Math93.com

TD 1 - Tle Maths Expertes
Complexes et forme algébrique

Les exercices suivants dont l'intitulé est suivi du symbole (c) sont corrigés intégralement en fin du présent TD.
Les autres présentent des éléments de réponses ou un lien vers une correction détaillée sur www.math93.com

Table des matières

Partie I. Forme algébrique d'un nombre complexe

Exercice 1. Formes algébriques

Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants et préciser quels sont ceux qui sont imaginaires purs (dans $\mathrm{i}\,\mathbb{R}$) ou réels (dans $\mathbb{R}$) :

1. $z_1 = -5 + 7\,\mathrm{i} - (-2 + 3\,\mathrm{i})$
2. $z_2 = (-5 + 7\,\mathrm{i})(-2 + 3\,\mathrm{i})$
3. $z_3 = (3 - 2\,\mathrm{i})^2$
4. $z_4 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{i}\right)^2$
5. $z_5 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{i}\right)^2$
6. $z_6 = \mathrm{i}^{10}$

Réponses

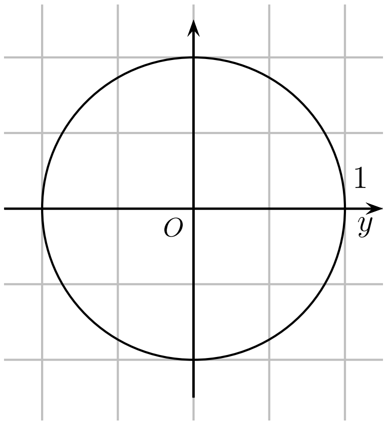
$z_1 = -3 + 4\,i$, $z_2 = -11 - 29\,i$, $z_3 = 5 - 12\,i$, $z_4 = i \in i\mathbb{R}$, $z_5 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$, $z_6 = -1 \in \mathbb{R}$

Exercice 2. Les puissances de i

1. Compléter le tableau suivant :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
i^n	i	$\mathrm{i}^2 = -1$							

2. Pour n entier, $n \geqslant 1$ on note M_n le point d'affixe i^n dans le plan complexe. Placer les points M_1, M_2, $\cdots M_9$ dans le repère ci dessous :



3. Calculer i^n selon les valeurs de n, entier naturel non nul.

4. Écrire une fonction sous python qui renvoie la valeur de i^n selon les valeur entières de n.

```
# CODE PYTHON
def puissance_de_i(n):
        '''In : n entier
           Out : i**n'''
    ...
```

Exercice 3. Somme de termes

On pose :

$$S = 1 + \mathrm{i} + \mathrm{i}^{2} + \cdots + \mathrm{i}^{2025} = \sum_{k=0}^{2025} \mathrm{i}^{k}$$

En utilisant le résultat de l'exercice 2, écrire la forme algébrique de S.

Exercice 4. Algorithmes sous python

1. **Fonction produit**.

Compléter l'algorithme suivant pour que la fonction renvoie un couple $(\text{Re}(zz')\ ;\ \text{Im}\ (zz))$ pour $z_1 = a + \text{i}\,b$ et $z_2 = c + \text{i}\,d$ avec z_1 et z_2 qui seront donnés sous forme de couples (a, b) et (c, d).

```python
# CODE PYTHON
def produit(z1,z2):
        '''In : z1,z2 avec z1=(a,b) pour z1=a+ib
                et z2=(c,d) pour z2=c+id
           Out : couple ( Re(zz') , Im(zz') )'''
    return ...
```

2. **Fonction somme**. Idem pour la fonction somme :

```python
# CODE PYTHON
def somme(z1,z2):
        '''In : z1,z2 avec z1=(a,b) pour z1=a+ib
                et z2=(c,d) pour z2=c+id
           Out : couple ( Re(z+z') , Im(z+z') )'''
    return ...
```

Exercice 5. * Vrai ou Faux

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

Affirmation 1

Soient a et b deux réels. Les nombres complexes

$$z_1 = a(a-1) + \mathrm{i}\,(b^2+1) \text{ et } z_2 = a - 1 + 2\,\mathrm{i}\,b$$

sont opposés pour un unique couple $(a;b)$.

Partie II. Conjugué et module

Exercice 6. Module et conjugué

Déterminer le module et le conjugué des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = -5 + 7\,\mathrm{i} - (-2 + 3\,\mathrm{i})$
2. $z_2 = (-5 + 7\,\mathrm{i})(-2 + 3\,\mathrm{i})$
3. $z_3 = (3 - 2\,\mathrm{i})^2$
4. $z_4 = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{i}\right)^2$
5. $z_5 = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\,\mathrm{i}\right)^2$
6. $z_6 = \mathrm{i}^{10}$
7. $z_7 = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}\right)\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}\right)$
8. $z_8 = z_1^5$
9. $z_9 = \overline{z_1}^4$
10. $z_{10} = \overline{z_1} z_1^2$
11. $z_{10} = \mathrm{i}\,\overline{z_2}$

Exercice 7. * Vrai ou Faux : Module du conjugué

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

Affirmation 2

Un nombre complexe et son conjugué ont le même module.

Affirmation 3

Deux nombres complexes qui ont le même module sont égaux ou conjugués.

