Math93.com

# TD 1 - Tle Maths Expertes
# Matrices Partie 1

*Les exercices suivants dont l'intitulé est suivi du symbole (c) sont corrigés intégralement en fin du présent TD.*
*Les autres présentent des éléments de réponses ou un lien vers une correction détaillée sur www.math93.com*

## Partie I. Matrices et opérations

### Exercice 1. Opérations sur les matrices : faire des gammes

On note :

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\\0&-3\end{pmatrix}\ ;\ B=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-3&1&1\\2&-1&2\end{pmatrix}\ ;\ C=\begin{pmatrix}-2&0&1\\-1&1&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}\ ;\ D=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}\ \text{ et }\ E=\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}$$

Montrer par le calcul puis vérifier à l'aide de la calculatrice que :

- $B+2\times C=\begin{pmatrix}-3&-1&2\\-5&3&-1\\2&-3&2\end{pmatrix}$.
- $B\times C=\begin{pmatrix}-1&-1&2\\5&0&-4\\-3&-3&3\end{pmatrix}$.
- $C\times D=\begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix}$.
- $E\times C=\begin{pmatrix}-4&-1&-1\end{pmatrix}$.
- $B^2=\begin{pmatrix}4&-2&-1\\-4&3&3\\9&-5&3\end{pmatrix}$.
- $B\times A=\begin{pmatrix}2&-1\\-4&-2\\3&-7\end{pmatrix}$.
- $E\times D=(6)$.

## Exercice 2. (c) Puissances et matrice nilpotente (c)

Soit $A$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & -3 \\ 5 & 10 & -6 \end{pmatrix}$$

**1.** Déterminer la matrice $M$ telle que $A = M - I_3$.

**2.** Calculer $M^2$. En déduire $A^2$.

# Partie II. Inverse d'une Matrice carrée

## Exercice 3. (c) Calcul de l'inverse

La matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ est elle inversible ?

**Aide** : Calculer en résolvant un système les réels $a$, $b$, $c$ et $d$ tel que $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

## Exercice 4. (c) D'après Bac ES 2016 Polynésie du 10 Juin 2016

Cette affirmation est-elle vraie ou fausse ? Justifiez votre réponse.

**Affirmation 1**

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Il existe un réel $a$ pour lequel $B$ est l'inverse de $A$.

## Exercice 5. Puissances et inverse

Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2$, en déduire l'inverse de la matrice $A$.
2. Calculer $A^3$ et $A^4$. Quel est l'inverse de la matrice $A^2$ ?

**Réponses**
*1°)* $A^2 = -I_2$ *donc* $A^{-1} = -A$ / *2°)* $A^3 = -A$, $A^4 = I_2$ , $\left(A^2\right)^{-1} = A^2$.

## Exercice 6. Puissance et inverse

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \\ -4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

**1.** Calculer $A^2$ et $A^3$.

**2.** En déduire $A^6$ puis $A^{3n}$ où $n$ est un entier naturel non nul.

**3.** Calculer l'inverse de la matrice $A^3$.

**4.**

**4. a.** Développer le produit $(A - I_3) \times \left(A^2 + AI_3 + {I_3}^2\right)$.

**4. b.** En déduire l'inverse de la matrice $B = A - I_3$

## Exercice 7. Puissances et diagonalisation

On considère les matrices $P = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} -3 & -6 & -2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

1. On note $P^{-1}$ la matrice inverse de la matrice $P$. Vérifier que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$
2. Déterminer la matrice $D$ telle que $A = P \times D \times P^{-1}$.
3. Calculer $D^2$, $D^3$ et $D^4$.
4. Calculer $A^2$, $A^3$ et $A^4$.

