Math93.com

Devoir Surveillé n°5A (Correction)

Maths Expertes

Complexes 2 et Matrices

Durée 50 min - Coeff. 1

Noté sur 20 points

La calculatrice en mode examen est autorisée.

Exercice 1. Racines 6-ième de l'unité — 9 points

1. Soit $\mathrm{j} = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Déterminer la forme exponentielle de j.

Corrigé (1 pt)

On reconnaît que j est sous la forme trigonométrique :

$$\mathrm{j} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right).$$

Ainsi, sa forme exponentielle est :

$$\mathrm{j} = e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

2. Pour z complexe, déterminer les solutions z_k (k de 0 à ...) de l'équation :

$$z^6 = 1$$

On donnera la forme exponentielle et la forme algébrique de chacune des solutions.

Corrigé (2 pts)

Les solutions de $z^6 = 1$ sont les racines 6^{e} de l'unité, données par :

$$z_k = e^{i\frac{2k\pi}{6}}, \quad k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Sous forme exponentielle et algébrique :

- $z_0 = e^{i\frac{2(0)\pi}{6}} = e^{i0} = 1,$
- $z_1 = e^{i\frac{2(1)\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$
- $z_2 = e^{i\frac{2(2)\pi}{6}} = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$
- $z_3 = e^{i\frac{2(3)\pi}{6}} = e^{i\pi} = -1,$
- $z_4 = e^{i\frac{2(4)\pi}{6}} = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},$
- $z_5 = e^{i\frac{2(5)\pi}{6}} = e^{i\frac{5\pi}{3}} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$

3. Exprimer les racines 6-ième de l'unité de la question précédente en fonction de j (ou de ses puissances ou conjugué).

Corrigé (2 pts)

On observe que :

$$\mathrm{j} = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\mathrm{j}^2 = \bar{\mathrm{j}} = e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{-i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ainsi, on peut réécrire certaines racines :

- $z_0 = 1 = \mathrm{j}^0$,
- $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = -\mathrm{j}^2 = -\bar{\mathrm{j}}$,
- $z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \mathrm{j}$,
- $z_3 = e^{i\pi} = -1$,
- $z_4 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \mathrm{j}^2$,
- $z_5 = e^{i\frac{5\pi}{3}} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = -\mathrm{j}$.

4. Calculer la somme des racines 6-ième de l'unité.

Corrigé (2 pts)

La somme des racines de l'unité est nulle :

$$\sum_{k=0}^{5} z_k = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{2\pi}{3}} + (-1) + e^{-i\frac{2\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{3}} = 0.$$

On peut aussi la voir comme la somme des termes d'une suite géométrique de raison $e^{i\frac{2\pi}{6}}$ et de premier terme 1 :

$$S = \frac{1(1 - e^{i2\pi})}{1 - e^{i\frac{2\pi}{6}}} = 0.$$

5. Représenter les points A_k d'affixes les z_k dans un repére.

Corrigé (1 pt)

Les points A_k sont répartis régulièrement sur le cercle unité, à des angles équidistants de $\frac{\pi}{3}$.

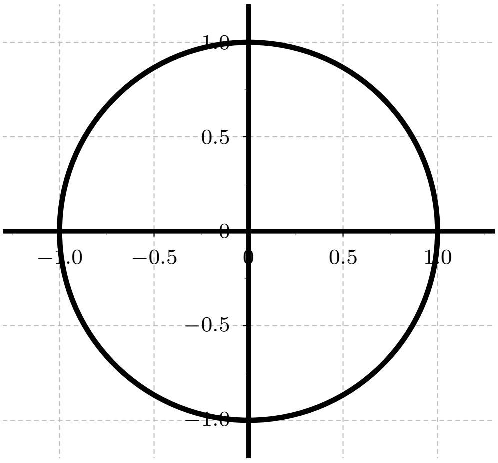
6. Que dire du polygone obtenu ?

Corrigé (1 pt)

Le polygone obtenu est un hexagone régulier.