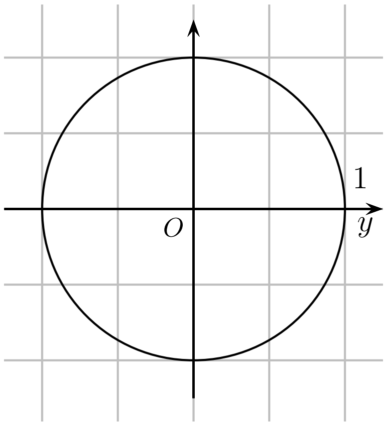
Exercice 8. * Racines cubiques de (-1)

Soit $\omega = \dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Calculer ω^2 et ω^3.

2. Démontrer que $(\overline{\omega})^3 = -1$

3. Placer les points M_k d'affixe w^k pour $k = 1, 2, 3$ dans le plan complexe.



4. Trouver un nombre réel dont le cube vaut (-1). Montrer qu'il n'y en a pas d'autres.

> **Aide**
>
> Pensez à la monotonie de la fonction cube sur $\mathbb{R}$.

5. Trouver 3 nombres complexes dont le cube vaut (-1).

6. Pour montrer qu'il n'y en a pas d'autres, on peut par exemple prouver que pour tout complexe z on a :

$$z^3 + 1 = (z+1)(z-\omega)\,(z-\overline{\omega})$$

Partie III. Opérations sur les complexes

Exercice 9. Opérations

1. Déterminer l'inverse de $z_1 = 1 + \mathrm{i}$.
2. Déterminer l'inverse du conjugué de z_1.
3. Déterminer la forme algébrique de $z_2 = \dfrac{1}{1 - 2\,\mathrm{i}}$;
4. Déterminer la forme algébrique de $z_3 = \dfrac{1 - 2\,\mathrm{i}}{2 + 3\,\mathrm{i}}$;
5. Déterminer la forme algébrique de $z_4 = z_3 z_4$;
6. Déterminer la forme algébrique de $z_5 = \dfrac{z_3}{z_4}$;

Exercice 10. Algorithmes sous python

1. **Fonction inverse**.
Compléter l'algorithme suivant pour que la fonction renvoie un couple $(\text{Re}(1/z)\ ;\ \text{Im}\ (1/z))$:

```
# CODE PYTHON
def inverse(z):
        '''In : z avec z=(a,b) pour z=a+ib
           Out : couple ( Re(1/z) , Im(1/z) )'''
    return ...
```

2. Proposez une fonction pour le quotient de deux complexes. Attention à la valeur interdite !

Exercice 11. * Vrai ou Faux (ex. 103 et 78)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

Affirmation 4

L'inverse d'un imaginaire pur non nul est toujours un imaginaire pur.

Affirmation 5

Pour tout nombre complexe non nul, le complexe $\frac{1}{z}+\frac{1}{\overline{z}}$ est un nombre réel.

Affirmation 6

Pour tout nombre complexe non nul, le complexe $\frac{1}{z}-\frac{1}{\overline{z}}$ est un imaginaire pur.

Affirmation 7

La solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation :

$$-\frac{1}{\overline{z}}=3+2\mathrm{i}$$

est

$$-\frac{3}{13}-\frac{2}{13}\mathrm{i}$$

wsl;;;;;àii

Exercice 12. ** Raisonner (ex.102)

Soit z un nombre complexe non nul.
Indiquer pour chacun des nombres suivant, s'il s'agit d'un nombre réel ou d'un nombre imaginaire pur. Justifier.

1. $z_1 = z + \overline{z}$;
2. $z_2 = z\overline{z}$;
3. $z_3 = z - \overline{z}$;
4. $z_4 = \dfrac{z}{\overline{z}}$;
5. $z_5 = z^2 + \overline{z}^2$;
6. $z_6 = z^2 - \overline{z}^2$;
7. $z_7 = \dfrac{z + \overline{z}}{z - \overline{z}}$ avec $z \neq \overline{z}$;
8. $z_8 = \dfrac{z - \overline{z}}{z + \overline{z}}$ avec $z \neq \overline{z}$;
9. $z_9 = \dfrac{z^2 + \overline{z}^2}{z\overline{z}}$;
10. $z_{10} = \dfrac{z^2 - \overline{z}^2}{z\overline{z}}$;

Partie IV. Premières équations

Exercice 13. Équations

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes en donnant les résultats sous forme algébrique :

1. $2\,\mathrm{i}\,z + 4 = -3z + \mathrm{i}$
2. $z + 2\,\overline{z} = 3 - 4\,\mathrm{i}$
3. $\dfrac{z}{1+2\,\mathrm{i}} = \mathrm{i} + \dfrac{1}{1-2\,\mathrm{i}}$
4. $\dfrac{z}{1+2\,\mathrm{i}} = \mathrm{i}\,\overline{z} + 1$
5. $z^2 + 2\,\mathrm{i} = z\overline{z} + z$
6. $\mathrm{i}\,z - 3 = 2\overline{z}$
7. $z + 2\,\mathrm{i} = \dfrac{z+1}{2+\mathrm{i}}$

Réponses

1. $z = -\dfrac{10}{13} + \dfrac{11}{13}\,i$
2. $z = 1 + 4\,i$
3. $z = -\dfrac{13}{5} + \dfrac{9}{5}\,i$
4. $z = \dfrac{1}{10} + \dfrac{7}{10}\,i$
5. $z = 2\,i$
6. $z = -2 + i$
7. $z = -\dfrac{1}{2} - i\,\dfrac{7}{2}$

Exercice 14. Résolution de systèmes

Résoudre les systèmes :

