Math93.com

TD 1 - Tle Maths Expertes
Arithmétique Partie 1

Les exercices suivants dont l'intitulé est suivi du symbole (c) sont corrigés intégralement en fin du présent TD.
Les autres présentent des éléments de réponses ou un lien vers une correction détaillée sur www.math93.com

Partie I. Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Exercice 1. Pour s'échauffer (ex. 54, 55, 56)

1. Donner deux nombres impairs consécutifs et vérifier que leur somme est divisible par 4.
2. Démontrer, dans le cas général, que la somme de deux entiers impairs consécutifs est divisible par 4.
3. Démontrer que la somme des carrés de quatre entiers consécutifs est divisible par 2.
4. Déterminer tous les entiers naturels n tels que : 6 divise $(3n - 9)$.

Exercice 2. Une équation d'inconnues des entiers (Méthode p 94)

Déterminer les entiers naturels a et b vérifiant $a^2 - b^2 = 35$.

Méthode

1. On factorise pour obtenir un produit d'entiers. On obtient une équation du type $A \times B = 35$ où A et B sont donc des diviseurs positifs de 35.
2. On recherche les conditions que l'on a sur a et b sachant qu'il s'agit d'entiers naturels :
   dans cet exemple $a > b$.
3. Après avoir déterminé les diviseurs de 35, on écrit les systèmes vérifiés par a et b. La résolution de ces systèmes nous donne les solutions cherchée

s.

Exercice 3. (c) Sur le même modèle que l'exercice ?? (ex. 29 et 58)

Déterminer dans chaque cas les entiers naturels x et y tels que :

1. $x^2 - y^2 = 12$.

2. $x^2 - y^2 = -15$.

3. $x^2 - 4y^2 = 36$.

Exercice 4. Divisibilité (Méthode p95)

Déterminer tous les entiers n tels que $(2n+7) \mid (n-3)$.

Méthode

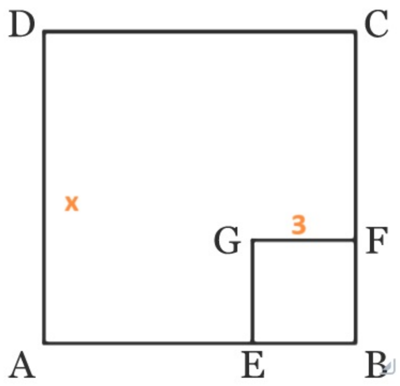
1. On recherche une combinaison linéaire de $(n-3)$ et de $(2n+7)$ de manière à éliminer l'entier inconnu n. On prend par exemple :
$$1 \times (2n+7) + (-2) \times (n-3) = 13$$
2. On obtient alors que $a = (2n+7)$ divise lui même a et si il divise $(n-3)$, alors il divise toute combinaison linéaire des 2 d'après la propriété 2 du cours :
$$\boxed{\begin{cases} a|b \\ a|c \end{cases} \Longrightarrow a|(ub+vc)}$$
soit $a = (2n+7)$ divise
$$1 \times (2n+7) + (-2) \times (n-3) = 13$$
Donc $a = (2n+7)$ divise l'entier 13 qui est indépendant de n
3. On raisonne alors par disjonction de cas en recherchant les diviseurs de 13.
4. Les solutions possibles sont alors les résultats trouvés. Il faut ensuite vérifier par le calcul que ces résultats correspondent bien à des entiers solutions.

Exercice 5. (c) Sur le même modèle que l'exercice 4 (ex. 57)

1. Déterminer tous les entiers n tels que : $(n+6)$ soit divisible par n ;
2. Déterminer tous les entiers n tels que : $(n+11)$ soit divisible par $(n-1)$;
3. Déterminer tous les entiers n tels que : $(n-3)$ soit divisible par $(n+2)$;

Exercice 6. Avec des aires (ex. 60)

Sur la figure ci-dessous, ABCD est un carré de côté x cm où x est un entier naturel et EBFG est un carré de côté 3 cm. Déterminer les valeurs possibles de x afin que l'aire du polygone AEGFCD soit égale à celle d'un carré de côté y, où y est un entier naturel.



Exercice 7. Avec des fonctions (ex. 61)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(n) = \frac{3n^2 + 2n - 1}{n + 4}$$

1. Déterminer les nombres a, b et c tels que :

$$f(n) = an + b + \frac{c}{n + 4}$$

2. Pour quelles valeurs de n l'image de n par la fonction f est-elle un entier ?

Exercice 8. (c) * Avec des fonctions Bis (ex. 62)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(n) = \frac{5n^2 + 10n - 2}{n^2 + 1}$$

1. Déterminer les nombres a, b et c tels que :

$$f(n) = a + \frac{bn + c}{n^2 + 1}$$

2. Pour quelles valeurs de n l'image de n par la fonction f est-elle un entier ?

Partie II. Divisibilité dans $\mathbb{Z}$: La récurrence, c'est ma passion

Exercice 9. * Une conjecture (ex.63)

Soit pour tout entier n non nul la suite (a_n) définie par :

$$a_n = 2^{3n} - 3^n$$

1. Calculer les 3 premiers termes de la suite.
2. Conjecturer l'existence d'un diviseur de a_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Démontrer cette conjecture par récurrence.