Pour le prouver, on montre que les longueurs des côtés sont égales et que les angles sont égaux :

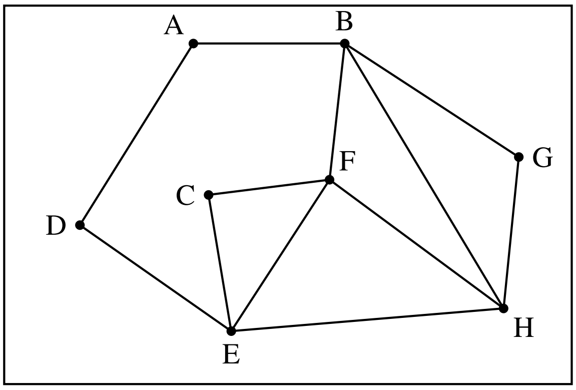
- Chaque côté relie deux racines z_k et z_{k+1} situées sur le cercle unité, donc leur module est toujours 1.
- L'angle entre deux vecteurs successifs z_k et z_{k+1} est constant, égal à $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.
- Ainsi, le polygone est à la fois équilatéral et équiangle, donc c'est un hexagone régulier.


1.0
0.5
0
−1.0
−0.5
0
0.5
1.0
−0.5
−1.0

Exercice 2. Graphes et matrices 5 points

PARTIE A

On considère le graphe $\mathcal{G}$ ci-dessous :



1. Déterminer en justifiant si ce graphe :

1. a. est connexe ;

Corrigé (1 pt)

Définition 1 (Graphe connexe)

Un graphe est dit **connexe** si quels que soient les sommets u et v, il existe une chaîne de u vers v. C'est-à-dire, s'il existe une suite d'arêtes permettant d'atteindre v à partir de u.

Dans le graphe proposé, il existe une chaîne entre chacun des sommets. La chaîne :

$$A - B - G - H - F - C - E - D$$

permet de passer par tous les sommets.
Par conséquent le graphe $\mathcal{G}$ est connexe.

1. b. admet une chaîne eulérienne.

Corrigé (1 pt)

Citons le théorème d'Euler

Théorème 1 (Théorème d'Euler-Hierholzer - 1736)

- Un graphe connexe contient une *chaîne eulérienne* si et seulement si
il possède 0 ou 2 sommets de degré impair.
- Un graphe connexe contient un *cycle eulérien* si et seulement si il ne possède aucun sommet de degré impair (tous ses sommets sont de degré pair).

Remarque : *Ce théorème qui porte le nom du génial mathématicien suisse [Leonhard d'Euler] (1707-1783) fut en fait publié par Carl Hierholzer en 1873, on l'appelle donc aussi le théorème d'Euler-Hierholzer.*

Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité. Étudions le degré de chacun des sommets :

Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H
Degré	2	4	2	2	4	4	2	4

Donc tous les sommets sont de degré pair. Par conséquent, d'après le théorème **??**, ce graphe connexe admet une chaine eulérienne et même un cycle eulérien.

2. On note M la matrice d'adjacence associée à ce graphe en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique. On donne :

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 & 3 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 5 & 9 & 6 & 8 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 6 & 6 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 5 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & 5 & 4 & 8 & 3 & 9 \\ 2 & 9 & 6 & 3 & 8 & 6 & 3 & 9 \\ 1 & 6 & 3 & 2 & 3 & 3 & 2 & 6 \\ 3 & 8 & 3 & 2 & 9 & 9 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Donner, en justifiant, le nombre de chemins de longueur 3 reliant E à B.

Corrigé (1 pt)

Rappelons que :

Définition 2 (Matrice d'adjacence d'un graphe)

Considérons un graphe G (orienté), d'ordre n. On numérote les sommets de G de 1 à n. On appelle matrice d'adjacence associée à G la matrice M dont chaque terme a_{ij} est égal au nombre d'arêtes (orientées) allant du sommet i vers le sommet j.

Propriété 1 (Matrice d'adjacence et nombre de chaînes)

Si M est la matrice d'adjacence associée à un graphe orienté dont les sommets sont numérotés et p désigne un nombre entier naturel.
Le terme a_{ij} (ligne i et colonne j) de la matrice M^p donne le nombre de chaînes de longueur p reliant i à j.

Ici, le nombre de chemins de longueur 3 reliant E à B est donc donné par le coefficient $a_{52} = 5$ de la matrice réelle symétrique M^3.
Il y a donc 5 chemins de longueur 3 reliant E à B.