1. $(S)\ :\ \begin{cases} 2z_1 + z_2 = 4 \\ 2\ \mathrm{i}\ \overline{z_1} + \overline{z_2} = 0 \end{cases}$

2. $(S)\ :\ \begin{cases} z_1 + \overline{z_2} = 1 + 5\,\mathrm{i} \\ \overline{z_1} + 2\,\mathrm{i}\ z_2 = 7 - 2\,\mathrm{i} \end{cases}$

3. $(S)\ :\ \begin{cases} \overline{z_1} - \mathrm{i}\ \overline{z_2} = 2 \\ 3\,\mathrm{i}\ z_1 + 2\,\mathrm{i}\ z_2 = -9 \end{cases}$

Réponses

1. *?*

2. $\begin{cases} z_1 = 1 + 2\,i \\ z_2 = -3\,i \end{cases}$

3. $\begin{cases} z_1 = 2 + 3\,i \\ z_2 = -3 \end{cases}$

Exercice 15. Racines conjuguées

Soit $P(z) = z^3 - 3z^2 + 4z - 12$ pour $z \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que pour tout complexe z on a : $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$.

2. Vérifier que $(-2\,\mathrm{i})$ est solution de l'équation $P(z) = 0$.

3. En déduire que $2\,\mathrm{i}$ est aussi une solution de l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 16. Racines conjuguées 2

Soit (E) l'équation $z^3 - z^2 + z - 1 = 0$.

1. Démontrer que si z est une solution de l'équation (E), alors $\overline{z}$ est également une solution de (E).
2. Montrer que 1 et i sont des solutions de (E).
   Donner une troisième solution de (E).

Partie V. Représentation et configuration

Exercice 17. Représentation et configuration

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, on considère les points A, B, C et D d'affixes :

$$z_A = -3 - 3\,\mathrm{i} \ ; \ z_B = -2 + 3\,\mathrm{i} \ ; \ z_C = 5 + 5\,\mathrm{i} \ ; \ z_D = 4 - \mathrm{i}$$

1. Placer les point dans un repère.
2. Démontrer que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme et calculer l'affixe de son centre K.
3. Les points A, O, K et D sont-ils alignés ?

Aide

Pour montrer que 3 points M, N et P sont alignés, on peut par exemple montrer que $z_{\overrightarrow{MN}} = k\,z_{\overrightarrow{MP}}$ avec k réel, ce qui revient à montrer la colinéarité des vecteurs correspondants.

Exercice 18. Représentation et configuration

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, on considère les points A, B et D d'affixes :

$$z_A = -3 - \mathrm{i} \ ; \ z_B = 1 + 3\,\mathrm{i} \ ; \ z_D = 2 - 3\,\mathrm{i}$$

1. Placer les points dans un repère.
2. Déterminer l'affixe du point C tel que ABCD soit un parallélogramme.

Réponses

- $z_C = 6 - i$

Exercice 19. Cercle et médiatrice

On se place dans le plan complexe, muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.

1. Les points C et D sont d'abscisses respectives $(1+4\,\mathrm{i}\,)$ et $(2-\ \mathrm{i}\,)$. Déterminer la distance CD.

2. Soit A un point du cercle de centre le point O et de rayon 3. Soit z son affixe, que vaut $z\overline{z}$?

3. Déterminer l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que :

3. a. $|z-1-4\,\mathrm{i}\,|=3$

3. b. $|z-1-4\,\mathrm{i}\,|=|z-2+\ \mathrm{i}\,|$

Réponses

On se place dans le repère orthonormée $\left(O,\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.

1. $CD=\sqrt{26}$ *u.l.*.

2. $z\overline{z}=9$.

3. **3. a.** $\mathcal{C}\,(C\ ;\ 3)$.

3. b. *Médiatrice de [CD].*

Exercice 20. Étude de configurations 1

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.
Soit A et B les points d'affixes respectives $(2 - 5\,\text{i}\,)$ et $(7 - 3\,\text{i}\,)$.
Montrer que le triangle OAB est rectangle isocèle.

Réponses

$OA = AB = \sqrt{29}$ et $OB = \sqrt{58}$ et avec la réciproque de Pythagore on conclut.

Exercice 21. Étude de configurations 2

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.
Soit A, B et C les points d'affixes respectives :

$$z_A = 1 + \mathrm{i} \quad , \quad z_B = 3\,\mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_C = \left(\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right) + \mathrm{i}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\right)$$

Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

Exercice 22. Étude de configurations 3

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.
Soit M_1, M_2 et M_3 les points d'affixes respectives :

$$z_1 = \sqrt{3} + \mathrm{i} \quad , \quad z_2 = \sqrt{3} - \mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_3 = -2\,\mathrm{i}$$

1. Montrer que M_1, M_2 et M_3 sont situés sur un même cercle de centre O.

2. Démontrer que $OM_1M_2M_3$ est un losange.

Partie VI. Ensembles de points

Exercice 23. Ensemble de points : avec le conjugué 1

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.
Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixe z tels que : $z^2 - \overline{z}$ soit réel.

Réponses

$\mathcal{E}$ est la réunion des droites d'équation $y = 0$ (axe des réels) et $x = -\dfrac{1}{2}$.

