



Math93.com

Devoir Surveillé n°6A (Correction)

Maths Expertes

Arithmétique

Durée 50 min - Coeff. 1

Noté sur 20 points

La calculatrice en mode examen est autorisée.

Exercice 1. Propriétés du PGCD

5 points

Déterminer l'ensemble des couples $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tels que :

$$\begin{cases} a + b = 72, \\ \text{PGCD}(a, b) = 9. \end{cases}$$



Corrigé

Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tel que :

$$a + b = 72 \quad \text{et} \quad \text{PGCD}(a, b) = 9.$$

Soient c et d les entiers naturels tels que :

$$a = 9c, \quad b = 9d.$$

On peut donc écrire :

$$9c + 9d = 72,$$

d'où :

$$c + d = 8 \quad \text{et} \quad \text{PGCD}(c, d) = 1.$$

On en déduit que :

$$(c, d) \in \{(1, 7), (3, 5), (7, 1), (5, 3)\},$$

d'où :

$$(a, b) \in \{(9, 63), (27, 45), (63, 9), (45, 27)\}.$$

Réciproquement, on vérifie que ces couples sont bien solutions du problème.

Exercice 2.

2.5 points

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que $5n - 7$ et $2n - 3$ sont premiers entre eux.



Corrigé

$$2(5n - 7) - 5(2n - 3) = 1$$

donc, d'après le théorème de Bézout, $5n - 7$ et $2n - 3$ sont premiers entre eux.

Exercice 3.**2.5 points**

Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que

$$\frac{1}{nm} = \frac{a}{n} + \frac{b}{m}$$

si, et seulement si, m et n sont premiers entre eux.

**Corrigé**

On a :

$$\frac{1}{nm} = \frac{a}{n} + \frac{b}{m} \iff \frac{1}{nm} = \frac{ma}{nm} + \frac{nb}{mn}$$

Donc existe $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que

$$\frac{1}{nm} = \frac{a}{n} + \frac{b}{m}$$

équivalent à dire qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que :

$$1 = ma + nb$$

car n et m sont non nuls, ce qui, d'après le théorème de Bézout, équivaut à dire que m et n sont premiers entre eux.

Exercice 4. Équation Diophantienne**10 points**

1. Déterminer en appliquant l'algorithme d'Euclide un couple $(u_0 ; v_0) \in \mathbb{Z}^2$ solution de l'équation

$$(E) : 7u + 9v = 1$$

**Corrigé**

Par divisions euclidiennes successives on obtient avec $a = 7$ et $b = 9$:

Division euclidienne	Reste	Egalité avec a et b
$7 = 9 \times 0 + 7$	$7 = 7 - 0 \times 9$	
$9 = 7 \times 1 + 2$	$2 = 9 - 1 \times 7$	$2 = -1 a + 1 b$
$7 = 2 \times 3 + 1$	$1 = 7 - 3 \times 2$	$1 = a - 3 b$

Le PGCD des nombres 7 et 9 est le dernier reste non nul du procédé, c'est-dire 1.

Les nombres 7 et 9 sont donc premiers entre eux et le théorème dit de Bézout-Bachet assure donc l'existence de couples $(u ; v)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation :

$$7u + 9v = 1$$

Pour trouver une solution, il suffisait d'exprimer le reste de la division euclidienne en fonction de a

et b pour chaque ligne du procédé. Un couple solution de l'équation $7u + 9v = 1$ est donc :

$$(u = 4 ; v = -3)$$

2. On cherche maintenant toutes les solutions $(u ; v) \in \mathbb{Z}^2$ de l'équation

$$(E') : 7u + 9v = 8$$

2. a. En utilisant la question précédente, déterminer une solution particulière de l'équation (E') .

2. b. Montrer alors que les solutions $(u ; v) \in \mathbb{Z}^2$ de (E') vérifient l'équation :

$$7(u - 32) = -9(v + 24)$$

2. c. En déduire toutes les solutions de l'équation (E') .



Corrigé

• Recherche d'une solution particulière

Puisque $(4 ; -3)$ est une solution particulière de l'équation

$$(E) : 7u + 9v = 1$$

Alors

$$7 \times 4 + 9 \times (-3) = 1$$

En multipliant les deux membres de l'égalité par 8 on obtient :

$$7 \times 4 \times 8 + 9 \times (-3) \times 8 = 8$$

Et donc

$$7 \times 32 + 9 \times (-24) = 8$$

Ainsi $(32 ; -24)$ est une solution particulière de l'équation $(E') : 7u + 9v = 8$.

• Solutions générales

On utilise la même méthode :

– Transformation de l'équation

$$(E') : 7u + 9v = 8$$

Puisque le couple $(32 ; -24)$ est une solution particulière de l'équation (E') on a : $7 \times 32 + 9 \times (-24) = 8$.

Donc

$$\begin{cases} 7 \times u + 9 \times v = 8 \\ 7 \times 32 + 9 \times (-24) = 8 \end{cases} \xrightarrow{\text{par soustraction}} 7(u - 32) + 9(v + 24) = 0$$

Donc l'équation (E') devient :

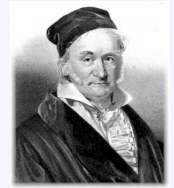
$$(E') : 7(u - 32) = -9(v + 24)$$

– Application du théorème de Gauss

Théorème 1 (Carl Friedrich Gauss, 1777-1855)

Soit a, b, c des entiers.

Si $\begin{cases} a \text{ divise le produit } bc \\ a \text{ et } b \text{ sont premiers entre eux} \end{cases}$, alors a divise c .



Remarque : Le mathématicien allemand Carl Friedrich Gauss énonce et prouve ce théorème (sous forme de lemme en fait) en 1801 dans son ouvrage « *Disquisitiones arithmeticae* ».

$$(E') : 7(u - 32) = -9(v + 24)$$

Puisque 7 et 9 sont premiers entre eux, alors en appliquant le théorème de Gauss :

$$\begin{cases} 7 \text{ divise le produit } 9(v + 24) \\ 7 \text{ et } 9 \text{ sont premiers entre eux} \end{cases} \xRightarrow{\text{d'après le th. de Gauss}} 7 \text{ divise } (v + 24)$$

$$\begin{cases} 9 \text{ divise le produit } 7(u - 32) \\ 7 \text{ et } 9 \text{ sont premiers entre eux} \end{cases} \xRightarrow{\text{d'après le th. de Gauss}} 9 \text{ divise } (u - 32)$$

Il existe donc des entiers k et k' tels que :

$$\begin{cases} (v + 24) = 7k \\ (u - 32) = -9k' \end{cases}$$

En reportant dans l'équation (E') on obtient

$$7 \times 9k' = 9 \times 7k \iff k = k'$$

Ainsi, les solutions de l'équation (E') sont les couples de la forme

$$(32 - 9k ; -24 + 7k) ; k \in \mathbb{Z}$$

↵ **Fin du devoir** ↗