Math93.com

TD 2 - Tle Maths Expertes
Complexes - partie 2

Les exercices suivants dont l'intitulé est suivi du symbole (c) sont corrigés intégralement en fin du présent TD.
Les autres présentent des éléments de réponses ou un lien vers une correction détaillée sur www.math93.com

Table des matières

Partie I. Forme trigonométrique d'un nombre complexe non-nul

Exercice 1. (c) Représenter

Math'x 56, 57 p 285

Dans le plan complexe, représenter l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

1. $\arg(z) = 0 \quad (2\pi)$
2. $\arg(z) = \pi \quad (2\pi)$
3. $\arg(z) = \frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$
4. $\arg(z) = \frac{\pi}{2} \quad (\pi)$
5. $\arg(z) = \frac{\pi}{4} \quad (2\pi)$
6. $\arg(z) = -\frac{\pi}{3} \quad (\pi)$
7. $\arg(z) = \frac{\pi}{4} \quad (\pi)$

Exercice 2. Module et argument

Math'x 58, 59, 64 p 285

Méthode

1. Pour passer d'une forme trigonométrique à la forme algébrique d'un nombre complexe, on doit déterminer les valeurs de $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$ puis on développe.

2. Pour passer de la forme algébrique à une forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul, on doit :

2. a. calculer le module de z ;

2. b. calculer
$$\cos(\alpha) = \frac{x}{|z|} \text{ et } \sin(\alpha) = \frac{y}{|z|}$$

2. c. obtenir une valeur de α correspondant.

Déterminer le module, un argument et la forme trigonométrique des nombres complexes :

1. $z_1 = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$

2. $z_2 = 3 - \mathrm{i}\sqrt{3}$

3. $z_3 = 7 - 7\,\mathrm{i}$

4. $z_4 = \frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$

5. $z_5 = -4\,\mathrm{i}$

6. $z_6 = -1$

7. $z_7 = 3\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{6}$

8. $z_8 = -3\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)$

9. $z_9 = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} - \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)$

10. $z_{10} = \cos\alpha - \mathrm{i}\sin\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

11. $z_{11} = \sin\alpha - \mathrm{i}\cos\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

Exercice 3. Ensemble de points

Math'x 75 p 286

Dans le plan complexe, A est le point d'affixe a tel que :

$$\begin{cases} |a| = 2 \\ \arg(a) = \dfrac{\pi}{4} \quad (2\pi) \end{cases}$$

Soit f l'application du plan qui à tout point M d'affixe z, privé du point O d'affixe 0, associe le point M' d'affixe

$$z' = \frac{-2}{z}$$

1. Quelles relations lient les modules de z et z' ainsi que les arguments de z et z' ?

2. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

2. a. z' soit un réel strictement positif ;

2. b. z' soit un réel ;

2. c. z' soit un imaginaire pur.

3. Dans le plan complexe, quel est l'ensemble des points M' d'affixe z' lorsque :

3. a. M appartient au disque de centre O, de rayon 2, privé de O.

3. b. M appartient au segment [OA], privé du point O ?

4. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points du plan $\mathcal{P}$ invariants par f, c'est à dire des points M du plan tels que $f(M) = M$.

Exercice 4. Application à la trigonométrie

Math'x 88 p 287

On donne :

$$z_1 = 1 - \mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{\sqrt{6} - \mathrm{i}\sqrt{2}}{2}$$

1. Déterminer la forme trigonométrique de :

$$z_1 \;;\; z_2 \;\text{ et }\; \frac{z_1}{z_2}$$

2. Déterminer la forme algébrique de $\dfrac{z_1}{z_2}$.

3. En déduire les valeurs exactes de :

3. a. $\cos\left(\dfrac{-\pi}{12}\right)$; **3. b.** $\sin\left(\dfrac{-\pi}{12}\right)$; **3. c.** $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$; **3. d.** $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Partie II. Forme exponentielle d'un nombre complexe

Exercice 5. (c) Forme exponentielle - premiers pas (ex. 35)

Déterminer une forme exponentielle des nombres complexes suivants.

1. $z = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{i}$

2. $z = -\sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2}$

3. $z = \frac{-\sqrt{5}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{15}}{2}$

Exercice 6. (c) Forme exponentielle - premiers pas (ex. 36)

On considère les deux nombres complexes $z = 3\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}$ et $z' = 12\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}$.
Déterminer une forme exponentielle des nombres donnés.

1. $3z$

2. $-3z'$

3. zz'

4. $\frac{z}{z'}$

5. z^3

6. $z^3z'^2$

Exercice 7. (c) Forme exponentielle et formules

Déterminer la forme exponentielle du nombre :

$$z = (-1 - \mathrm{i})(3 + 3i\sqrt{3}).$$

Méthode

- On détermine le module et un argument de chaque facteur.
- On utilise les propriétés opératoires pour conclure.

Exercice 8. (c) Puissances des nombres complexes (c)

1. Soit $z = \sqrt{3} + \mathrm{i}$ et n un entier relatif.
Déterminer n pour que z^n soit un nombre complexe imaginaire pur.