Exercice 24. Ensemble de points : avec le conjugué 2 (c)

1. Démontrer la propriété :

$$Z \in \mathbb{R} \iff Z = \overline{Z}$$

2. Soit z un nombre complexe différent de 2 et Z le nombre complexe $Z = \dfrac{3z+1}{z-2}$.
Déterminer l'ensemble (E) des complexes z pour lesquels Z est réel.

Exercice 25. Ensemble de points : avec le conjugué 3

1. Déterminer l'ensemble des réels x et y pour que l'on ait :

$$(2\,\mathrm{i}+1)x+(-1+\mathrm{i})y=1+2\,\mathrm{i}$$

2. A quelle condition le nombre complexe

$$z=x+1+\mathrm{i}\,(-\mathrm{i}\,x+x)+3\,\mathrm{i}-3\,\mathrm{i}\,x$$

est-il un réel ? un imaginaire pur ?

3. On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe $z=x+\mathrm{i}\,y$ tels que le nombre complexe $Z=\dfrac{x+1+\mathrm{i}\,y}{x+\mathrm{i}\,(y-1)}$ soit un réel.

Réponses

1. $x=1$ *et* $y=0$
2. $z\in\mathbb{R} \iff x=\dfrac{3}{2}$ *et* $z\in i\mathbb{R} \iff x=-0,5$
3. *L'ensemble est la droite d'équation* $x-y+1=0$ *privée du point* $(0\ ;\ 1)$.

Exercice 26. Ensemble de points : avec le module 1

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1. Dans le plan complexe, les points C et D ont pour affixes respectives $1+4\,\text{i}$ et $2-\text{i}$. Déterminer la distance CD.

> **Aide**
> $CD = |z_D - z_C|$

2. Soit A un point du cercle de centre O et de rayon 3. Soit z_A son affixe, que vaut $z_A\,\overline{z_A}$?
3. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}_1$ des points M d'affixe z tels que : $|z-1-4\,\text{i}\,| = 3$.
4. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}_2$ des points M d'affixe z tels que : $|z-1-4\,\text{i}\,| = |z-2+\text{i}\,|$.

> **Réponses**
> $CD = \sqrt{26}$ *u.l.* , $z_A\,\overline{z_A} = 9$
> *$\mathcal{E}_1$ est le cercle de centre C et de rayon 3. $\mathcal{E}_2$ est la médiatrice du segment [CD].*

Exercice 27. Ensemble de points : avec le module 2

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

1. $|z| = z$

2. $|z| = z + \overline{z}$

3. $\left|\overline{z} + \dfrac{1}{3}\,\mathrm{i}\right| = 3$

Réponses

1. $S_1 = \mathbb{R}$.

2. *S_2 est composé des deux demi-droites d'abscisses positives et d'équations $y = \sqrt{3}\,x$ et $y = -\sqrt{3}\,x$.*

3. *S_3 est le cercle de centre C d'affixe $z_C = \dfrac{1}{3}\,i$ et de rayon 3.*

Partie VII. Équations polynomiales à coefficients réels de degré 2

Exercice 28. Équations du second degré ... et autres

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 + 4 = 0$
2. $-10z^2 + 2z + 1 = 0$
3. $z^4 + 6z^2 - 7 = 0$
4. $2 - z = \dfrac{2}{z}$
5. $\dfrac{1}{z^2} - \dfrac{4}{z} + 5 = 0$

Réponses

1. $z_1 = 2\,i$ *et* $z_2 = \overline{z_1}$
2. $z_1 = \dfrac{1}{10} + \dfrac{3}{10}\,i$ *et* $z_2 = \overline{z_1}$
3. $S = \left\{1\ ;\ -1\ ;\ i\sqrt{7}\ ;\ -i\sqrt{7}\right\}$
4. $z_1 = 1 - i$ *et* $z_2 = \overline{z_1}$

Exercice 29. Équations du second degré

1. Développer $\left(1-\sqrt{3}\right)^2$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2+\left(1-\sqrt{3}\right)z+2-\sqrt{3}=0$$

Réponses

$$z_1=\frac{-1+\sqrt{3}-i\left(1-\sqrt{3}\right)}{2} \quad \textit{et} \quad z_2=\overline{z_1}$$

Exercice 30. Équations du second degré et changement de variable

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 + 4z + 7 = 0$$

2. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation .

$$(\mathrm{i}\ z + 1)^2 + 4(\mathrm{i}\ z + 1) + 7 = 0$$

Réponses

1. $S_1 = \left\{ -2 - i\sqrt{3}\ ;\ -2 + i\sqrt{3} \right\}$

2. $S_2 = \left\{ \sqrt{3} + 3i\ ;\ -\sqrt{3} + 3i \right\}$

Partie VIII. Fonctions polynômes à coefficients réels

Exercice 31. (c) Racines d'un polynôme

On cherche à déterminer toutes les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme $P(z) = 2z^3 + 3z - 5$ avec leur ordre de multiplicité.

1. D'après le théorème fondamentale de l'algèbre, combien ce polynôme compte-t-il de racines dans $\mathbb{C}$?

2. Déterminer une racine entière évidente α.

3. En déduire une factorisation de P de la forme :

$$P(z) = (z - \alpha)(az^2 + bz + c)$$

3. a. D'une part en effectuant une division polynômiale ;

3. b. D'autre part en procédant par développement et identification des coefficients.