**Réponses**

*2°)* $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ / *3°)* $D^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ / *4°)* $A^4 = \begin{pmatrix} -59 & -90 & -30 \\ 60 & 91 & 30 \\ -30 & -45 & -14 \end{pmatrix}$

# Partie III. Application aux systèmes linéaires

## Exercice 8. A partir d'un système (ex. 40)

**1.** Écrire le système suivant sous forme matricielle $AX = B$ :

$$\begin{cases} 5x + 3y + 4z & = & -2 \\ 2x + 3y + z & = & -2 \\ x + y + z & = & -2 \end{cases}$$

**2.** Avec la calculatrice, déterminer l'inverse de $A$ que l'on suppose inversible.

**3.** Résoudre le système.

## Exercice 9. Une matrice et deux systèmes (ex. 49)

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

**1.** Justifier que la matrice A est inversible.

**2.** Déterminer la matrice $A^{-1}$.

**3.** En déduire une écriture matricielle et une solution des systèmes suivants.

**3. a.**

$$\begin{cases} 3x + 4y = 2 \\ 5x + 7y = 4 \end{cases}$$

**3. b.**

$$\begin{cases} 7x - 4y & = & -21 \\ -5x + 3y & = & 11 \end{cases}$$

## Exercice 10. Un système (ex. 50)

**1.** Vérifier que les matrices suivantes sont inverses l'une de l'autre :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**2.** En déduire la résolution des systèmes :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - 2y - 2z & = & 4 \\ 2x - 3y - 2z & = & 5 \\ -2x + 4y + 3z & = & -3 \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y + 2z & = & -7 \\ 2x + y + 2z & = & 12 \\ -2x - z & = & 9 \end{array} \right.$$

## Exercice 11. Modélisation (ex. 54)

Une société fabrique et vend une quantité $x$ d'objets, exprimée en milliers. Le coût de fabrication, exprimé en milliers d'euros, de $x$ milliers d'objets est donné par

$$C(x) = ax^2 + bx + c$$

où $a$, $b$ et $c$ sont trois nombres réels qu'on souhaite déterminer. On sait que le coût de fabrication de 4 000 objets s'élève à 63 000 €, que celui de 10 000 objets est de 165 000 €, et que celui de 20 000 objets vaut 415 000 €.

**1.** Justifier que les informations sur $C$ peuvent se traduire sous la forme du système de trois équations à trois inconnues suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 16a + 4b + c & = & 63 \\ 100a + 10b + c & = & 165 \\ 400a + 20b + c & = & 415 \end{array}\right.$$

**2.** Montrer que le système obtenu s'écrit sous la forme $AX = B$ .

**3.** À l'aide d'un calcul matriciel et de la calculatrice, déterminer a, b et c. En déduire une expression de $C(x)$.

**4.** Déterminer alors le coût de fabrication de 30 000 objets.

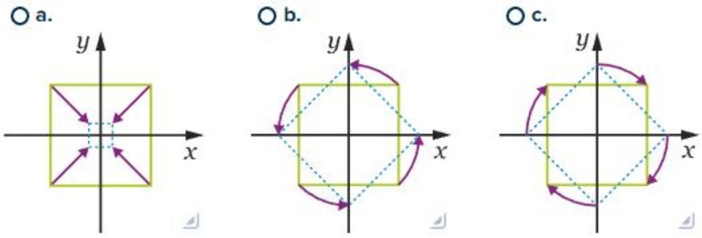
# Partie IV. Matrices et transformations du plan

## Exercice 12. (c) (ex. 55)

À chaque matrice de transformation T, associer la transformation correspondante, sachant que le carré bleu est l'image du carré vert par cette transformation.

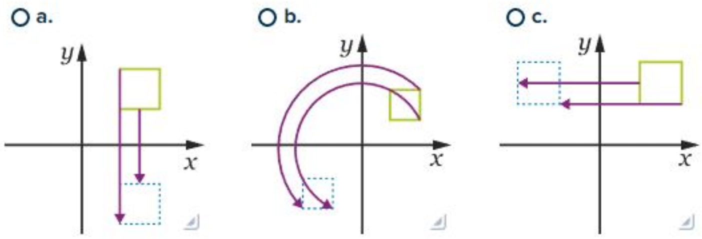
**1.**

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$



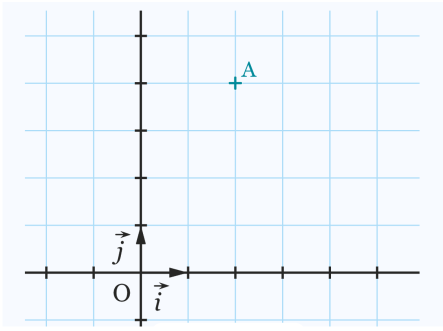

**2.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$



## Exercice 13. (c) ** (ex. 57)

On considère, dans le repère orthonormé direct $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, le point $A(2\ ;\ 4)$.