2. Montrer que : $(-1 + \mathrm{i})^{11} = 32 + 32\,\mathrm{i}$.

Exercice 9. (c) Avec des suites (c)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.
On considère la suite des points M_n d'affixes

$$z_n = \frac{-1 + \text{i}\sqrt{3}}{2^n}$$

1. Déterminer : $\lim\limits_{n\to+\infty} OM_n$.

2. Démontrer que les points M_n appartiennent à une même demi-droite.

Partie III. Forme exponentielle et trigonométrie

Formules d'Euler et de Moivre

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a :

$$\cos(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + e^{-\mathrm{i}\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - e^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}$$

et pour $n \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{\mathrm{e}^{\,n\,\mathrm{i}\,\theta} = \left(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}\right)^n} \iff \boxed{\cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta) = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n}.$$

.

Exercice 10. (c) Linéarisation 1

Exprimer $\cos^3(x)$ en fonction d'une somme de cosinus de la forme cos(nx), où $n \in \mathbb{N}$. On dit que l'on linéarise $\cos^3(x)$.

Méthode

Pour linéariser, il faut se servir des formules d'Euler, puis développer. On utilise ensuite les propriétés opératoires sur les exponentielles complexes, puis on utilise de nouveau les formules d'Euler.

Exercice 11. (c) Linéarisation (ex. 42)

Linéariser les expressions suivantes.

1. $\cos^2(x)$
2. $\sin^3(x)$
3. $\cos^2(x)\sin(x)$

Exercice 12. Application à la trigonométrie

Math'x 90 p 287

1. Soit a un réel. Écrire $\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,a}$ sous forme algébrique.
2. Écrire $\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,a}$ puis $\left(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,a}\right)^2$ sous forme algébrique.
3. Retrouver les formule donnant $\cos 2a$ et $\sin 2a$ en fonction de $\cos a$ et $\sin a$.

Exercice 13. (c) $\cos 3\theta$ (ex. 43)

À l'aide de la formule de Moivre, exprimer, pour tout réel θ, $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$.

Exercice 14. Équations

Math'x 97, 98 p 287

1. Soit $\theta \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{4}\right[$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$$z^2 + 2(1 - \cos 2\theta)\,z + 2(1 - \cos 2\theta) = 0$$

2. Soit $\theta \in \left]-\pi\,;\,\pi\right]$.

2. a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation l'équation d'inconnue z

$$z^2 - (2\cos\theta)\,z + 1 = 0$$

2. b. Donner la forme exponentielle des solutions z_1 et z_2.

2. c. Placer les points images de ces solutions pour $\theta = -\frac{2\pi}{3}$ puis pour $\theta = \frac{\pi}{4}$.

2. d. Quel ensemble décrivent les points d'affixes z_1 et z_2 lorsque θ décrit l'intervalle $\left]-\pi\,;\,\pi\right]$.

Exercice 15. (c) Factorisation astucieuse (c)

1. Méthode 1.
Objectif : étudier module et argument de : $z = 1 + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}$; $\theta \in [0\,;\,\pi]$
En utilisant la trigonométrie élémentaire, montrer que : $z = 2\cos\theta(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$.
Étudier module et argument de z.

Aide
Les formules de duplication sont :

$\sin 2x = 2\sin x\cos x$	$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

2. Méthode 2.

Méthode
Si $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1} \pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$, alors la mise en facteur de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}$ permet de mettre facilement en évidence le module et un argument de z.

Objectif : étudier module et argument de : $z = 1 + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}$; $\theta \in [0\,;\,\pi]$
Soit

$$\theta \in [0\,;\,\pi] \quad \text{et} \quad z = 1 + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}$$

Factoriser z puis étudier module et argument. Attention, il faudra discuter selon les valeurs de θ.

Exercice 16. Quelques sommes (*)

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,kx}$, avec $x \in \mathbb{R} \setminus \{p2\pi, p \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que :

$$u_n = \frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(n+1)x} - 1}{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,x} - 1}$$

2. En déduire que :

$$u_n = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\,x\right)\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\frac{nx}{2}}}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

3. Montrer alors que :

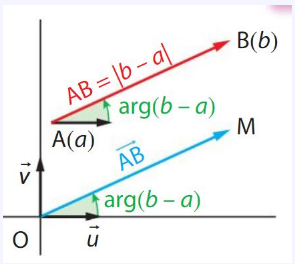
$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\,x\right)\cos\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}} \quad \text{et} \quad \boxed{\sum_{k=0}^{n} \sin(kx) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\,x\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}}$$

4. Résoudre dans $[0\ ;\ 2\pi[$ l'équation : $1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x + \cos 5x = 0$.

Partie IV. Géométrie : caractérisation de polygones

Théorème 1

1. $\left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{AB}\right) = \arg\left(z_B - z_A\right)$
2. $AB = |z_B - z_A|$
3. $\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{CD}\right) = \arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \quad (2\pi)$
4. $\overrightarrow{AB}$ est d'affixe $(z_B - z_A)$.



Méthode

1. **Triangle isocèle ou équilatéral**.
Pour montrer qu'un triangle est isocèle ou équilatéral, on peut utiliser les calculs de distances :

$$AB = |z_B - z_A|$$

2. **Triangle rectangle**.
Pour montrer qu'un triangle ABC est rectangle (en A), on peut utiliser les calculs de distances et le théorème de Pythagore ou prouver l'existence d'un angle droit avec

$$\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \quad (2\pi)$$

3. **Parallélogramme**.
Pour montrer que ABCD est un parallélogramme, on peut prouver que $z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}}$ (attention à l'ordre des points).