4. En déduire les racines du polynôme P en précisant leur ordre de multiplicité.

5. Factoriser P en produit de polynôme de degré 1.

Exercice 32. Vrai/Faux : Application des théorèmes

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

Affirmation 8

Les polynômes P_1 et P_2 définis sur $\mathbb{C}$ par $\mathrm{P}_1(z) = z^3 + 1$ et $\mathrm{P}_2(z) = z^3 - z^2 + 2$ ont un facteur commun de la forme $(z - \alpha)$ avec α réel.

Affirmation 9

Soit a et b deux nombres réels quelconques.
Les polynômes P et Q définis sur $\mathbb{C}$ par

$$\mathrm{P}(z) = 2az^3 + az^2 + bz + b + a$$

et

$$\mathrm{Q}(z) = z^4 + bz^3 + bz^2 + abz + ab - 1$$

ont un facteur commun de la forme $(z - \alpha)$ avec α réel.

Exercice 33. Équations du troisième degré

1. Déterminer un entier naturel n solution de l'équation :

$$(E) \quad : \quad z^3 + z^2 - 2 = 0$$

2. Déterminer les réels a, b et c tels que :

$$z^3 + z^2 - 2 = (z - n)(az^2 + bz + c)$$

3. En déduire les solutions de l'équation (E) dans $\mathbb{C}$.

Exercice 34. Équations du troisième degré (bis)

Soit $P(z)$ défini pour z un nombre complexe par :

$$P(z) = z^3 - 6z^2 + 21z - 26$$

1. Vérifier que pour tout nombre complexe z :

$$P(z) = (z-1)(z^2 - 4z + 13)$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

Réponses

$S = \left\{2\ ;\ 2 + 3\,i\ ;\ 2 - 3\,i\right\}$

Exercice 35. Une équation de degré 4 (ex. 125)

Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par :

$$\mathrm{P}(z) = z^4 + 2z^3 - z^2 + 2z + 1.$$

1. Vérifier que 0 n'est pas une racine du polynôme P.

2. Pour $z \neq 0$ on pose $u = z + \dfrac{1}{z}$.
Exprimer $u^2 - 3$ en fonction de z.

3. Calculer $\dfrac{P(z)}{z^2}$ pour $z \neq 0$ et l'exprimer en fonction de u.

4. En déduire les racines du polynôme P et les exprimer sous forme algébrique.

Exercice 36. (c) Une Classique équation de degré 4 (ex. 136)

On considère le polynôme P à coefficients réels défini sur $\mathbb{C}$ par

$$P(u) = u^4 - 1$$

1. Factoriser le polynôme P dans $\mathbb{C}$ en produit de facteurs du premier degré à coefficients complexes.

2. En déduire les 4 racines distinctes de P.

3. On considère l'équation :

$$\text{(E)} : \left(\frac{1-2z}{z-2}\right)^4 = 1$$

En utilisant les résultats de la question 2., résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{C}$.

Partie IX. Application des formules de Viète

Exercice 37. Application des formules de Viète (ex. 106

Déterminer deux nombres complexes u et v sachant que leur somme est égale à 3 et que leur produit est égal à 5.

Exercice 38. * Application des formules de Viète

Définition 1

Un nombre algébrique est un nombre réel ou complexe solution d'une équation polynomiale à coefficients dans le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels (autrement dit racine d'un polynôme non nul à coefficients rationnels).

Démontrer que tout nombre complexe de la forme $z = a + \text{i}\, b$ avec a et b entier est algébrique.
Que dire si a et b sont rationnels ?

Partie X. Formule du binôme de Newton

Exercice 39.

1. Développer $z = (1 + \text{i})^8$ avec la formule du binôme de Newton pour obtenir sa forme algébrique.
2. Retrouver ce résultat à l'aide de $(1 + \text{i})^2$.

Exercice 40.

Développer avec la formule du binôme de Newton et le triangle de Pascal :

1. $(1+\mathrm{i})^5$
2. $(1-\mathrm{i})^4$
3. $(3+2\mathrm{i})^6$

Exercice 41. Parité

Montrer que pour tout entier naturel n,

$$\left(3+\sqrt{5}\right)^n+\left(3-\sqrt{5}\right)^n$$

est un entier pair.

Partie XI. Bilan et compléments

Exercice 42. Complexes et suites : D'après bac Polynésie 2020

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.
On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par :

$$z_0 = 0 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ z_{n+1} = (1+\mathrm{i})z_n - \mathrm{i}.$$

Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n.
On note B le point d'affixe 1.

1.

1. a. Montrer que $z_1 = -\mathrm{i}$ et que $z_2 = 1 - 2\mathrm{i}$.

1. b. Calculer z_3.

1. c. Sur la copie, placer les points B, A_1, A_2 et A_3 dans le repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

1. d. Démontrer que le triangle BA_1A_2 est isocèle rectangle.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n - 1|$.

2. a. Démontrer que pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = \sqrt{2}u_n$.

2. b. Déterminer à partir de quel entier naturel n, la distance BA_n est strictement supérieure à 1 000. On détaillera la démarche choisie.

Exercice 43. Complexes et Géométrie : D'après bac Nouvelle Calédonie 2 décembre 2020

1. On considère l'équation (E) : $z^3 = 4z^2 - 8z + 8$ ayant pour inconnue le nombre complexe z.

1. a. Démontrer que, pour tout nombre complexe z,

$$z^3 - 4z^2 + 8z - 8 = (z-2)\left(z^2 - 2z + 4\right).$$

1. b. Résoudre l'équation (E).

