

Devoir Surveillé n°6A



Math93.com

Maths Expertes

Arithmétique

Durée 50 min - Coeff. 1
Noté sur 20 points

La calculatrice en mode examen est autorisée.

Exercice 1. Propriétés du PGCD

5 points

Déterminer l'ensemble des couples $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tels que :

$$\begin{cases} a + b = 72, \\ \text{PGCD}(a, b) = 9. \end{cases}$$

Exercice 2.

2.5 points

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que $5n - 7$ et $2n - 3$ sont premiers entre eux.

Exercice 3.

2.5 points

Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que

$$\frac{1}{nm} = \frac{a}{n} + \frac{b}{m}$$

si, et seulement si, m et n sont premiers entre eux.

Exercice 4. Équation Diophantienne

10 points

1. Déterminer en appliquant l'algorithme d'Euclide un couple $(u_0 ; v_0) \in \mathbb{Z}^2$ solution de l'équation

$$(E) : 7u + 9v = 1$$

2. On cherche maintenant toutes les solutions $(u ; v) \in \mathbb{Z}^2$ de l'équation

$$(E') : 7u + 9v = 8$$

2. a. En utilisant la question précédente, déterminer une solution particulière de l'équation (E') .

2. b. Montrer alors que les solutions $(u ; v) \in \mathbb{Z}^2$ de (E') vérifient l'équation :

$$7(u - 32) = -9(v + 24)$$

2. c. En déduire toutes les solutions de l'équation (E') .

↔ **Fin du devoir** ↔