4. **Losange**.
Pour montrer que ABCD est un losange, on peut prouver :
   - **(1)** : que ABCD est un parallélogramme ;
   - **(2)** : que 2 côtés consécutifs du parallélogramme sont de même mesure ou que les diagonales du parallélogramme sont perpendiculaires.

5. **Rectangle**.
Pour montrer que ABCD est un rectangle, on peut prouver :
   - **(1)** : que ABCD est un parallélogramme ;
   - **(2)** : que 2 côtés consécutifs du parallélogramme sont perpendiculaires ou que les diagonales du parallélogramme sont de même mesure.

6. **Carré**.
Pour montrer que ABCD est un carré, on peut prouver que c'est un losange et un rectangle.

Exercice 17. (c) Caractérisation (c)

1. On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = 8\ ;\ z_B = -4 + 4\,\mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_C = -4\,\mathrm{i}$$

Déterminer la nature du triangle ABC.

2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = 2\sqrt{3} + 9\,\mathrm{i}\ ;\ z_B = -\,\mathrm{i}\ ;\ z_C = -4\sqrt{3} - 9\,\mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_D = -2\sqrt{3} + \mathrm{i}$$

Déterminer la nature du quadrilatère ABCD.

Partie V. Racines n-ième de l'unité

Exercice 18. Racines 3-ième de l'unité

Soit $j = -\dfrac{1}{2} + i\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

1. <u>Méthode 1</u>

1. a. Déterminer le module et l'argument principal de j. Donner sa forme trigonométrique et sa forme exponentielle.

1. b. Calculer j^3 et donner sa forme trigonométrique et sa forme exponentielle.

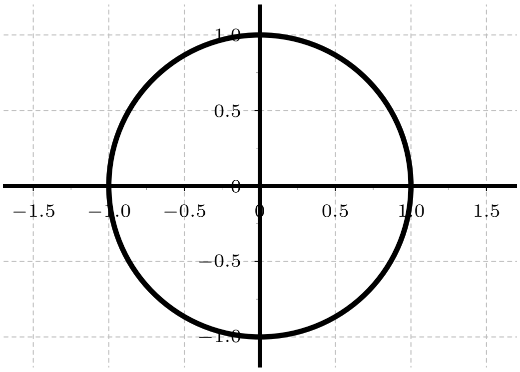
1. c. En déduire que $1 + j + j^2 = 0$.
Aide : somme de termes consécutifs d'une ...

2. <u>Méthode 2</u>

2. a. Calculer j^2 et donner sa forme trigonométrique et sa forme exponentielle.

2. b. Montrer que $j^2 = \overline{j}$.

2. c. En déduire que $1 + j + j^2 = 0$.



3. Soit A, B et C d'affixes respectives 1, j et j^2.

3. a. Représenter A, B et C dans un repère.

3. b. Démontrer que ABC est équilatéral.

Exercice 19. * Racines $n-$ièmes de l'unité (*)

Définition 1

1. Si $Z \in \mathbb{C}$; on appelle racine $n-$ième de Z tout complexe $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^n = Z$.
2. Les racines $n-$ièmes de 1 sont encore appelées **racines $n-$ièmes de l'unité** .
3. L'ensemble des **racines $n-$ièmes de l'unité** est noté $\mathbb{U}_n$.

$$\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \ , \ z^n = 1\}$$

Démontrer que :

1. $\mathbb{U}_n$ est non vide.
2. Le produit de deux éléments de $\mathbb{U}_n$ est élément de $\mathbb{U}_n$.
3. L'inverse de deux éléments de $\mathbb{U}_n$ est élément de $\mathbb{U}_n$.
4. (*) Il existe exactement n racines $n-$ièmes de l'unité, qui sont les complexes :

$$z_k = \mathrm{e}^{\,i\,\frac{2k\pi}{n}} = (z_1)^k \quad , \ \text{avec} \ \ k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$$

5. Si ξ (on prononce la lettre grecque « *xi* ») est une racine $n-$ième de l'unité, alors :

$$1 + \xi + \xi^2 + \cdots \xi^n = 0$$

6. La somme des racines $n-$ièmes de l'unité est égale à 0

Exercice 20. (c) Équation (ex. 127)

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5 = 1$.

2. Montrer que résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5 = (1+\mathrm{i})^5$ revient à résoudre l'équation $Z^5 = 1$, où Z est à exprimer en fonction de z.

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5 = (1+\mathrm{i})^5$.

Exercice 21. (c) ** Now We Can Talk ! (ex. 129)

Soit a, b et c trois complexes appartenant à $\mathbb{U}_n$.
Montrer que :

$$|ab + bc + ca| = |a + b + c|$$

Exercice 22. (c) ** Now We Can Talk ! (ex. 130)

Soit z appartenant à $\mathbb{U}_n$.
Montrer que :

$$|1+z|^2 + |1-z|^2 = 4$$

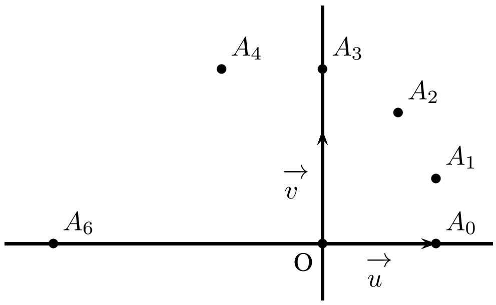
Partie VI. Problèmes et compléments

Exercice 23. Bac S - Nouvelle Calédonie, mars 2016

On considère les nombres complexes z_n définis, pour tout entier naturel n, par

$$z_0 = 1 \quad \text{et} \quad z_{n+1} = \left(1 + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}\right) z_n.$$

On note A_n le point d'affixe z_n dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ de l'annexe 2 ci-dessous.