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.
Soit A, B, C et D les quatre points d'affixes respectives

$$z_{\text{A}} = 1 + \text{i}\sqrt{3} \qquad z_{\text{B}} = 2 \qquad z_{\text{C}} = 1 - \text{i}\sqrt{3} \qquad z_{\text{D}} = 1.$$

Ces quatre points sont représentés dans la figure ci-dessous.

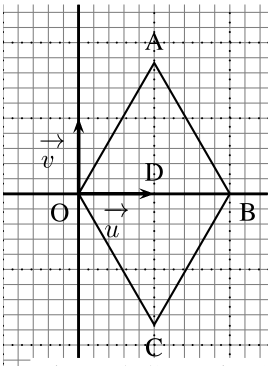


Figure de l'exercice 1

2. Quelle est la nature du quadrilatère OABC ? Justifier.

3. Soit M le point d'affixe $z_{\text{M}} = \dfrac{7}{4} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

3. a. Démontrer que les points A, M et B sont alignés.

3. b. Démontrer que le triangle DMB est rectangle.

Exercice 44. D'après Bac Pondichéry 2019

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.

Le but de cet exercice est de déterminer les nombres complexes z non nuls tels que les points d'affixes 1, z^2 et $\dfrac{1}{z}$ soient alignés.
Sur le graphique fourni en annexe, le point A a pour affixe 1.

Partie A : étude d'exemples

1. **Un premier exemple**
   Dans cette question, on pose $z = \text{i}$.

   1. a. Donner la forme algébrique des nombres complexes z^2 et $\dfrac{1}{z}$.

   1. b. Placer les points N_1 d'affixe z^2, et P_1 d'affixe $\dfrac{1}{z}$ sur le graphique donné en annexe.
   On remarque que dans ce cas les points A, N_1 et P_1 ne sont pas alignés.

2. **Une équation**
   Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation d'inconnue z : $z^2 + z + 1 = 0$.

3. **Un deuxième exemple**
   Dans cette question, on pose : $z = -\dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

   3. a. Déterminer la forme algébrique des nombres complexes z^2 et $\dfrac{1}{z}$.

   3. b. Placer les points N_2 d'affixe z^2 et P_2, d'affixe $\dfrac{1}{z}$ sur le graphique donné en annexe.
   On remarque que dans, ce cas les points A, N_2 et P_2 sont alignés.

Partie B

Soit z un nombre complexe non nul.
On note N le point d ?affixe z^2 et P le point d'affixe $\dfrac{1}{z}$.

1. Établir que, pour tout nombre complexe différent de 0, on a :

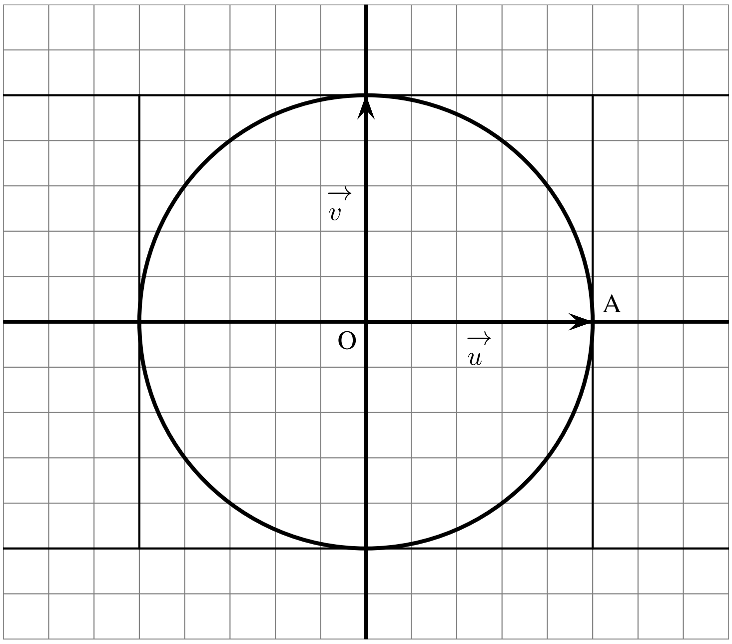
$$z^2 - \frac{1}{z} = \left(z^2 + z + 1\right)\left(1 - \frac{1}{z}\right).$$

2. On rappelle que si, $\overrightarrow{U}$ est un vecteur non nul et $\overrightarrow{V}$ un vecteur d'affixes respectives $z_{\overrightarrow{U}}$ et $z_{\overrightarrow{V}}$, les vecteurs $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un nombre réel k tel que $z_{\overrightarrow{V}} = kz_{\overrightarrow{U}}$.
   En déduire que, pour $z \neq 0$, les points A, N et P définis ci-dessus sont alignés si et seulement si $z^2 + z + 1$ est un réel.

3. On pose $z = x + \text{i}y$, où x et y désignent des nombres réels.
   Justifier que : $z^2 + z + 1 = x^2 - y^2 + x + 1 + \text{i}(2xy + y)$.

4. **4. a.** Déterminer l'ensemble des points M d'affixe $z \neq 0$ tels que les points A, N et P soient alignés.

   4. b. Tracer cet ensemble de points sur le graphique donné en annexe.


A
O
$\vec{u}$
$\vec{v}$

Partie XII. Now We Can Talk !