Exercice 10. Divisible par 7 (ex. 67)

Soit pour tout entier n la suite (a_n) définie par :

$$u_n = 9^n - 2^n$$

1. Calculer les 3 premiers termes de la suite.

2. Conjecturer l'existence d'un diviseur de u_n pour $n \in \mathbb{N}$.

3. Démontrer cette conjecture par récurrence.

Exercice 11. Divisibilité par 3 (ex. 68)

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $2^{3n} - 5^n$ est divisible par 3.

Partie III. Divisibilité dans $\mathbb{Z}$: somme des termes d'une suite géométrique

Propriété 1 (Somme termes consécutifs suite géométrique)

Soit (u_n) géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme u_0, alors pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\underbrace{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}_{(n+1) \text{ termes}} = u_0 \times \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right)$$

Cette formule peut se généraliser de la façon suivant

$$\boxed{\sum_{k=p}^{n} u_k = 1^{\text{er}} \text{ terme } \times \frac{1 - q^{\text{nb termes}}}{1 - q}}$$

Exercice 12. (ex. 72)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Exprimer en fonction de n la somme S définie par :

$$\mathrm{S} = 1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{n-1}$$

2. En déduire que pour tout entier naturel n, $3^n - 1$ est pair.
3. Refaire cette preuve par récurrence.

Exercice 13. (ex. 73)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Exprimer en fonction de n la somme S définie par :

$$\mathrm{S} = 1 + 7 + 7^2 + \ldots + 7^{n-1}$$

2. En déduire que pour tout entier naturel n, $7^n + 35$ est divisible par 6.

Partie IV. Division euclidienne

Exercice 14. (c)

1. Soit $a = 7n + 16$ et $b = 2n + 3$ où n est un entier naturel non nul.
Effectuer la division euclidienne de a par b.

2. Déterminer tous les nombres entiers naturels qui, divisés par 7, donnent un quotient égal au reste.

3. Déterminer les entiers naturels n qui, dans la division euclidienne de n par 4, ont un quotient égal à deux fois le reste.

Exercice 15. (c) Parité du carré

Démontrer qu'un entier naturel et son carré ont la même parité.

Exercice 16. (c) Par disjonction des cas

n désigne un entier naturel. Démontrer que $n(n+2)(n+4)$ est divisible par 3.

Méthode

La méthode dite par disjonction de cas utilise le fait que par division euclidienne par 3 par exemple, les restes possibles sont 0,1 ou 2. Un entier est donc de la forme $3k$, $3k+1$ ou $3k+2$ avec $k \in \mathbb{N}$.
On étudie alors chaque cas.

Exercice 17. Vrai ou Faux (ex. 76)

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier la réponse.

1. Si le quotient dans la division euclidienne d'un entier a par 6 est 4, alors le quotient dans la division euclidienne $3a$ par 6 est 12.

2. Si le quotient dans la division euclidienne d'un entier a par 7 est 5 et le quotient dans la division euclidienne d'un entier b par 7 est 3, alors le quotient dans la division euclidienne de $a + b$ par 7 est 8.

3. Si le quotient dans la division euclidienne d'un entier a par 6 est 5 et le quotient dans la division euclidienne d'un entier b par 6 est 1, alors $a + b$ est divisible par 6.

Exercice 18. (ex.81)

La différence de deux entiers naturels est 116.
Si l'on divise l'un par l'autre, le quotient est 4 et le reste est 8.
Quels sont ces deux nombres ?

Exercice 19. Chercher l'erreur (ex. 84)

Soit n un entier naturel non nul.
On recherche le reste de la division euclidienne de $(n+2)^3$ par n.

- Jeanne fait le raisonnement suivant.

  Pour tout entier naturel n, on a
  $$(n+2)^3 = n(n^2+6n+12)+8$$
  Donc le reste de la division euclidienne de $(n+2)^3$ par n est 8

- Jules choisit alors un exemple.

  $$(6+2)^3 = 512 \text{ et } 512 = 85 \times 6 + 2$$

  donc le reste n'est pas égal à 8.

Retrouver l'erreur commise par Jeanne.

Exercice 20. (c) (ex. 89)

Soit n un entier naturel non nul.
On considère l'entier défini par :

$$\mathrm{P}(n) = n^3 + 3n^2 + 11n + 20$$

Déterminer en justifiant votre réponse le reste et le quotient de la division euclidienne de $P(n)$ par $n + 2$.