1. Placer dans le repère ci-dessus le point A', symétrique de A par rapport à l'axe des ordonnées. Déterminer graphiquement ses coordonnées.
2. Retrouver les coordonnées de A' à l'aide d'un calcul matriciel.
3. Soit A" l'image du point A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$. Déterminer les coordonnées de A" à l'aide d'un calcul matriciel.
4. On considère le point C$(3\,;1)$. Déterminer par le calcul les coordonnées de C', image de C par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
5. Placer le point C' dans le repère ci-dessus et vérifier la cohérence du résultat obtenu.

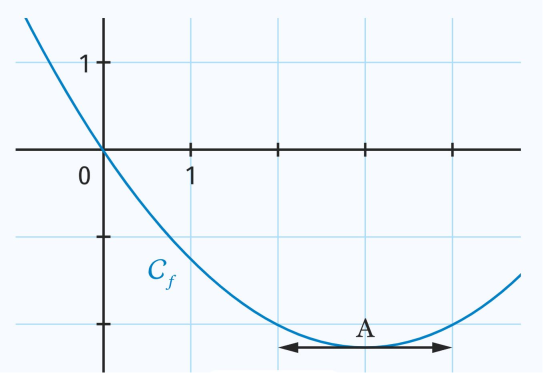
# Partie V. Bilan et Compléments

## Exercice 14. (ex. 61)

Soit A une matrice carrée inversible d'ordre n.
Montrer qu'il existe une unique matrice inverse de A.

## Exercice 15. Déterminons l'expression d'une fonction (ex. 53)

On se place dans un repère orthonormé. On cherche à déterminer la fonction f dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée ci ?dessous.




On admet que $f$ est une fonction du second degré de la forme

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Le but de l'exercice est donc de déterminer les coefficients a, b et c. On sait que $\mathscr{C}_f$ passe par l'origine du repère et par le point A de coordonnées $(3\ ;\ -2,25)$ où la tangente à $\mathscr{C}_f$ est parallèle à l'axe des abscisses.

1. Traduire ces informations par trois équations d'inconnues a, b et c.
2. En déduire un système (S) de deux équations à deux inconnues a et b.
3. Déterminer les matrices A, X et B pour lesquelles (S) équivaut à $AX = B$.
4. Résoudre ce système et trouver l'expression de $f$.

## Exercice 16. Matrice et suites

On considère les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

### Partie A

**1.** Calculer $D^2$ et $D^3$.

**2.** On note $P^{-1}$ la matrice inverse de la matrice $P$. Vérifier que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3} \\ -\dfrac{4}{3} & \dfrac{2}{3} \end{pmatrix}$

**3.** Soit $A$ la matrice telle que $A = P \times D \times P^{-1}$. Calculer $A$.

**4.** Montrer que $A^2 = P \times D^2 \times P^{-1}$ et $A^3 = P \times D^3 \times P^{-1}$.

### Partie B

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 2$ , $u_1 = 1$ et pour tout entier $n$, $u_{n+2} = \dfrac{5}{2}\, u_{n+1} - u_n$.