L'objet de cet exercice est d'étudier la construction des points A_n.

1.

1. a. Vérifier que $1 + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

1. b. En déduire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

2.

2. a. Montrer que pour tout entier naturel n, $z_n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\frac{\pi}{6}}$.

2. b. Pour quelles valeurs de n, les points O, A_0 et A_n sont-ils alignés ?

3. Pour tout entier naturel n, on pose $d_n = |z_{n+1} - z_n|$.

3. a. Interpréter géométriquement d_n.

3. b. Calculer d_0.

3. c. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $z_{n+2} - z_{n+1} = \left(1 + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(z_{n+1} - z_n)$.

3. d. En déduire que la suite $(d_n)_{n \geqslant 0}$ est géométrique puis que pour tout entier naturel n, $d_n = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$.

4.

4. a. Montrer que pour tout entier naturel n,

$$|z_{n+1}|^2 = |z_n|^2 + d_n^2.$$

4. b. En déduire que, pour tout entier naturel n, le triangle $\mathrm{O}A_nA_{n+1}$ est rectangle en A_n.

4. c. Construire, à la règle non graduée et au compas, le point A_5 sur la figure de l'annexe 2 à rendre avec la copie.

4. d. Justifier cette construction.

Réponses

Le corrigé complet sur www.math93.com

Exercice 24. (c) D'après Bac S - Polynésie, septembre 2015 (c)

On rappelle que la partie réelle d'un nombre complexe z est notée $\mathrm{Re}(z)$.

1. Déterminer l'écriture exponentielle du nombre complexe $u = 1 - \mathrm{i}$.
2. Déterminer, pour tout réel θ, la forme algébrique et l'écriture exponentielle du nombre complexe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(1 - \mathrm{i})$.
3. Déduire des questions précédentes que, pour tout réel θ,

$$\cos(\theta) + \sin(\theta) = \sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$

Exercice 25. Bac S - Métropole, juin 2018

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.
On pose $z_0 = 8$ et, pour tout entier naturel n :

$$z_{n+1} = \frac{3 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{4} z_n.$$

On note A_n le point du plan d'affixe z_n.

1.

1. a. Vérifier que :

$$\frac{3 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}.$$

1. b. En déduire l'écriture de chacun des nombres complexes z_1, z_2 et z_3 sous forme exponentielle et vérifier que z_3 est un imaginaire pur dont on précisera la partie imaginaire.

1. c. Représenter graphiquement les points A_0 , A_1 , A_2 et A_3 ; on prendra pour unité le centimètre.

2.

2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$z_n = 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\pi}{6}}.$$

2. b. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$.
Déterminer la nature et la limite de la suite (u_n).

3.

3. a. Démontrer que, pour tout entier naturel k,

$$\frac{z_{k+1} - z_k}{z_{k+1}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{i}.$$

En déduire que, pour tout entier naturel k, on a l'égalité : $A_kA_{k+1} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{O}A_{k+1}$.

3. b. Pour tout entier naturel n, on appelle ℓ_n la longueur de la ligne brisée reliant dans cet ordre les points A_0, A_1, A_2, ..., A_n.
On a ainsi : $\ell_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n$.
Démontrer que la suite (ℓ_n) est convergente et calculer sa limite.

Réponses

Le corrigé complet sur www.math93.com

Exercice 26. Vrai ou faux Antilles, juin 2019

Les questions de cet exercice sont indépendantes.
Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.
Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u}\ ,\ \overrightarrow{v}\ \right)$.
On considère le nombre complexe $c = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ et les points S et T d'affixes respectives c^2 et $\dfrac{1}{c}$.

1. **Affirmation 1 :**
   Le nombre c peut s'écrire $c = \dfrac{1}{4}\left(1 - \mathrm{i}\sqrt{3}\right)$.
2. **Affirmation 2 :**
   Pour tout entier naturel n, c^{3n} est un nombre réel.
3. **Affirmation 3 :**
   Les points O, S et T sont alignés.
4. **Affirmation 4 :**
   Pour tout entier naturel non nul n,

$$|c| + \left|c^2\right| + \ldots + |c^n| = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Exercice 27. Vrai ou faux , Polynésie septembre 2019

1. On considère le nombre complexe $z = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.

Affirmation 1 : Le nombre complexe z^2 est un réel positif.

Affirmation 2 : L'argument du nombre complexe $z^{2\,019}$ vaut 0 modulo 2π.

Dans ce qui suit, le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.

2. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z^2 - 3z + 5 = 0$.

Affirmation 3 : Cette équation admet deux solutions dont les images sont symétriques par rapport à l'origine du repère.

3. À tout point M d'affixe z du plan complexe, on associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \overline{z}(1 - z).$$

Affirmation 4 : Il existe une infinité de points M confondus avec leur point image M'.

Exercice 28. Baccalauréat S Amérique du Sud 12 novembre 2018

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.
On considère les points A, B, C et D distincts d'affixes respectives z_{A}, z_{B}, z_{C} et z_{D} tels que :

$$\left\{\begin{array}{rcl} z_{\mathrm{A}} + z_{\mathrm{C}} & = & z_{\mathrm{B}} + z_{\mathrm{D}} \\ z_{\mathrm{A}} + \mathrm{i}z_{\mathrm{B}} & = & z_{\mathrm{C}} + \mathrm{i}z_{\mathrm{D}} \end{array}\right.$$

Démontrer que le quadrilatère ABCD est un carré.