Exercice 21. * Par disjonction des cas (ex. 91)

Soit n un entier naturel non nul.
On considère l'entier

$$P_n = n^3 - n$$

1. Calculer P_1, P_2 et P_3 ?et donner le reste de la division par 6 de P_1, P_2 et P_3.
Quelle conjecture peut-on faire ?

2. Factoriser P_n.

3. Démontrer par disjonction de cas la conjecture de la question 1.

Méthode

La méthode dite par disjonction de cas utilise le fait que par division euclidienne par 6 par exemple, les restes possibles sont 0,1,2,3,4 ou 5.

Un entier est donc de la forme $6k$, $6k+1$, ... ou $6k+5$ avec $k \in \mathbb{N}$.

On étudie alors chaque cas.

Partie V. Congruence

Propriété 2 (Compatibilité avec les opérations)

a, b, c et d désignent des entiers relatifs et n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit $p \in \mathbb{N}$.

$$\begin{cases} a \equiv b\,[n] \\ c \equiv d\,[n] \end{cases} \implies \begin{cases} (P1) : a + c \equiv b + d\,[n] \\ (P2) : a \times c \equiv b \times d\,[n] \\ (P3) : a^p \equiv b^p\,[n] \end{cases}$$

Exercice 22. (c) Critère de divisibilité par 9 et le défi n°3

Montrer qu'un entier naturel est congru à la somme de ses chiffres modulo 9 et en déduire l'explication du défi numéro 3, la preuve du critère de divisibilité par 9 et la justification de la "preuve par 9".

Exercice 23. Modulo 3 : par disjonction

Montrer que, pour tout entier naturel n, $n(n^2+5)$ est divisible par 3.

Exercice 24. Avec des puissances : Un classique ... inévitable !

Quel est le reste de la division euclidienne de 23^{2024} par 7 ?

Méthode

De tous les exercices de divisibilité par n qui mettent en jeu des puissances a^p, l'idée est :

1. de déterminer un entier k tel que $a^k \equiv 1 \mod n$.
2. d'écrire $p = k \times q + r$ et donc
$$a^p = \left(a^k\right)^q \times a^r$$
3. d'utiliser la propriété de Compatibilité avec les opérations (propriété 2).

Exercice 25.

Montrer que si le nombre entier naturel n n'est pas divisible par 3, alors 9 est un diviseur de $n^6 - 1$.

Exercice 26. Une Somme de puissance divisible par 5

Montrer que

$$S = 1^{2019} + 2^{2019} + 3^{2019} + 4^{2019}$$

est divisible par 5.

Exercice 27. Les critères de divisibilité

Énoncer et démontrer les critères de divisibilité par 2, 3, 4, 5 et 11.

Exercice 28.

a et b désignent deux entiers relatifs non nuls.
Démontrer que 3 divise $(a+b)^3$ si et seulement si 3 divise a^3+b^3.

Exercice 29. Une récurrence

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $22^n + 6n - 1$ est un multiple de 9.

Exercice 30. (c) Divisible par 8

Montrer que si n est un entier naturel impair, alors $n^2 - 1$ est divisible par 8.

Exercice 31. Vrai ou Faux

a et b désignent deux entiers congrus modulo 6. Pour chacune des cinq affirmations suivants, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1. a et b ont la même parité.
2. a et b sont congrus modulo 3.
3. Si a et b sont pairs, ils sont congrus modulo 12.
4. $2a$ et $2b$ sont congrus modulo 12.
5. Si a et b sont divisibles par 3, alors $\frac{a}{3} \equiv \frac{b}{3}$ [6].

Exercice 32. Équation Diophantienne

Résoudre dans l'ensemble des entiers relatifs l'équation $x^2 + y^2 = 3$.

Exercice 33.

Déterminer tous les entiers naturels n tels que $n^2 + 11$ est divisible par $n + 11$.

Partie VI. Un peu d'algorithmique

Exercice 34. La suite de Syracuse

La suite de Syracuse est définie de la manière suivante : après avoir choisi un entier naturel p non nul, on pose $u_0 = p$ et, pour tout entier naturel n, u_{n+1} est égal à $\frac{u_n}{2}$ si u_n est pair et à $3u_n + 1$ sinon.
La conjecture de Collatz dit que la suite de Syracuse de n'importe quel entier p atteint 1 au bout d'un certain nombre d'étapes, appelé "temps de vol", et noté $L(p)$.

1. Écrire une fonction en langage Python qui calcule les termes de la suite et le temps de vol, pour un entier p saisi par l'utilisateur.
On pourra utiliser ce programme pour conjecturer la réponse aux questions suivantes.

2. m étant un entier naturel non nul, que vaut $L(2^m)$?