**1.** Pour tout entier $n$, on pose $V_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

**1. a.** Donner $V_0$ et $V_1$.

**1. b.** Montrer que $V_{n+1} = A \times V_n$ .

**2.** On admet que pour tout entier $n$, $V_n = A^n \times V_0$ où $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$ et $D^n = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

**2. a.** Calculer $V_6$.

**2. b.** En déduire les valeurs de $u_6$ et $u_7$.

## Exercice 17. (c) (ex. 66)

Soit

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

**1.** Démontrer qu'il existe deux réels $\alpha$ et $\beta$ tels que :

$$\mathrm{A}^2 = \alpha A + \beta I_3$$

**2.** En déduire que la matrice A est inversible et exprimer $A^{-1}$ en fonction de A et $I_3$. ?

**3.** Déterminer $A^{-1}$.

## Exercice 18. (c) Une suite de l'exercice précédent (ex. 66)

Soit

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

**1.** Calculer

$$(\mathrm{A} - I_3)^3$$

**2.** En déduire que A est inversible et préciser $A^{-1}$ .

## Exercice 19. ** (ex. 63 )

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
On considère la matrice carrée $J_n$ d'ordre n formée uniquement de 1.

1. Exprimer $J_n^2$ en fonction de $n$ et $J_n$.
2. En déduire que $J_n$ n'est pas inversible.

**Fin du TD**

# Partie VI. Correction

## Correction de l'exercice 2 : Puissance et matrice nilpotente

Soit $A$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & -3 \\ 5 & 10 & -6 \end{pmatrix}$$

**1. Déterminer la matrice $M$ telle que $A = M - I_3$.**

$$\boxed{M = A + I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & -3 \\ 5 & 10 & -5 \end{pmatrix}}$$

**2. Calculer $M^2$. En déduire $A^2$.**

$$\boxed{M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$A^2 = (M - I_3)^2 = M^2 - 2M + I_3^2 = -2M + I_3$$

Donc

$$\boxed{A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -6 & -11 & 6 \\ -10 & -20 & 11 \end{pmatrix}}$$

## Correction de l'exercice 3 : Calcul de l'inverse

**La matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ est elle inversible ?**

Calculons $a$, $b$, $c$ et $d$ tel que $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $a$, $b$, $c$ et $d$ sont les solutions éventuelles du système :

$$\begin{cases} 4a - 2c = 1 \\ 4b - 2d = 0 \\ -3a + c = 0 \\ -3b + d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - c = \frac{1}{2} \\ -3a + c = 0 \\ 2b - d = 0 \\ -3b + d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -1 \\ c = -\frac{3}{2} \\ d = -2 \end{cases}$$

L'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix}$

## Correction de l'exercice 4 : Polynésie - 10 Juin 2016

**Affirmation 2** (Vraie)

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Il existe un réel $a$ pour lequel $B$ est l'inverse de $A$.

**Preuve**.
La matrice $B$ est l'inverse de la matrice $A$ si et seulement si $AB = Id = BA$. On a prouvé en cours que une seule égalité suffit de ce fait :

$$AB = Id \iff \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a = -1 \\ a^2 = 1 \end{cases} \iff a = -1$$

Il existe un réel $a = -1$ pour lequel $B$ est l'inverse de $A$. L'affirmation E est vraie.

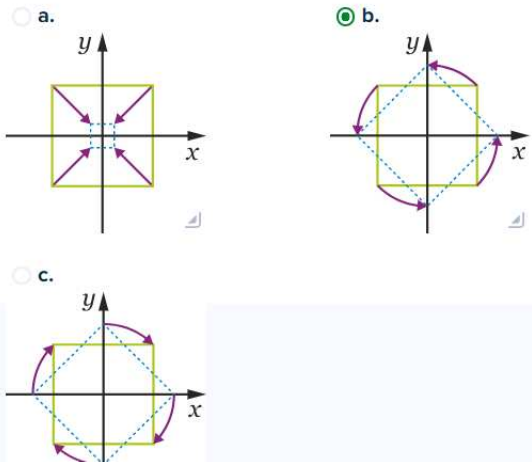
## Correction de l'exercice 12

**1.** $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

On a $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$

Donc cette matrice correspond à une rotation de centre $O$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

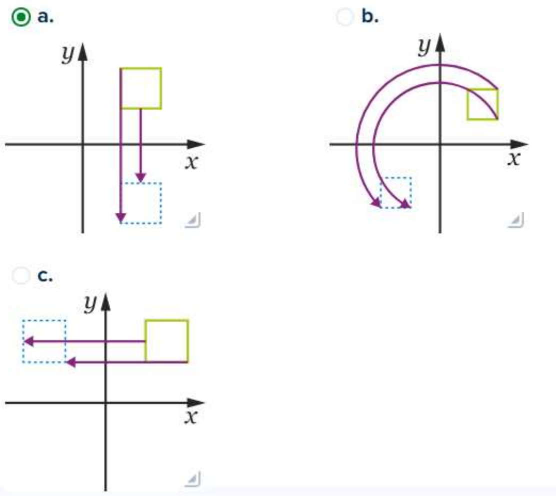
Il s'agit donc de la figure b.