Exercice 29. Vrai/ Faux : Baccalauréat S Nouvelle Calédonie mars 2019

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.
Il est attribué 1 point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.
Pour les questions 1 à 3, on se place dans un plan muni du repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

1. Soit (E) l'équation d'inconnue le nombre complexe z

$$z\left(z^2 - 8z + 32\right) = 0.$$

Affirmation 1 : Les points dont les affixes sont les solutions de l'équation (E) sont les sommets d'un triangle d'aire égale à 16 unités d'aire.

2. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points dont les affixes z vérifient

$$|z-3| = |z+3|.$$

Affirmation 2 : L'ensemble $\mathcal{E}$ est le cercle de centre O et de rayon 3.

3. On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$z_n = \left(1 - \text{i}\sqrt{3}\right)^n.$$

Pour tout entier naturel n, on note M_n le point d'affixe z_n.
Affirmation 3 : Pour tout entier naturel n, les points M_n O et M_{n+3} sont alignés.

4. On considère l'équation d'inconnue le nombre réel x

$$\sin(x)\left(2\cos^2(x) - 1\right) = 0.$$

Affirmation 4 : Cette équation admet exactement quatre solutions sur l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$ qui sont : $-\dfrac{\pi}{4}\ ;\ 0\ ;\ \dfrac{\pi}{4}$ et π.

Partie VII. Correction

Correction de l'exercice 1

Dans le plan complexe, représenter l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

1. $\arg(z) = 0 \quad (2\pi)$
   Demi-droite ouverte]OI) avec I d'affixe 1.
2. $\arg(z) = \pi \quad (2\pi)$
   Demi-droite ouverte]OI') avec I' d'affixe -1.
3. $\arg(z) = \dfrac{\pi}{2} \quad (2\pi)$
   Demi-droite ouverte]OJ) avec J d'affixe i.
4. $\arg(z) = \dfrac{\pi}{2} \quad (\pi)$
   Droite (OJ) privée du point O.
5. $\arg(z) = \dfrac{\pi}{4} \quad (2\pi)$
   Demi-droite ouverte]OA) avec A d'affixe 1+ i.
6. $\arg(z) = -\dfrac{\pi}{3} \quad (\pi)$
   Droite (OB) privée du point O avec B d'affixe $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$
7. $\arg(z) = \dfrac{\pi}{4} \quad (\pi)$
   Droite (OA) privée du point O avec A d'affixe 1+ i.

Correction de l'exercice 5

Déterminer une forme exponentielle des nombres complexes suivants.

1. $z = \dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{2}\mathrm{i}$

On a : $|z| = \sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{18}{4}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

On a : $\cos(\alpha) = \dfrac{x}{|z|} = \dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{3\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{2}{3\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\alpha) = \dfrac{y}{|z|} = \dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{3\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

.

Une valeur de $\arg(z)$ est $\dfrac{\pi}{4}$. Donc : $z = \dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{2}\mathrm{i} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

2. $z = -\sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2}$

On a : $|z| = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{4} = 2$.

On a : $\cos(\alpha) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\alpha) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Une valeur de $\arg(z)$ est $-\dfrac{3\pi}{4}$. Donc $z = -\sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2} = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$.

3. $z = \dfrac{-\sqrt{5}}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{15}}{2}$

On a : $|z| = \sqrt{\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{\sqrt{15}}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{20}{4}} = \sqrt{5}$.

On a $\cos(\alpha) = -\dfrac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = -\dfrac{1}{2}$ et $\sin(\alpha) = -\dfrac{\frac{\sqrt{15}}{2}}{\sqrt{5}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Une valeur de $\arg(z)$ est $-\dfrac{2\pi}{3}$. Donc $z = -\dfrac{\sqrt{5}}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{15}}{2} = \sqrt{5}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.

Correction de l'exercice 6

On considère les deux nombres complexes $z = 3e^{\frac{\pi}{6}i}$ et $z' = 12e^{-\frac{\pi}{4}i}$. Déterminer une forme exponentielle des nombres donnés.

1. $3z$

$3z = 3 \times 3e^{\frac{\pi}{6}i} = 9e^{\frac{\pi}{6}i}$

2. $-3z'$

On a : $-3 = 3e^{\pi i}$.

Donc $-3z' = 3e^{\pi i} \times 12e^{-\frac{\pi}{4}i} = 36e^{\frac{3\pi}{4}i}$.

3. zz'

On a : $zz' = 3e^{\frac{\pi}{6}i} \times 12e^{-\frac{\pi}{4}i} = 36e^{\frac{\pi}{6}i - \frac{\pi}{4}i} = 36e^{-\frac{\pi}{12}i}$.

4. $\frac{z}{z'}$

On a : $\frac{z}{z'} = \frac{3e^{\frac{\pi}{6}i}}{12e^{-\frac{\pi}{4}i}} = \frac{1}{4}e^{\frac{\pi}{6}i + \frac{\pi}{4}i} = \frac{1}{4}e^{\frac{5\pi}{12}i}$.