3. m étant un entier naturel non nul, quelle est la relation entre $L(8m+5)$ et $L(8m+4)$?

Partie VII. Bilan

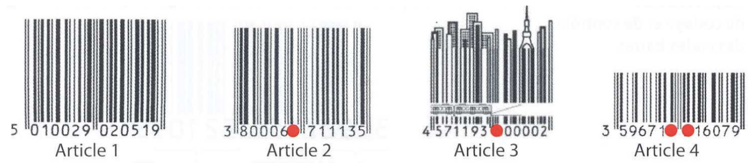
Exercice 35. Étude d'un système de codage

Le code-barre EAN13 est le système le plus couramment utilisé pour identifier toutes sortes de produits commerciaux. Ci-dessous le code-barres d'un livre scolaire de mathématiques français.

On attribue un rang à chacun des 12 premiers chiffres du code, de gauche à droite. Le 13ième chiffre est la clé K de contrôle du code, sensée détecter les erreurs de saisie les plus fréquentes. On étudiera plus tard dans l'année ce code détecteur d'erreurs. On ne s'intéresse aujourd'hui qu'à la génération de la clé.
Cette clé K est calculée de la manière suivante :

1. On calcule la somme S_i des chiffres de rang impair ;
2. On calcule la somme S_p des chiffres de rang pair ;
3. La clé K est un chiffre qui vérifie la relation $S_i + 3 \times S_p + K \equiv 0[10]$.

Voici quelques codes-barres trouvés sur des articles. Certains chiffres ont été cachés par une tâche rouge sur les articles 2, 3 et 4.



1. Vérifier la clé de l'article 1.
2. Peut-on retrouver le chiffre caché de l'article 2 ?
3. Peut-on retrouver le chiffre caché de l'article 3 ?
4. Peut-on retrouver les chiffres cachés de l'article 4 ?

Exercice 36. Un extrait de sujet du Bac Amérique du Nord 2017

Une association qui organise des activités pour les enfants association à chaque enfant un numéro à 6 chiffres $c_1c_2c_3c_4c_5k$. Les deux premiers chiffres représentent l'année de naissance de l'enfant les trois suivants sont attribués à l'enfant au moment de sa première inscription. Le dernier chiffre, appelé clé de contrôle, est calculé automatiquement de la façon suivante :

- on effectue la somme $S = c_1 + c_3 + c_5 + a \times (c_2 + c_4)$ où a est un entier compris entre 1 et 9 ;
- on effectue la division euclidienne de S par 10, le reste obtenu est la clé k.

Lorsqu'un employé saisit le numéro à 6 chiffres d'un enfant, on peut détecter une erreur de saisie lorsque le sixième chiffre n'est pas égal à la clé de contrôle calculée à partir des cinq premiers chiffres.

1. Dans cette question seulement, on choisit $a = 3$.

1. a. Le numéro 111383 peut-il être celui d'un enfant inscrit à l'association ?

1. b. L'employé, confondant un frère et une soeur, échange leurs années de naissance : 2008 et 2011. Ainsi, le numéro $08c_3c_4c_5k$ est transformé en $11c_3c_4c_5k$. Cette erreur est-elle détectée grâce à la clé ?

2. On note $c_1c_2c_3c_4c_5k$ le numéro d'un enfant. On cherche les valeurs de l'entier a pour lesquelles la clé détecte systématiquement la faute de frappe lorsque les chiffres c_3 et c_4 sont intervertis. On suppose donc que les chiffres c_3 et c_4 sont distincts.

2. a. Montrer que la clé ne détecte pas l'erreur d'interversion des chiffres c_3 et c_4 si et seulement si $(a - 1)(c_4 - c_3)$ est congru à 0 modulo 10.

2. b. Déterminer les entiers n compris entre 0 et 9 pour lesquels il existe un entier p compris entre 1 et 9 tel que $np \equiv 0 \quad (10)$.

2. c. En déduire les valeurs de l'entier a qui permettent, grâce à la clé, de détecter systématiquement l'interversion des chiffres c_3 et c_4.

Fin du TD

Partie VIII. Correction

Correction de l'exercice 3

Déterminer dans chaque cas les entiers naturels x et y tels que :

1. $x^2 - y^2 = 12$.

2. $x^2 - y^2 = -15$.

1. $x^2 - y^2 = 12$.

$x^2 - y^2 = 12$ équivaut à $(x-y)(x+y) = 12$. On cherche des solutions positives. Ainsi, $x+y$ est positif, tout comme $x-y$ d'après la règle des signes. On commence donc par étudier l'ensemble des diviseurs positifs de 12, qui est $D_{12} = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$.

De plus, $x \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{N}$ donc $0 \leqslant x - y \leqslant x + y$. Les solutions sont donc les solutions des systèmes : $\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=12 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x-y=2 \\ x+y=6 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x-y=3 \\ x+y=4 \end{cases}$.