**2.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est la matrice associée à une symétrie axiale par rapport à l'axe des abscisses.

Il s'agit donc de la figure a.



## Correction de l'exercice 13

1b.

La matrice de transformation associée à la symétrie axiale par rapport à l'axe des ordonnées est $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Donc les coordonnées de $A'$ sont $(-2; 4)$.

**2.** Soit $\mathrm{A}''$ l'image du point $\mathrm{A}$ par la rotation de centre $\mathrm{O}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.
Déterminer les coordonnées de $\mathrm{A}''$ à l'aide d'un calcul matriciel.

On a $\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Donc les coordonnées de $A''$ sont $(-\sqrt{2}; 3\sqrt{2})$.

**3.** On considère le point $\mathrm{C}(3\,;1)$.
**a.** Déterminer par le calcul les coordonnées de $\mathrm{C}'$, image de $\mathrm{C}$ par la rotation de centre $\mathrm{A}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

On a $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AC} = 1\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j}$.

Ainsi, dans le repère $(A; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, le point $C$ a pour coordonnées $(1; -3)$.

Or $\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.\\Donc les coordonnées de $C'$ dans le repère $(A; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ sont $(3; 1)$. Après application de la translation de vecteur $\overrightarrow{t} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, on obtient pour coordonnées de $C''(5; 5)$ dans le repère $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$.

## Correction de l'exercice 17

**a.** Démontrer qu'il existe deux réels $\alpha$ et $\beta$ tels que :

$$\mathrm{A}^2 = \alpha\mathrm{A} + \beta\mathrm{I}_3.$$

On a $A^2 = \begin{pmatrix} 18 & 9 & 9 \\ 9 & 18 & 9 \\ 9 & 9 & 18 \end{pmatrix}$. D'où $A^2 = 9A - 18I_3$.

**b.** En déduire que la matrice $\mathrm{A}$ est inversible et exprimer $\mathrm{A}^{-1}$ en fonction de $\mathrm{A}$ et $\mathrm{I}_3$.

On a donc $A^2 - 9A = 18I_3$, d'où $\dfrac{1}{18}(A^2 - 9A) = I_3$, c'est-à-dire $A \times \dfrac{1}{18}(A - 9I_3) = I_3$.

Donc $A$ est inversible et on a $A^{-1} = \dfrac{1}{18}(A - 9I_3) = \dfrac{1}{18}A - \dfrac{1}{2}I_3$.

**c.** Déterminer la matrice $\mathrm{A}^{-1}$.

On a $A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{5}{18} & \dfrac{-1}{18} & \dfrac{-1}{18} \\ \dfrac{-1}{18} & \dfrac{5}{18} & \dfrac{-1}{18} \\ \dfrac{-1}{18} & \dfrac{-1}{18} & \dfrac{5}{18} \end{pmatrix}$.

## Correction de l'exercice 18

**2.** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

**a.** Calculer $(A - I_3)^3$.

On a $A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, d'où $(A - I_3)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**b.** En déduire que $A$ est inversible et préciser $A^{-1}$.

On a alors $(A - I_3)^3 = 0_n$.

Or, $(A - I_3)^3 = A^3 - 3A^2 + 3A - I_3$ car $A \times I_3 = I_3 \times A$, d'où $A^3 - 3A^2 + 3A - I_3 = 0_n$.

On a alors $A^3 - 3A^2 + 3A = I_3$ c'est-à-dire $A(A^2 - 3A + 3I_3) = I_3$.

Donc $A$ est inversible et $A^{-1} = A^2 - 3A + 3I_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.