Exercice 45. * Fonction d'une variable complexe

On se propose dans cet exercice de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

- $\forall z \in \mathbb{R}$, $f(z) = z$;
- $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2$, $f(z + z') = f(z) + f(z')$;
- $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2$, $f(zz') = f(z) \times f(z')$;

1. Vérifier que les fonctions définies par $f(z) = z$ et $f(z) = \overline{z}$ sont solutions du problème.

2. Réciproquement soit f une fonction du problème.

2. a. Démontrer que $f(i) = i$ ou $f(i) = -i$.

2. b. On suppose que $f(i) = i$.
Démontrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = z$.

2. c. On suppose que $f(i) = -i$.
Démontrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \overline{z}$.

3. Qu'a-t-on démontré dans cet exercice ?

Exercice 46. * Nombres de Gauss

On appelle ensemble des entiers de Gauss noté $\mathbb{Z}[i]$ l'ensemble des nombres complexes qui s'écrivent $a + ib$, avec a et b entiers relatifs (dans $\mathbb{Z}$)

1. Soit z et z' deux entiers de Gauss. Démontrer que $z?z'$ et zz' sont des entiers de Gauss.

2. Pour tout nombre complexe z , on note $N(z) = z\overline{z}$.
Démontrer que, pour tous nombres complexes z et z', $N(z)N(z') = N(zz')$.

3. Démontrer que, pour tout entier de Gauss z , $N(z)$ est un entier naturel.

4. Soit z un entier de Gauss non nul tel que $1/z$ est un entier de Gauss. Démontrer que $N(z) = 1$.

5. Déterminer l'ensemble des entiers de Gauss tels que $1/z$ est un entier de Gauss.

Fin du TD

Corrigés

Corrigé de l'exercice 24

Soit z un nombre complexe différent de 2 et Z le nombre complexe $Z = \dfrac{3z+1}{z-2}$.

1. **Démontrer la propriété : $Z \in \mathbb{R} \iff Z = \overline{Z}$**

Posons $Z = A + \mathrm{i}\,B$.

- Si $Z \in \mathbb{R}$, la partie imaginaire est nulle soit $B = 0$ et donc $Z = A \in \mathbb{R}$. Alors on a $\overline{Z} = A = Z$.
- Si $Z = \overline{Z}$, alors

$$A + \mathrm{i}\,B = A - \mathrm{i}\,B \iff \mathrm{i}\,B = -\mathrm{i}\,B \iff 2\,\mathrm{i}\,B = 0 \iff B = 0$$

Et donc Z est réel.

2. **Déterminer l'ensemble (E) des complexes z pour lesquels Z est réel.**

- Méthode 1 : on pose $z = a + \mathrm{i}\,b$ et on écrit Z sous forme algébrique puis on écrit que Z réel si sa partie imaginaire est nulle.
Pour $z \neq 2$ on a :

$$\begin{aligned}
Z &= \frac{3z+1}{z-2} = \frac{3(a+\mathrm{i}\,b)+1}{a+\mathrm{i}\,b-2} \\
Z &= \frac{\Big[(3a+1)+3\,\mathrm{i}\,b\Big]\Big[(a-2)-\mathrm{i}\,b\Big]}{\Big[(a-2)+\mathrm{i}\,b\Big]\Big[(a-2)-\mathrm{i}\,b\Big]} \\
Z &= \frac{(3a+1)(a-2)+3b^2+\mathrm{i}\Big[-(3a+1)b+3b(a-2)\Big]}{(a-2)^2+b^2}
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
Z \in \mathbb{R} &\iff \begin{cases} z \neq 2 \\ -(3a+1)b+3b(a-2) = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} z \neq 2 \\ b(-3a-1+3a-6) = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} z \neq 2 \\ b = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc l'ensemble (E) des complexes z pour lesquels Z est réel est l'axe réel privé du point d'affixe 2.

- Méthode 2 : on applique le résultat de la question (1).
Pour $z \neq 2$ on a :

$$\begin{aligned}
Z\in\mathbb{R} &\iff Z=\overline{Z}\\
&\iff \frac{3z+1}{z-2}=\overline{\left(\frac{3z+1}{z-2}\right)}\\
&\iff \frac{3z+1}{z-2}=\frac{3\overline{z}+1}{\overline{z}-2} \iff \frac{3z+1}{z-2}-\frac{3\overline{z}+1}{\overline{z}-2}=0\\
&\iff \frac{(3z+1)\left(\overline{z}-2\right)-\left(3\overline{z}+1\right)(z-2)}{\left(\overline{z}-2\right)(z-2)}=0\\
&\iff \frac{3z\overline{z}-6z+\overline{z}-2-\left(3z\overline{z}-6\overline{z}+z-2\right)}{\left(\overline{z}-2\right)(z-2)}=0\\
&\iff \begin{cases}-7z+7\overline{z}=0\\ z\neq 2\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}z=\overline{z}\\ z\neq 2 \text{ et } \overline{z}\neq 2\end{cases} \iff \begin{cases}z\in\mathbb{R}\\ z\neq 2\end{cases}
\end{aligned}$$

Donc l'ensemble (E) des complexes z pour lesquels Z est réel est l'axe réel privé du point d'affixe 2.

Corrigé de l'exercice 31

On cherche à déterminer toutes les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme $P(z)=2z^3+3z-5$ avec leur ordre de multiplicité.