Or $\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=12 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x=\dfrac{13}{2} \\ y=12-\dfrac{13}{2} \end{cases}$, $\begin{cases} x-y=2 \\ x+y=6 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$ et $\begin{cases} x-y=3 \\ x+y=4 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x=\dfrac{7}{2} \\ y=4-\dfrac{7}{2} \end{cases}$.

Le premier et le dernier système n'admettant pas de solutions entières, l'équation $x^2 - y^2 = 12$ admet un unique couple solution dans $\mathbb{N}^2$: $(4; 2)$.

2. $x^2 - y^2 = -15$.

$x^2 - y^2 = -15$ équivaut à $y^2 - x^2 = 15$, ce qui est équivalent à $(y-x)(y+x) = 15$. On cherche des solutions positives. Ainsi, $x+y$ est positif, tout comme $x-y$ d'après la règle des signes. On commence donc par étudier l'ensemble des diviseurs positifs de 15, qui est $D_{15} = \{1; 3; 5; 15\}$.

De plus, comme x et y sont entiers, alors $0 \leqslant y - x \leqslant x + y$.

Les solutions sont donc les solutions des systèmes : $\begin{cases} y-x=1 \\ y+x=15 \end{cases}$ ou $\begin{cases} y-x=3 \\ y+x=5 \end{cases}$.

Or $\begin{cases} y-x=1 \\ y+x=15 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} y=8 \\ x=7 \end{cases}$ et $\begin{cases} y-x=3 \\ y+x=5 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} y=4 \\ x=1 \end{cases}$.

Donc les solutions sur $\mathbb{N}^2$ de l'équation $x^2 - y^2 = -15$ sont $(1; 4)$ et $(7; 8)$.

3. $x^2 - 4y^2 = 36$.

Pour tous x et y entiers naturels, $x^2 - 4y^2 = 36 \Leftrightarrow (x-2y)(x+2y) = 36$. D'une part, x et y sont des entiers naturels donc $x - 2y \leqslant x + 2y$ et, comme $36 > 0$, alors $x - 2y$ et $x + 2y$ sont du même signe. Ainsi, $0 \leqslant x - 2y \leqslant x + 2y$. D'autre part, les diviseurs positifs de 36 sont 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 et 36.

On résout alors les systèmes suivants :

$\begin{cases} x-2y=1 \\ x+2y=36 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x-2y=2 \\ x+2y=18 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x-2y=3 \\ x+2y=12 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x-2y=4 \\ x+2y=9 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x-2y=6 \\ x+2y=6 \end{cases}$

Les seuls systèmes à admettre des solutions entières sont le second système de solution $(10; 4)$, ainsi que le dernier système de solution $(6; 0)$.

Les couples solution de l'équation $x^2 - 4y^2 = 36$ sont donc $(10, 4)$ et $(6, 0)$.

Correction de l'exercice 5

1. $n+6$ soit divisible par n ;

On a, d'une part, $n \mid n+6$ et, d'autre part, $n \mid n$. Donc n divise toute combinaison linéaire de $n+6$ et n et, en particulier $n \mid (n+6-n)$ donc $n \mid 6$. Ainsi, les solutions possibles sont les diviseurs positifs de 6 : 1, 2, 3 et 6.

Réciproquement, si $n=1$, on a $n+6=7$ et $1 \mid 7$ donc 1 est bien solution ; si $n=2$, on a $n+6=8$ et $2 \mid 8$ donc est bien solution ; si $n=3$, on a $n+6=9$ et $3 \mid 9$ donc 3 est bien solution ; si $n=6$, on a $n+6=12$ et $6 \mid 12$ donc 6 est bien solution.

En conclusion, les solutions de ce problème sont 1, 2, 3 et 6.

2. $n+11$ soit divisible par $n-1$;

On a, d'une part, $n-1 \mid n+11$ et, d'autre part, $n-1 \mid n-1$ donc $n-1$ divise toute combinaison linéaire de $n+11$ et $n-1$ et, en particulier, $n-1 \mid (n+11-n+1)$ donc $n-1 \mid 12$. De plus, $n \in \mathbb{N}$ donc $n-1 \geqslant -1$. Ainsi, les valeurs possibles de $n-1$ sont les diviseurs de 12 supérieurs ou égaux à –1 : –1, 1, 2, 3, 4, 6 et 12. Les valeurs éventuelles de n sont donc 0, 2, 3, 4, 7 et 13.