5. z^3

On a : $z^3 = 3^3\left(e^{\frac{\pi}{6}i}\right)^3 = 27e^{\frac{\pi}{2}i}$.

6. $z^3z'^2$

On a $z'^2 = 12^2\left(e^{-\frac{\pi}{4}i}\right)^2 = 144e^{-\frac{\pi}{2}i}$ et $z^3 = 27e^{\frac{\pi}{2}i}$.

Donc $z^3z'^2 = 27e^{\frac{\pi}{2}i} \times 144e^{-\frac{\pi}{2}i} = 3888e^{\frac{\pi}{2}i - \frac{\pi}{2}i} = 3888e^{0\times i}$

Correction de l'exercice 7

Déterminer la forme exponentielle du nombre :

$$z = (-1 - i)(3 + 3i\sqrt{3}).$$

Corrigé

Étape 1 : Module de z

Le module de z est donné par :

$$|z| = |-1 - i| \times \left|3 + 3i\sqrt{3}\right|.$$

Calculons chaque terme :

$$|-1 - i| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2},$$

$$\left|3 + 3i\sqrt{3}\right| = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{9 + 27} = \sqrt{36} = 6.$$

Ainsi :

$$|z| = \sqrt{2} \times 6 = 6\sqrt{2}.$$

Étape 2 : Argument de z

L'argument de z est donné par :

$$\arg(z) = \arg(-1 - i) + \arg\left(3 + 3i\sqrt{3}\right).$$

Pour $-1 - i$, on a :

$$\arg(-1 - i) = -\frac{3\pi}{4} \quad (2\pi).$$

Pour $3 + 3i\sqrt{3}$, on a :

$$\arg\left(3 + 3i\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3} \quad (2\pi).$$

Ainsi :

$$\arg(z) = -\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{3} \quad (2\pi).$$

Réduisons au même dénominateur :

$$\arg(z) = -\frac{9\pi}{12} + \frac{4\pi}{12} = -\frac{5\pi}{12} \quad (2\pi).$$

Étape 3 : Forme exponentielle

La forme exponentielle de z est alors :

$$z = |z| \cdot e^{\mathrm{i}\arg(z)} = 6\sqrt{2} \cdot e^{\mathrm{i}\left(-\frac{5\pi}{12}\right)}.$$

Correction de l'exercice 8 : Puissances des nombres complexes (c)

1. Soit $z = \sqrt{3} + \mathrm{i}$ et n un entier relatif. Déterminer n pour que z^n soit un nombre complexe imaginaire pur.

$$z = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} \Longrightarrow z^n = 2^n\,\mathrm{e}^{n\,\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$$

Donc pour que z^n soit un nombre complexe imaginaire pur il faut que :

$$n\,\mathrm{i}\,\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Longrightarrow n = 3 + 6k, k \in \mathbb{Z}$$

2. Montrer que : $(-1+\mathrm{i})^{11} = 32 + 32\,\mathrm{i}$.

$$-1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}} \Longrightarrow (-1+\mathrm{i})^{11} = \sqrt{2}^{11}\,\mathrm{e}^{33\,\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}^{11}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$$

donc

$$(-1+\mathrm{i})^{11} = 2^5(1+\mathrm{i})$$

Correction de l'exercice 9 : suites

1. Déterminer : $\lim\limits_{n\to+\infty} OM_n$.

Réponses

$OM_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} OM_n = 0$

2. Démontrer que les points M_n appartiennent à une même demi-droite.

Réponses

$$\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{OM_n}\right) = arg\left(-1 + i\sqrt{3}\right) - arg\left(2^n\right) = \frac{2\pi}{3} \quad (2\pi)$$

donc les points M_n appartiennent à la demi-droite d'origine O, passant par le point A tel que $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{OA}\right) = \dfrac{2\pi}{3} \quad (2\pi)$.

Correction de l'exercice 10 : linéarisation 1

Exprimer $\cos^3(x)$ en fonction d'une somme de cosinus de la forme cos(nx), où $n \in \mathbb{N}$. On dit que l'on linéarise $\cos^3(x)$.

D'après les formules d'Euler, on a : $\cos(x) = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$.

Donc : $\cos^3(x) = \left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3$

$$= \frac{(e^{ix})^3 + 3\,(e^{ix})^2 e^{-ix} + 3e^{ix}\,(e^{-ix})^2 + (e^{-ix})^3}{8}$$

$$= \frac{e^{3ix} + 3e^{2ix}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} + e^{-3ix}}{8}$$

$$= \frac{e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}}{8}$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$$

$$= \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x)$$

Correction de l'exercice 11 : linéarisation 2

1. $\cos^2(x)$

On a : $\cos(x) = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$. Donc :

$$\cos^2(x) = \frac{\left[e^{ix}+e^{-ix}\right]^2}{2^2} = \frac{\left[e^{ix}\right]^2 + 2e^{ix}\times e^{-ix} + \left[e^{-ix}\right]^2}{4} = \frac{e^{2ix}+2+e^{-2ix}}{4} = \frac{1+\dfrac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2}}{2} = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

2. $\sin^3(x)$

On a : $\sin(x) = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$. Donc :

$$\sin^3(x) = \frac{\left[e^{ix}-e^{-ix}\right]^3}{(2i)^3} = \frac{e^{3ix} - e^{ix} - 2e^0e^{ix} + 2e^0e^{-ix} + e^{-ix} - e^{-3ix}}{-8i} = \frac{e^{3ix} - e^{-3ix} + 3e^{-ix} - 3e^{ix}}{-8i} = \frac{\dfrac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i} - 3\times\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}}{-4} = \frac{\sin(3x) - 3\sin(x)}{-4} = \frac{-\sin(3x)+3\sin(x)}{4}$$

3. $\cos^2(x)\sin(x)$

On a : $\cos^2(x)\sin(x) = \left[1-\sin^2(x)\right]\sin(x) = \sin(x) - \sin^3(x)$.

