



Math93.com

# TD 1 - Tle Maths Expertes

## Matrices Partie 1

Les exercices suivants dont l'intitulé est suivi du symbole (c) sont corrigés intégralement en fin du présent TD.  
Les autres présentent des éléments de réponses ou un lien vers une correction détaillée sur [www.math93.com](http://www.math93.com)

### Partie I. Matrices et opérations

#### Exercice 1. Opérations sur les matrices : faire des gammes

On note :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } E = (1 \ 2 \ 3)$$

Montrer par le calcul puis vérifier à l'aide de la calculatrice que :

<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>B + 2 \times C = \begin{pmatrix} -3 &amp; -1 &amp; 2 \\ -5 &amp; 3 &amp; -1 \\ 2 &amp; -3 &amp; 2 \end{pmatrix}.</math></li> <li>• <math>B \times C = \begin{pmatrix} -1 &amp; -1 &amp; 2 \\ 5 &amp; 0 &amp; -4 \\ -3 &amp; -3 &amp; 3 \end{pmatrix}.</math></li> <li>• <math>C \times D = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>E \times C = \begin{pmatrix} -4 &amp; -1 &amp; -1 \end{pmatrix}.</math></li> <li>• <math>B^2 = \begin{pmatrix} 4 &amp; -2 &amp; -1 \\ -4 &amp; 3 &amp; 3 \\ 9 &amp; -5 &amp; 3 \end{pmatrix}.</math></li> <li>• <math>B \times A = \begin{pmatrix} 2 &amp; -1 \\ -4 &amp; -2 \\ 3 &amp; -7 \end{pmatrix}.</math></li> <li>• <math>E \times D = (6).</math></li> </ul>
---	--

#### Exercice 2. (c) Puissances et matrice nilpotente (c)

Soit  $A$  la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & -3 \\ 5 & 10 & -6 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la matrice  $M$  telle que  $A = M - I_3$ .
2. Calculer  $M^2$ . En déduire  $A^2$ .

## Partie II. Inverse d'une Matrice carrée

### Exercice 3. (c) Calcul de l'inverse

La matrice  $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$  est elle inversible ?

**Aide :** Calculer en résolvant un système les réels  $a, b, c$  et  $d$  tel que  $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

### Exercice 4. (c) D'après Bac ES 2016 Polynésie du 10 Juin 2016

Cette affirmation est-elle vraie ou fausse ? Justifiez votre réponse.

#### Affirmation 1

On considère les matrices  $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ . Il existe un réel  $a$  pour lequel  $B$  est l'inverse de  $A$ .

### Exercice 5. Puissances et inverse

Soit  $A = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer  $A^2$ , en déduire l'inverse de la matrice  $A$ .
2. Calculer  $A^3$  et  $A^4$ . Quel est l'inverse de la matrice  $A^2$  ?

#### Réponses

1°)  $A^2 = -I_2$  donc  $A^{-1} = -A$  / 2°)  $A^3 = -A$ ,  $A^4 = I_2$ ,  $(A^2)^{-1} = A^2$ .

### Exercice 6. Puissance et inverse

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \\ -4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

1. Calculer  $A^2$  et  $A^3$ .
2. En déduire  $A^6$  puis  $A^{3n}$  où  $n$  est un entier naturel non nul.
3. Calculer l'inverse de la matrice  $A^3$ .
4.
  4. a. Développer le produit  $(A - I_3) \times (A^2 + AI_3 + I_3^2)$ .
  4. b. En déduire l'inverse de la matrice  $B = A - I_3$

### Exercice 7. Puissances et diagonalisation

On considère les matrices  $P = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $A = \begin{pmatrix} -3 & -6 & -2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

1. On note  $P^{-1}$  la matrice inverse de la matrice  $P$ . Vérifier que  $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$
2. Déterminer la matrice  $D$  telle que  $A = P \times D \times P^{-1}$ .
3. Calculer  $D^2, D^3$  et  $D^4$ .
4. Calculer  $A^2, A^3$  et  $A^4$ .