Réciproquement, si $n=0$, on a $n-1=-1$, $n+11=12$ et $-1 \mid 12$ donc 0 est bien solution ; si $n=2$, on a $n-1=1$, $n+11=13$ et $1 \mid 13$ donc 2 est bien solution ; si $n=3$, on a $n-1=2$, $n+11=14$ et $2 \mid 14$ donc 3 est bien solution ; si $n=4$, on a $n-1=3$, $n+11=15$ et $3 \mid 15$ donc 4 est bien solution ; si $n=7$, on a $n-1=6$, $n+11=18$ et $6 \mid 18$ donc 7 est bien solution ; si $n=13$, on a $n-1=12$, $n+11=24$ et $12 \mid 24$ donc 13 est bien solution.

En conclusion, les solutions de ce problème sont 0, 2, 3, 4, 7 et 13.

3. $n-3$ divise $n+2$.

On a, d'une part, $n-3 \mid n+2$ et, d'autre part, $n-3 \mid n-3$ donc $n-3$ divise toute combinaison linéaire de $n+2$ et $n-3$ et, en particulier, $n-3 \mid (n-3)-(n+2)$, c'est-à-dire $n-3 \mid 5$. De plus, $n \in \mathbb{N}$ donc $n-3 \geqslant -3$. Ainsi, les valeurs possibles de $n-3$ sont les diviseurs de 5 supérieurs ou égaux à –3 : –1, 1 et 5. Donc les valeurs possibles de n sont 2, 4 et 8.

Réciproquement, si $n=2$, on a $n-3=-1$, $n+2=4$ et $-1 \mid 4$ donc 2 est bien solution ; si $n=4$, on a $n-3=1$ et $n+2=6$ et $1 \mid 6$ donc 4 est bien solution ; si $n=8$, on a $n-3=5$, $n+2=10$ et $5 \mid 10$ donc 8 est bien solution.

En conclusion, les solutions de ce problème sont 2, 4 et 8.

Correction de l'exercice 8

Soit n un entier naturel. On définit le nombre $f(n)$ par :

$$f(n) = \frac{5n^2 + 10n - 2}{n^2 + 1}.$$

1. Déterminer les nombres a, b et c tels que :

$$f(n) = a + \frac{bn + c}{n^2 + 1}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = a + \frac{nb + c}{n^2 + 1} = \frac{a(n^2+1) + bn + c}{n^2 + 1} = \frac{an^2 + bn + (a + c)}{n^2 + 1}$. Ainsi, par identification, $\begin{cases} a = 5 \\ b = 10 \\ a + c = -2 \end{cases}$, soit $\begin{cases} a = 5 \\ b = 10 \\ c = -7 \end{cases}$.

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = 5 + \frac{10n - 7}{n^2 + 1}$.

2. Existe-t-il des valeurs de n pour lesquelles $f(n)$ est un entier ?

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n)$ est un entier si, et seulement si, $n^2 + 1 \mid 10n - 7$.

Soit n tel que $n^2 + 1 \mid 10n - 7$. On a, de plus, $n^2 + 1 \mid n^2 + 1$, donc $n^2 + 1$ divise toute combinaison linéaire de $10n - 7$ et $n^2 + 1$. En particulier, $n^2 + 1 \mid [10(n^2 + 1) - n(10n - 7)]$, c'est-à-dire $n^2 + 1 \mid 7n + 10$. Donc $n^2 + 1 \mid 10n - 7$ et $n^2 + 1 \mid 7n + 10$, d'où $n^2 + 1 \mid 7(10n - 7) - 10(7n + 10)$ donc $n^2 + 1 \mid 149$.

Or 149 n'admet que 1, –1, –149 et 149 comme diviseurs. De plus, le nombre $n^2 + 1$ est strictement positif. Ainsi, on s'intéresse uniquement aux cas $n^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow n = 0$ et $n^2 + 1 = 149 \Leftrightarrow n^2 = 148$. Cette seconde équation n'admet pas de solution entière. On en déduit que $f(n)$ est un entier si, et seulement si, $n = 0$.

Correction de l'exercice 14

1. Soit $a = 7n + 16$ et $b = 2n + 3$ où n est un entier naturel non nul.
Effectuer la division euclidienne de a par b.

Corrigé

Soient $a = 7n + 16$ et $b = 2n + 3$, où n est un entier naturel non nul. Nous voulons effectuer la division euclidienne de a par b, c'est-à-dire exprimer a sous la forme :

$$a = bq + r$$

où q est le quotient et r est le reste de la division, avec $0 \leqslant r < b$.