D'après la question précédente, on obtient :

$$\cos^2(x)\sin(x) = \sin(x) - \frac{-\sin(3x)+3\sin x}{4} = \frac{4\sin(x)+\sin(3x)-3\sin x}{4} = \frac{\sin(x)+\sin(3x)}{4}$$

Correction de l'exercice 13 : $\cos 3\theta$

À l'aide de la formule de Moivre, exprimer, pour tout réel θ, $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$.

La formule de Moivre permet d'écrire : $[\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)]^3 = \cos(3\theta) + \mathrm{i}\sin(3\theta)$. Or :

$$\begin{aligned}
[\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)]^3 &= [\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)]^2 \times [\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)] \\
&= \cos^3(\theta) + 3\mathrm{i}\cos^2(\theta)\sin(\theta) - 3\cos(\theta)\sin^2(\theta) - \sin^3(x)\mathrm{i} \\
&= \cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\sin^2(\theta) + \mathrm{i}\left[3\cos^2(\theta)\sin(\theta) - \sin^3(\theta)\right]
\end{aligned}$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient :

$$\begin{aligned}
\cos(3\theta) &= \cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\sin^2(\theta) \\
&= \cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\left[1 - \cos^2(\theta)\right] \\
&= 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 15 : Factorisation astucieuse

1. <u>Méthode 1</u>.
Factoriser z puis étudier module et argument. Attention, il faudra discuter selon les valeurs de θ.
On a :

$$z = 1 + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right) = 2\cos\theta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

- Si $\theta \in \left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$, alors $\cos\theta > 0$ et donc $|z| = 2\cos\theta$ et un argument de z est θ.
- Si $\theta \in \left]\dfrac{\pi}{2}\,;\,\pi\right[$, alors $\cos\theta < 0$ et donc $|z| = -2\cos\theta$ et un argument de z est $\theta + \pi$. En effet $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$ d'où :

$$z = |2\cos\theta| \times (-1) \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = |2\cos\theta| \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\pi)}$$

- Si $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, alors $z = 0$ et il n'a pas d'argument.

2. <u>Méthode 2</u>.
En utilisant la trigonométrie élémentaire, montrer que $z = 2\cos\theta(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$. Étudier module et argument de z.
On utilise les formules : $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ et $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$.

$$\begin{aligned}
z &= 1 + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} \\
z &= 1 + \cos 2\theta + \mathrm{i}\sin 2\theta \\
z &= 2\cos^2\theta + 2\mathrm{i}\sin\theta\cos\theta \\
z &= 2\cos\theta\,(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)
\end{aligned}$$

On termine ensuite comme avec la méthode 1.

Éléments de correction de l'exercice 17

1. On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 8$; $z_B = -4 + 4\,\mathrm{i}$ et $z_C = -4\,\mathrm{i}$.

$$AB = 4\sqrt{10} \ \text{ et } \ AC = BC = 4\sqrt{5}$$

Donc ABC est isocèle rectangle en A. (on utilise la réciproque que Pythagore)

2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 2\sqrt{3} + 9\,\mathrm{i}$; $z_B = -\,\mathrm{i}$; $z_C = -4\sqrt{3} - 9\,\mathrm{i}$ et $z_D = -2\sqrt{3} + \mathrm{i}$.

$$z_{\overrightarrow{AB}} = -2\sqrt{3} - 10\,\mathrm{i} = z_{\overrightarrow{DC}}$$

Donc ABCD est un parallélogramme.

- Méthode 1.
$$\frac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{BD}}} = 3\sqrt{3}\,\mathrm{i} \Longrightarrow \left(\overrightarrow{BD}\,;\,\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{2} \ \ (2\pi)$$
donc les diagonales du parallélogramme sont perpendiculaires, ABCD est un losange.
- Méthode 2. $AB = BC$, donc 2 côtés consécutifs du parallélogramme ABCD sont de même mesure , ABCD est un losange.

Correction de l'exercice 20 : équation

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5 = 1$.

Les solutions de $z^5 = 1$ sont les racines 5-ièmes de l'unité.

Donc les solutions sont les nombres complexes $\mathrm{e}^{\frac{2k\pi}{5}\mathrm{i}}$, k compris entre 0 et 4.

Donc : $S = \{1 ; \mathrm{e}^{\frac{2\pi}{5}\mathrm{i}} ; \mathrm{e}^{\frac{4k\pi}{5}\mathrm{i}} ; \mathrm{e}^{\frac{6k\pi}{5}\mathrm{i}} ; \mathrm{e}^{\frac{8\pi}{5}\mathrm{i}}\}$.

2. a. Montrer que résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5 = (1+\mathrm{i})^5$ revient à résoudre l'équation $\mathrm{Z}^5 = 1$, où Z est à exprimer en fonction de z.

