Devoir Surveillé n°2A

Math93.com

Maths Expertes

Matrices

Durée 50 min - Coeff. 1

Noté sur 20.5 points

La calculatrice en mode examen est autorisée.

Exercice 1. Puissances et diagonalisation — 8.5 points

On considère les matrices $P = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

1. Calculer D^2, D^3 et D^n pour $n \in \mathbb{N}$.

2. Démontrer que P et inversible (avec le déterminant) et calculer, à la main avec les formules du cours son inverse.

3. Soit $A = P \times D \times P^{-1}$. On admet que :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{7}{2} \\ \frac{7}{36} & \frac{17}{12} \end{pmatrix}.$$

Montrer part récurrence que pour tout entier $n \geqslant 0$ on a :

$$A^n = P \times D^n \times P^{-1}$$

4. En déduire A^n en fonction de n pour n entier naturel .

Exercice 2. Matrice et inverse — 6 points

Soit la matrice :

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Montrez qu'il existe deux réels α et β tels que :

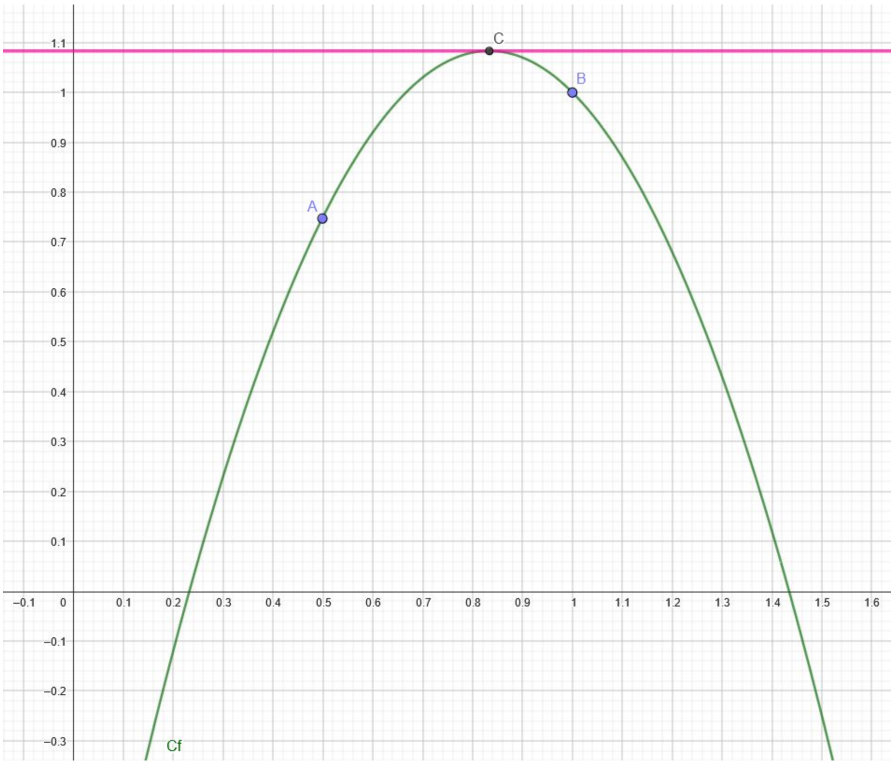
$$\mathrm{B}^2 = \alpha \mathrm{B} + \beta I_3.$$

2. En déduire que la matrice B est inversible et exprimez B^{-1} en fonction de B et I_3.

3. Déterminez explicitement B^{-1}.

Exercice 3. Système et matrices — 6 points

On se place dans un repère orthonormé. On cherche à déterminer la fonction f dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous.



On admet que f est une fonction du second degré de la forme

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Le but de l'exercice est donc de déterminer les coefficients a, b et c.

On sait que :

- $\mathscr{C}_f$ passe par le point $A\left(\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{3}{4}\right)$;
- $\mathscr{C}_f$ passe par le point $B(1\ ;\ 1)$;
- $\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontale au point C d'abscisse $\dfrac{5}{6}$.

1. Traduire ces informations par trois équations d'inconnues a, b et c.

2. Déterminer les matrices A, X et B pour lesquelles (S) équivaut à $AX = B$.

3. Résoudre ce système et trouver l'expression de f.

Fin du devoir

Bonus (3 points)

Soit A une matrice carrée d'ordre n telle que $(A - I_n)^3 = O_n$, où I_n est la matrice identité d'ordre n et O_n est la matrice nulle d'ordre n.
Montrer que A est inversible.