1. D'après le théorème fondamentale de l'algèbre, combien ce polynôme compte-t-il de racines dans $\mathbb{C}$?
2. Déterminer une racine entière évidente α.
3. En déduire une factorisation de P de la forme :

$$P(z)=(z-\alpha)(az^2+bz+c)$$

3. a. D'une part en effectuant une division polynômiale ;

3. b. D'autre part en procédant par développement et identification des coefficients.

4. En déduire les racines du polynôme P en précisant leur ordre de multiplicité.
5. Factoriser P en produit de polynôme de degré 1.

Corrigé

1. D'après le théorème fondamentale, le polynôme P étant de degré 3, admet 3 racines complexes, comptées avec leur ordre de multiplicité.
2. On remarque que 1 est une racine évidente car $P(1)=0$ donc le polynôme est factorisable par $(z-1)$.
3. Par division polynomiale :

$$\begin{array}{rrr|l}
2z^3 & & +3z-5 & z-1\\ \cline{4-4}
-2z^3+2z^2 & & & 2z^2+2z+5\\ \cline{1-1}
 & 2z^2+3z & & \\
 & -2z^2+2z & & \\ \cline{2-2}
 & & 5z-5 & \\
 & & -5z+5 & \\ \cline{3-3}
 & & 0 &
\end{array}$$

donc

$$P(z)=(z-1)(2z^2+2z+5)$$

4. Par identification :
Puisque 1 est racine de P on sait que P se factorise sous la forme :

$$P(z)=(z-1)(az^2+bz+c)$$

Or :

$$P(z) = \begin{cases} (z-1)(az^2+bz+c) = az^3+(b-a)z^2+(c-c)z-c \\ P(z) = 2z^3+3z-5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a=2 \\ c=5 \\ b=2 \end{cases}$$

$$P(z) = (z-1)(2z^2+2z+5)$$

5. L'expression $2z^2 + \ 2z + \ 5$ est du second degré de la forme az^2+bz+c avec :

$$\left\{ \begin{array}{c|} a=2 \\ b=2 \\ c=5 \end{array} \right. \Longrightarrow \Delta = -36 < 0$$

Le discriminant Δ étant strictement négatif, l'expression polynôme admet deux racines complexes conjugués :

$$z_1 = \frac{-2+i\sqrt{36}}{4} \quad \text{et} \quad z_2 = \overline{z_1} = \frac{-2-i\sqrt{36}}{4}$$

soit

$$z_1 = \frac{-1+3\,\mathrm{i}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \overline{z_1}$$

6. Le polynôme P admet donc 3 racines simples et est donc scindé dans $\mathbb{C}$ car décomposable en produit de polynômes de degré 1.

C'est une propriété de $\mathbb{C}$ qui est dit algébriquement clos.

$$\boxed{P(z) = (z-1)\,(z-z_1)\,(z-\overline{z_1})}$$

Corrigé de l'exercice ??

1. On considère le polynôme P à coefficients réels défini sur $\mathbb{C}$ par $\mathrm{P}(u) = u^4 - 1$.

a. Factoriser le polynôme P dans $\mathbb{C}$ en produit de facteurs du premier degré à coefficients complexes.

Pour tout $u \in \mathbb{C}$, $P(u) = u^4 - 1 = \left(u^2\right)^2 - 1^2 = (u^2 - 1)(u^2 + 1) = (u - 1)(u + 1)(u - \mathrm{i})(u + \mathrm{i})$.

b. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\mathrm{P}(u) = 0$.

Ainsi, l'ensemble des solutions de $(u) = 0$ est $S_{\mathbb{C}} = \{-1; 1; -\mathrm{i}; \mathrm{i}\}$.

2. On considère l'équation (E) : $\left(\dfrac{1-2z}{z-2}\right)^4 = 1$.

En utilisant les résultats de la question **1. b.**, résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{C}$.

(E) : $\left(\dfrac{1-2z}{z-2}\right)^4 = 1$ est définie si, et seulement si, $z \neq 2$.

D'après la question 1.b. :

$$(E) \Leftrightarrow \frac{1-2z}{z-2} = -1 \text{ ou } \frac{1-2z}{z-2} = 1 \text{ ou } \frac{1-2z}{z-2} = -\mathrm{i} \text{ ou } \frac{1-2z}{z-2} = \mathrm{i}.$$

Or $\dfrac{1-2z}{z-2} = -1 \Leftrightarrow 1 - 2z = -z + 2 \Leftrightarrow z = -1$, $\dfrac{1-2z}{z-2} = 1 \Leftrightarrow 1 - 2z = z - 2 \Leftrightarrow z = 1$, $\dfrac{1-2z}{z-2} = -\mathrm{i} \Leftrightarrow 1 - 2z = -\mathrm{i}z + 2\mathrm{i} \Leftrightarrow z = \dfrac{1-2\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}} \Leftrightarrow z = \dfrac{4}{5} - \dfrac{3}{5}\mathrm{i}$ et $\dfrac{1-2z}{z-2} = \mathrm{i} \Leftrightarrow 1 - 2z = \mathrm{i}z - 2\mathrm{i} \Leftrightarrow z = \dfrac{1+2\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}} \Leftrightarrow z = \dfrac{4}{5} + \dfrac{3}{5}\mathrm{i}$. Toutes ces valeurs étant différentes de 2, on en déduit que l'ensemble des solutions de (E) est $S_{\mathbb{C}} = \left\{-1; 1; \dfrac{4}{5} + \dfrac{3}{5}\mathrm{i}; \dfrac{4}{5} - \dfrac{3}{5}\mathrm{i}\right\}$.