Étude du cas général pour $n \geqslant 5$

- Estimation du quotient :
  Nous cherchons un entier q tel que $a \approx bq$. En divisant les termes dominants de a et b, nous obtenons une approximation du quotient :

$$\begin{array}{r|l} 7n + 16 & 2n + 3 \\ \cline{2-2} -\ 7n - \frac{21}{2} & \frac{7}{2} \\ \cline{1-1} \frac{11}{2} & \end{array}$$

  Donc

$$a = b \times \frac{7}{2} + \frac{11}{2}$$

  Nous essayons donc avec $q = 3$, on obtient $r = (n + 7)$.

$$7n + 16 = 3(2n + 3) + (n + 7)$$

- Vérification que $r < b$: Pour que cette division soit valide, il faut que $0 \leqslant r < b$, c'est-à-dire $0 \leqslant n + 7 < 2n + 3$.
  Vérifions cette inégalité :

$$n + 7 < 2n + 3$$
$$7 - 3 < n$$
$$n > 4$$

  Ainsi, pour $n \geqslant 5$, cette division est valide.
- Conclusion : La division euclidienne de a par b pour $n \geqslant 5$ est donnée par :

$$a = b \cdot 3 + (n + 7)$$

  où le quotient est $q = 3$ et le reste est $r = n + 7$.
- Étude des cas pour $n < 5$
  Nous allons maintenant vérifier la division euclidienne pour chaque valeur de $n < 5$.
  - Pour $n = 1$: $a = 4b + 3$
  - Pour $n = 2$: $a = 4b + 2$
  - Pour $n = 3$: $a = 4b + 1$
  - Pour $n = 4$: $a = 4b + 0$

2. Déterminer tous les nombres entiers naturels qui, divisés par 7, donnent un quotient égal au reste.

Corrigé

Soit n un tel nombre. Nous voulons que $n = 7q + r$, où q est le quotient et r est le reste, et nous souhaitons que $q = r$.

- L'équation de base est : $n = 7q + r$ avec $0 \leqslant r < 7$.

- La condition est : $q = r$.
- En substituant q par r, nous obtenons : $n = 8r$ avec $0 \leqslant r < 7$.

Ainsi, les solutions sont les nombres :

$$\boxed{0\ ;\ 8\ ;\ 16\ ;\ 24\ ;\ 32\ ;\ 40\ ;\ 48}$$

3. Déterminer les entiers naturels n qui, dans la division euclidienne de n par 4, ont un quotient égal à deux fois le reste.

Corrigé

Avec le même raisonnement, les solutions sont les nombres :

$$\boxed{0\ ;\ 9\ ;\ 18\ ;\ 27}$$

Correction de l'exercice 15

Démontrer qu'un entier naturel et son carré ont la même parité.

Corrigé

Considérons deux cas possibles pour n :

1. Si n est pair, alors $n = 2k$ pour un certain entier k. Dans ce cas,

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \times 2k^2$$

qui est également pair car sous la forme 2 fois un entier.

2. Si n est impair, alors $n = 2k + 1$ pour un certain entier k. Dans ce cas,

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2 \times (2k^2 + 2k) + 1$$

qui est également impair car sous la forme 2 fois un entier +1.

Dans les deux cas, n et n^2 ont la même parité.

Correction de l'exercice 16

n désigne un entier naturel. Démontrer que $n(n + 2)(n + 4)$ est divisible par 3.

Corrigé

Considérons les trois cas possibles pour n dans la division par 3. Les restes possibles sont 0, 1 ou 2.

- **Cas 1 :** $n \equiv 0 \pmod 3$ soit le reste de la division euclidienne par 3 est 0.
  Si $n \equiv 0 \pmod 3$, alors $n = 3k$ pour un certain entier k.
  Donc, $n(n + 2)(n + 4) = 3k(3k + 2)(3k + 4)$.
  Comme $3k$ est un multiple de 3, $n(n + 2)(n + 4)$ est divisible par 3.

- **Cas 2 :** $n \equiv 1 \pmod 3$ soit le reste de la division euclidienne par 3 est 1.
  Si $n \equiv 1 \pmod 3$, alors $n = 3k + 1$ pour un certain entier k.
  Donc, $n(n + 2)(n + 4) = (3k + 1)(3k + 3)(3k + 5)$.
  On remarque que $3k + 3$ est un multiple de 3, donc $n(n + 2)(n + 4)$ est divisible par 3.

- **Cas 3 :** $n \equiv 2 \pmod 3$ soit le reste de la division euclidienne par 3 est 2.
  Si $n \equiv 2 \pmod 3$, alors $n = 3k + 2$ pour un certain entier k.
  Donc, $n(n + 2)(n + 4) = (3k + 2)(3k + 4)(3k + 6)$.
  On remarque que $3k + 6$ est un multiple de 3, donc $n(n + 2)(n + 4)$ est divisible par 3.

Dans tous les cas, $n(n+2)(n+4)$ est divisible par 3.

Correction de l'exercice 20

Soit n un entier naturel non nul.
On considère l'entier défini par :

$$\mathrm{P}(n) = n^3 + 3n^2 + 11n + 20$$

Déterminer en justifiant votre réponse le reste et le quotient de la division euclidienne de $P(n)$ par $n+2$.