**Réponses**

$$2^\circ) D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} / 3^\circ) D^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} / 4^\circ) A^4 = \begin{pmatrix} -59 & -90 & -30 \\ 60 & 91 & 30 \\ -30 & -45 & -14 \end{pmatrix}$$

## Partie III. Application aux systèmes linéaires

### Exercice 8. A partir d'un système (ex. 40)

1. Écrire le système suivant sous forme matricielle  $AX = B$  :

$$\begin{cases} 5x + 3y + 4z = -2 \\ 2x + 3y + z = -2 \\ x + y + z = -2 \end{cases}$$

2. Avec la calculatrice, déterminer l'inverse de  $A$  que l'on suppose inversible.
3. Résoudre le système.

### Exercice 9. Une matrice et deux systèmes (ex. 49)

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

1. Justifier que la matrice  $A$  est inversible.
2. Déterminer la matrice  $A^{-1}$ .
3. En déduire une écriture matricielle et une solution des systèmes suivants.

3. a.

$$\begin{cases} 3x + 4y = 2 \\ 5x + 7y = 4 \end{cases}$$

3. b.

$$\begin{cases} 7x - 4y = -21 \\ -5x + 3y = 11 \end{cases}$$

### Exercice 10. Un système (ex. 50)

1. Vérifier que les matrices suivantes sont inverses l'une de l'autre :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. En déduire la résolution des systèmes :

$$\begin{cases} x - 2y - 2z = 4 \\ 2x - 3y - 2z = 5 \\ -2x + 4y + 3z = -3 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = -7 \\ 2x + y + 2z = 12 \\ -2x - z = 9 \end{cases}$$

### Exercice 11. Modélisation (ex. 54)

Une société fabrique et vend une quantité  $x$  d'objets, exprimée en milliers. Le coût de fabrication, exprimé en milliers d'euros, de  $x$  milliers d'objets est donné par

$$C(x) = ax^2 + bx + c$$

où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont trois nombres réels qu'on souhaite déterminer. On sait que le coût de fabrication de 4 000 objets s'élève à 63 000 €, que celui de 10 000 objets est de 165 000 €, et que celui de 20 000 objets vaut 415 000 €.

1. Justifier que les informations sur  $C$  peuvent se traduire sous la forme du système de trois équations à trois inconnues suivant :

$$\begin{cases} 16a + 4b + c = 63 \\ 100a + 10b + c = 165 \\ 400a + 20b + c = 415 \end{cases}$$

2. Montrer que le système obtenu s'écrit sous la forme  $AX = B$ .

3. À l'aide d'un calcul matriciel et de la calculatrice, déterminer  $a$ ,  $b$  et  $c$ . En déduire une expression de  $C(x)$ .

4. Déterminer alors le coût de fabrication de 30 000 objets.

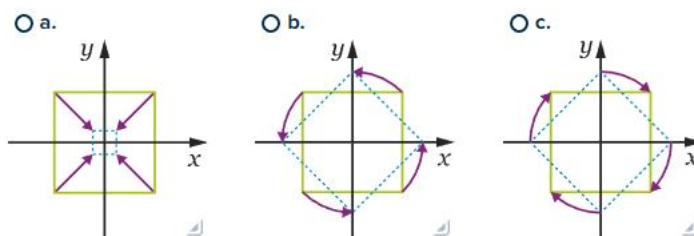
## Partie IV. Matrices et transformations du plan

### Exercice 12. (c) (ex. 55)

À chaque matrice de transformation  $T$ , associer la transformation correspondante, sachant que le carré bleu est l'image du carré vert par cette transformation.

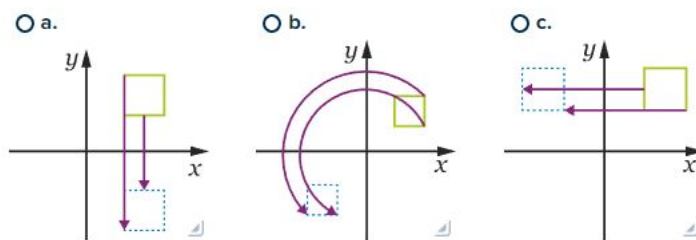
1.