On a $z^5 = (1+\mathrm{i})^5 \Leftrightarrow \dfrac{z^5}{(1+\mathrm{i})^5} = 1 \Leftrightarrow \left(\dfrac{z}{1+\mathrm{i}}\right)^5 = 1 \Leftrightarrow Z^5 = 1$ où $Z = \dfrac{z}{1+\mathrm{i}} = \dfrac{z}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}}$.

b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5 = (1+\mathrm{i})^5$.

D'après les questions précédentes, les solutions de $z^5 = (1+\mathrm{i})^5$ sont les nombres complexes z tels que : $\dfrac{z}{1+\mathrm{i}} = \dfrac{z}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}} = \mathrm{e}^{\frac{2k\pi}{5}\mathrm{i}}$, avec k compris entre 0 et 4.

Donc :

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\,\mathrm{e}^{\frac{2k\pi}{5}\mathrm{i}} \\ &= \sqrt{2}\exp\left(\frac{2k\pi}{5} + \frac{\pi}{4}\right)\mathrm{i} \\ &= \sqrt{2}\exp\left(\frac{(8k+5)\pi}{20}\mathrm{i}\right) \end{aligned}$$

Donc : $S = \{\sqrt{2}\exp\left(\dfrac{(8k+5)\pi}{20}\mathrm{i}\right), 0 \leqslant k \leqslant 4\}$.

Exercice 30. (c) ** Now We Can Talk ! (ex. 129)

Soit a, b et c trois complexes appartenant à $\mathbb{U}_n$.
Montrer que :

$$|ab + bc + ca| = |a + b + c|$$

a, b et c appartiennent à $\mathbb{U}$.

Donc : $|a| = |b| = |c| = 1$, soit $a\overline{a} = b\overline{b} = c\overline{c} = 1$. On a :
$|ab + bc + ca|^2 = \overline{(ab + bc + ca)}(ab + bc + ca)$
$= (\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca})(ab + bc + ca)$
$= ab\overline{ab} + ab\overline{bc} + ab\overline{ca} + bc\overline{ab} + bc\overline{bc} + bc\overline{ca} + ca\overline{ab} + ca\overline{bc} + ca\overline{ca}$
$= |ab|^2 + |bc|^2 + |ca|^2 + ab\overline{b}\overline{c} + a\overline{a}b\overline{c} + b\overline{b}c\overline{a} + \overline{a}bc\overline{c} + ca\overline{a}\overline{b} + c\overline{c}a\overline{b}$
$= 1^2 + 1^2 + 1^2 + a\overline{c} + b\overline{c} + \overline{a}c + b\overline{a} + c\overline{b} + a\overline{b}$

De plus :
$|a + b + c|^2 = \overline{(a + b + c)}(a + b + c) = (\overline{a} + \overline{b} + \overline{c})(a + b + c)$
$= a\overline{a} + b\overline{b} + c\overline{c} + b\overline{a} + c\overline{a} + a\overline{b} + c\overline{b} + a\overline{c} + b\overline{c}$
$= 1^2 + 1^2 + 1^2 + b\overline{a} + c\overline{a} + a\overline{b} + c\overline{b} + a\overline{c} + b\overline{c}$

Donc : $|ab + bc + ca|^2 = |a + b + c|^2$. D'où : $|ab + bc + ca| = |a + b + c|$.

Exercice 31. (c) ** Now We Can Talk ! (ex. 130)

Soit z appartenant à $\mathbb{U}_n$.
Montrer que :

$$|1 + z|^2 + |1 - z|^2 = 4$$

z appartient à $\mathbb{U}$, donc $|z| = 1$. On a :
$|1 + z|^2 + |1 - z|^2 = \overline{(1 + z)}(1 + z) + \overline{(1 - z)}(1 - z)$
$= (1 + \overline{z})(1 + z) + (1 - \overline{z})(1 - z)$
$= 1 + z + \overline{z} + z\overline{z} + 1 - z - \overline{z} + z\overline{z} = 2 + 2z\overline{z}$
$= 2 + 2|z|^2 = 2 + 2 = 4$

Correction de l'exercice 24 : Polynésie, septembre 2015

1. Soit u le nombre complexe $1 - \mathrm{i}$.

$|u| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$; donc $u = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right) = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)$

On cherche le réel α tel que $\begin{cases} \cos(\alpha) &= \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\alpha) &= -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ Donc $\alpha = -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

L'écriture complexe du nombre $u = 1 - \mathrm{i}$ est donc $\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{4}}$.

2. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)$ donc

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(1-\mathrm{i}) &= (\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))(1-\mathrm{i}) = \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta) - \mathrm{i}\cos(\theta) - \mathrm{i}^2\sin(\theta)\\ &= (\cos(\theta) + \sin(\theta)) + \mathrm{i}\,(\sin(\theta) - \cos(\theta)) \text{ (forme algébrique)}\end{aligned}$$

$1 - \mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{4}}$ donc $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(1-\mathrm{i}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \times \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{4}} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}$ (écriture exponentielle)

3. Le nombre complexe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(1-\mathrm{i})$ s'écrit d'une part $(\cos(\theta) + \sin(\theta)) + \mathrm{i}\,(\sin(\theta) - \cos(\theta))$ et d'autre part $\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}$, c'est-à-dire $\sqrt{2}\left(\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)\right)$.

En identifiant les parties réelles, on obtient : $\cos(\theta) + \sin(\theta) = \sqrt{2}\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Remarque

C'est un résultat que l'on peut retrouver directement en développant $\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$ au moyen de la formule $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.