PARTIE B

Un club alpin souhaite proposer à ses membres des randonnées de plusieurs jours dans les Alpes. À cet effet, huit refuges notés A, B, C, D, E, F, G et H ont été sélectionnés.
Le graphe $\mathcal{G}$ de la partie A permet de visualiser les différents itinéraires possibles, les sommets représentant les refuges et les arêtes schématisant tous les sentiers de randonnée balisés les reliant.

1. D'après l'étude effectuée dans la partie A, le club alpin est-il en mesure de proposer :

1. a. un itinéraire au départ du refuge A qui passerait par tous les refuges en empruntant une fois et une seule fois chacun des sentiers ? Si oui, proposer un tel itinéraire ;

Corrigé (1 pt)

D'après la question **A.1.b.**, le graphe possède une chaîne eulérienne. On peut donc passer par tous les refuges en empruntant une fois et une seule fois chacun des sentiers. On peut prendre l'itinéraire :

$$\boxed{A - B - G - H - B - F - H - E - F - C - E - D - A}$$

1. b. des itinéraires de trois jours (un jour correspondant à une liaison entre deux refuges) reliant le refuge E au refuge B ? Si oui, combien peut-il en proposer ?

Corrigé (1 pt)

D'après la question **A.2.**, il existe 5 chemins de longueur 3 reliant E à B.
Il existe donc 5 itinéraires de 3 jours reliant le refuge E au refuge B.

Exercice 3. Complexes et suites 6 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
On pose $z_0 = 8$ et, pour tout entier naturel n :

$$z_{n+1} = \frac{3 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{4} z_n.$$

On note A_n le point du plan d'affixe z_n.

1. Vérifier que : $\dfrac{3 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

Corrigé (1 pt)

On a :

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} &= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\frac{-\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{-\pi}{6}\right)\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \mathrm{i}\,\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\frac{3 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}$$

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$z_n = 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\pi}{6}}.$$

Corrigé (2 pts)

Notons pour tout entier naturel $n \geqslant 0$ le postulat

$$(P_n)\ :\ z_n = 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\pi}{6}}$$

- **Initialisation**
  Pour $n = 0$, le postulat (P_0) est vrai puisque :

$$z_0 = 8 \quad \text{et} \quad 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^0 \mathrm{e}^0 = 8$$

- **Hérédité**
  Supposons que pour n entier fixé, (P_n) soit vérifié et montrons qu'alors il est aussi vrai au rang $n+1$.

$$z_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} \times z_n$$

On applique alors l'hypothèse de récurrence qui implique que : (P_n) soit vérifié et donc que

$$\begin{cases} z_{n+1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} \times z_n \\ z_n = 8 \times \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\pi}{6}} \end{cases} \Longrightarrow z_{n+1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} \times 8 \times \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\pi}{6}} = 8 \times \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\pi}{6}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$$

et donc

On a alors montré que $z_{n+1} = 8 \times \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{(n+1)\pi}{6}}$ et donc que (P_{n+1}) est vrai.

- **Conclusion**
  On a montré que (P_0) est vrai. De plus, si l'on suppose le postulat (P_n) vérifié, alors il l'est aussi au rang suivant, (P_{n+1}) est vrai. De ce fait la relation est vrai pour tout entier $n \geqslant 0$.

$$\boxed{z_n = 8 \times \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\pi}{6}}}$$

3. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$.
Déterminer la nature et la limite de la suite (u_n).

Corrigé (3 pts)

Pour tout entier n on a :

$$u_n = |z_n| = 8 \times \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

La suite (u_n) est donc géométrique de raison $q = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Théorème 2

Si le réel q est tel que : $-1 < q < 1$ on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

Donc puisque $-1 < q = \dfrac{\sqrt{3}}{2} < 1$ on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \underbrace{8 \times \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n}_{u_n} = 0$$

La limite de la suite géométrique (u_n) est donc 0.

Fin du devoir

Question Bonus

Soit (U_n) la suite de vecteurs définie par :

$$\mathrm{U}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et pour tout entier } n, \quad \mathrm{U}_{n+1} = A\mathrm{U}_n + B$$

avec :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la matrice C qui vérifie :

$$C = AC + B$$

Remarque : on pourra utiliser la calculatrice pour déterminer l'inverse de ...

2. Démontrer que la suite (V_n) définie pour entier naturel n par : $V_n = U_n - C$ vérifie

$$V_{n+1} = AV_n$$

3. Exprimer, pour tout entier naturel n, U_n en fonction de n.