Corrigé

$$\begin{array}{r|l} n^3 + 3n^2 + 11n + 20 & n+2 \\ \cline{2-2} -\,n^3 - 2n^2 \qquad\qquad\quad & n^2+n+9 \\ \cline{1-1} n^2 + 11n \qquad & \\ -\,n^2 \;\; - 2n \qquad & \\ \cline{1-1} 9n + 20 & \\ -\,9n - 18 & \\ \cline{1-1} 2 & \end{array}$$

Donc

$$\boxed{P(n) = (n+2) \times (n^2+n+9) + 2}$$

Comme n est un entier naturel non nul, on a $n+2 \geqslant 3$. Ainsi,

$$0 \leqslant r = 2 < n+2$$

Le reste et le quotient de la division euclidienne de $P(n)$ par $n+2$ sont donc 2 et (n^2+n+9).

Correction de l'exercice 22

Montrer qu'un entier naturel est congru à la somme de ses chiffres modulo 9.

Corrigé

Propriété 3

a, b, c et d désignent des entiers relatifs et n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit $p \in \mathbb{N}$.

$$\begin{cases} a \equiv b\,[n] \\ c \equiv d\,[n] \end{cases} \implies \begin{cases} (P1) : a + c \equiv b + d\,[n] \\ (P2) : a \times c \equiv b \times d\,[n] \\ (P3) : a^p \equiv b^p\,[n] \end{cases}$$

Soit n un entier. Il peut alors s'écrire en le décomposant selon ses $(p+1)$ chiffres ($p \in \mathbb{N}^*$) :

$$n = \sum_{k=0}^{p} a_k \times 10^k = a_p a_{p-1} \cdots a_0$$

or pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leqslant k \leqslant p$ d'après la propriété $(P3)$:

$$10 \equiv 1[9] \implies 10^k \equiv 1^k[9] \implies 10^k \equiv 1[9]$$

Puis en appliquant la propriété $(P2)$ des produits :

$$\begin{cases} 10^k \equiv 1[9] \\ a_k \equiv a_k[9] \end{cases} \implies a_k \times 10^k \equiv a_k \times 1[9] \equiv a_k[9]$$

Puis en appliquant la propriété $(P1)$ des sommes :

$$\begin{cases} n = \sum_{k=0}^{p} a_k \times 10^k \\ a_k \times 10^k \equiv a_k[9] \end{cases} \implies n \equiv \sum_{k=0}^{p} a_k\,[9] \equiv \left(\sum_{k=0}^{p} a_k\right) \pmod 9$$

Donc n est congru à la somme de ses chiffres modulo 9.

et en déduire l'explication du défi numéro 3,

Corrigé

Défi n°3 : Choisir un nombre entier non nul. Le multiplier par 9 et soustraire 5. Faire la somme des chiffres du résultat et recommencer jusqu'à avoir un nombre à un chiffre. Quel nombre trouvez-vous ?

Soit n_0 le nombre de départ, le résultat s'écrit alors $n_1 = 9n_0 - 5$.
On a vu que la somme des chiffres de ce nombre est :

$$s_1 = n_1 \mod 9 = (9n_0 - 5) \mod 9 = -5 \mod 9 = 4 \mod 9$$

On obtiendra donc toujours 4 dès lors que l'on obtient un nombre à 1 chiffre.

Exemple

- 6178 => $s_1 = 6 + 1 + 7 + 8 = 22$;
- 22 => $s_2 = 2 + 2 = 4$.

la preuve du critère de divisibilité par 9

Corrigé

Un entier n est congru à la somme de ses chiffres modulo 9 donc la somme des chiffres d'un entier divisible par 9 doit aussi être divisible par 9.

et la justification de la "preuve par 9".

Corrigé

Même principe.

Correction de l'exercice 30

Pour démontrer que si n est un entier naturel impair, alors $n^2 - 1$ est divisible par 8, nous allons étudier l'expression $n^2 - 1$ en fonction de la parité de n.

1. **Écriture de n sous la forme d'un entier impair :**

   Puisque n est impair, on peut écrire $n = 2k + 1$, où k est un entier naturel.

2. **Calcul de $n^2 - 1$:**

   En substituant $n = 2k + 1$ dans $n^2 - 1$, nous avons :

   $$n^2 - 1 = (2k + 1)^2 - 1$$

3. **Développement de $(2k + 1)^2$:**

   $$(2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

   Donc,

   $$n^2 - 1 = (4k^2 + 4k + 1) - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k + 1)$$

4. **Analyse de $4k(k + 1)$:**

   Remarquons que k et $k + 1$ sont deux entiers consécutifs, donc l'un des deux est pair. Cela implique que $k(k + 1)$ est toujours divisible par 2, et donc $4k(k + 1)$ est divisible par 8.

Conclusion : Ainsi, pour tout entier impair n, $n^2 - 1$ est divisible par 8.