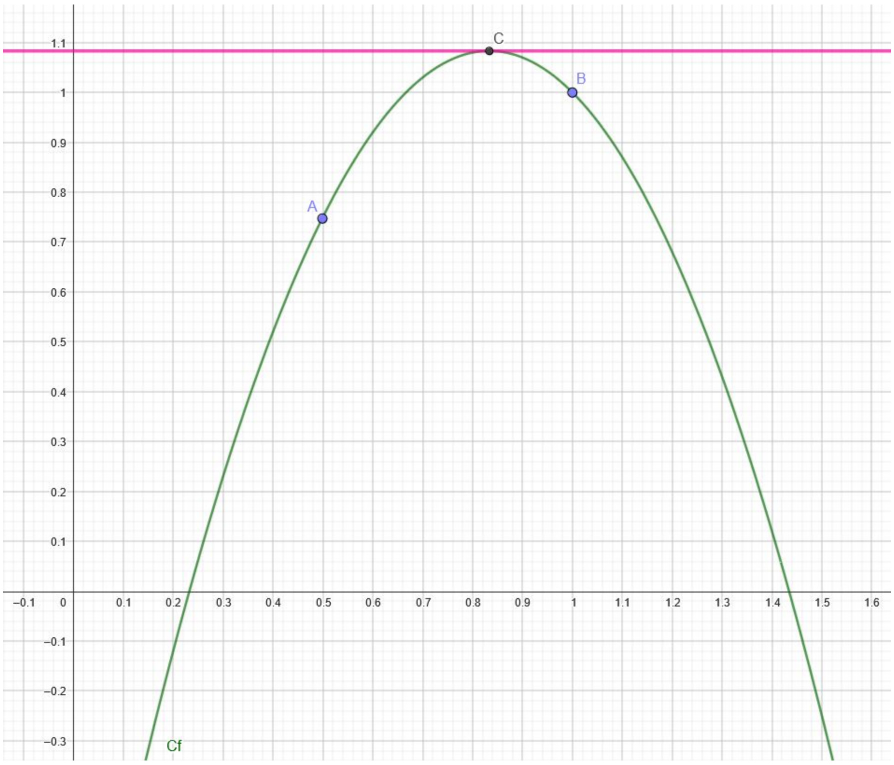
$$\mathrm{B}^{-1} = \frac{1}{7}\left(\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}\right).$$

En effectuant le calcul :

$$\boxed{\mathrm{B}^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}}.$$

Exercice 3. Système et matrices 6 points

On se place dans un repère orthonormé. On cherche à déterminer la fonction f dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous.



On admet que f est une fonction du second degré de la forme

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Le but de l'exercice est donc de déterminer les coefficients a, b et c.

On sait que :

- $\mathscr{C}_f$ passe par le point $A\left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{3}{4}\right)$;
- $\mathscr{C}_f$ passe par le point $B(1\ ;\ 1)$;
- $\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontale au point C d'abscisse $\frac{5}{6}$.

1. Traduire ces informations par trois équations d'inconnues a, b et c.

Corrigé

- La courbe passe par le point $A\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$, donc :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}.$$

Cela nous donne l'équation :

$$a\left(\frac{1}{2}\right)^2 + b\left(\frac{1}{2}\right) + c = \frac{3}{4}.$$

Ce qui se simplifie en :

$$\frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c = \frac{3}{4}. \qquad (1)$$

- La courbe passe par le point $B(1,1)$, donc :

$$f(1) = 1.$$

Cela nous donne l'équation :

$$a(1)^2 + b(1) + c = 1,$$

soit :

$$a + b + c = 1. \qquad (2)$$

- La courbe admet une tangente horizontale en C d'abscisse $\frac{5}{6}$, ce qui implique que la dérivée de $f(x)$ au point $x = \frac{5}{6}$ est nulle. La dérivée de $f(x)$ est :

$$f'(x) = 2ax + b.$$

En $x = \frac{5}{6}$, on a :

$$f'\left(\frac{5}{6}\right) = 0,$$

soit :

$$2a\left(\frac{5}{6}\right) + b = 0,$$

ce qui se simplifie en :

$$\frac{5a}{3} + b = 0. \qquad (3)$$

On obtient donc le système :

$$\boxed{\begin{cases} \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c = \frac{3}{4} \\ a + b + c = 1 \\ \frac{5a}{3} + b = 0 \end{cases}}$$

2. Déterminer les matrices A, X et B pour lesquelles (S) équivaut à $AX = B$.

Corrigé

Nous avons le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c = \frac{3}{4} \\ a + b + c = 1 \\ \frac{5a}{3} + b = 0 \end{cases}$$

Nous pouvons réécrire ce système sous forme matricielle $AX = B$.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{5}{3} & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc, nous avons :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{5}{3} & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. Résoudre ce système et trouver l'expression de f.

Corrigé

Nous allons résoudre le système $AX = B$ pour déterminer les valeurs de a, b et c.
En supposant que la matrice A est inversible, nous obtenons :

$$AX = B \iff X = A^{-1}B$$

En résolvant ce système, nous trouvons :

$$a = -3, \quad b = 5, \quad c = -1.$$

Ainsi, la fonction f est :

$$\boxed{f(x) = -3x^2 + 5x - 1}$$

Fin du devoir

Bonus (3 points)

Soit A une matrice carrée d'ordre n telle que $(A - I_n)^3 = O_n$, où I_n est la matrice identité d'ordre n et O_n est la matrice nulle d'ordre n.
Montrer que A est inversible.

Corrigé

Soit A une matrice carrée $n \times n$ telle que $(A - I_n)^3 = O_n$, où I_n est la matrice identité de taille $n \times n$ et O_n est la matrice nulle de taille $n \times n$.
Nous voulons montrer que A est inversible.

Nous commençons par développer l'expression $(A - I_n)^3$. En utilisant le produit matriciel, on a :

$$(A - I_n)^3 = (A - I_n)(A - I_n)(A - I_n)$$

En développant ce produit, on obtient :

$$(A - I_n)^3 = A^3 - 3A^2 + 3A - I_n$$

Sachant que $I_n^k = I_n$ pour tout entier k, on peut simplifier cette expression et écrire :

$$(A - I_n)^3 = A^3 - 3A^2 + 3A - I_n$$

D'après l'énoncé, on sait que $(A - I_n)^3 = O_n$, ce qui nous donne l'équation :

$$A^3 - 3A^2 + 3A - I_n = O_n$$

En réarrangeant cette équation, on obtient :

$$A^3 - 3A^2 + 3A = I_n$$

Cela peut être réécrit sous la forme suivante :

$$A(A^2 - 3A + 3I_n) = I_n$$

Cette équation montre que A est inversible. En effet, la matrice $A^2 - 3A + 3I_n$ est l'inverse à gauche de A, et une matrice qui a un inverse à gauche est nécessairement inversible.
Ainsi, nous avons montré que A est inversible.