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$



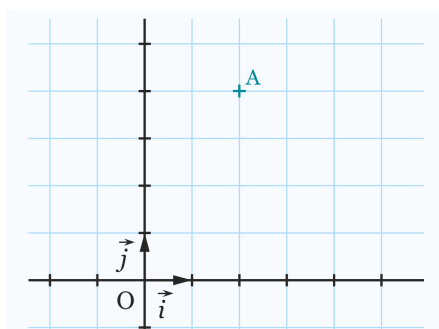
2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$



**Exercice 13. (c) \*\* (ex. 57)**

On considère, dans le repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , le point  $A(2 ; 4)$ .



1. Placer dans le repère ci-dessus le point  $A'$ , symétrique de  $A$  par rapport à l'axe des ordonnées. Déterminer graphiquement ses coordonnées.
2. Retrouver les coordonnées de  $A'$  à l'aide d'un calcul matriciel.
3. Soit  $A''$  l'image du point  $A$  par la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{4}$ . Déterminer les coordonnées de  $A''$  à l'aide d'un calcul matriciel.
4. On considère le point  $C(3;1)$ . Déterminer par le calcul les coordonnées de  $C'$ , image de  $C$  par la rotation de centre  $A$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .
5. Placer le point  $C'$  dans le repère ci-dessus et vérifier la cohérence du résultat obtenu.

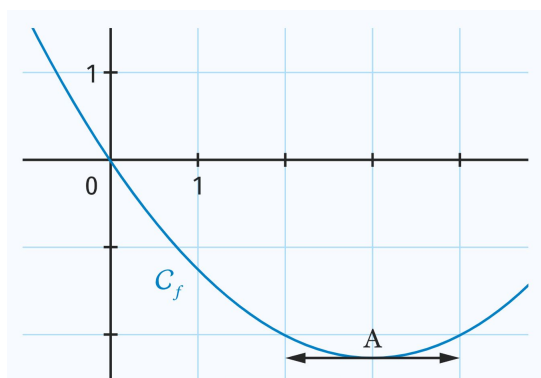
## Partie V. Bilan et Compléments

### Exercice 14. (ex. 61)

Soit  $A$  une matrice carrée inversible d'ordre  $n$ .  
Montrer qu'il existe une unique matrice inverse de  $A$ .

### Exercice 15. Déterminons l'expression d'une fonction (ex. 53)

On se place dans un repère orthonormé. On cherche à déterminer la fonction  $f$  dont la courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  est donnée ci-dessous.



On admet que  $f$  est une fonction du second degré de la forme

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Le but de l'exercice est donc de déterminer les coefficients  $a$ ,  $b$  et  $c$ . On sait que  $\mathcal{C}_f$  passe par l'origine du repère et par le point  $A$  de coordonnées  $(3 ; -2,25)$  où la tangente à  $\mathcal{C}_f$  est parallèle à l'axe des abscisses.

1. Traduire ces informations par trois équations d'inconnues  $a$ ,  $b$  et  $c$ .
2. En déduire un système (S) de deux équations à deux inconnues  $a$  et  $b$ .
3. Déterminer les matrices  $A$ ,  $X$  et  $B$  pour lesquelles (S) équivaut à  $AX = B$ .
4. Résoudre ce système et trouver l'expression de  $f$ .

### Exercice 16. Matrice et suites

On considère les matrices  $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$  et  $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

#### Partie A

1. Calculer  $D^2$  et  $D^3$ .

2. On note  $P^{-1}$  la matrice inverse de la matrice  $P$ . Vérifier que  $P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

3. Soit  $A$  la matrice telle que  $A = P \times D \times P^{-1}$ . Calculer  $A$ .

4. Montrer que  $A^2 = P \times D^2 \times P^{-1}$  et  $A^3 = P \times D^3 \times P^{-1}$ .

**Partie B**

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 2$ ,  $u_1 = 1$  et pour tout entier  $n$ ,  $u_{n+2} = \frac{5}{2}u_{n+1} - u_n$ .

1. Pour tout entier  $n$ , on pose  $V_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ .

1. a. Donner  $V_0$  et  $V_1$ .

1. b. Montrer que  $V_{n+1} = A \times V_n$ .

2. On admet que pour tout entier  $n$ ,  $V_n = A^n \times V_0$  où  $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$  et  $D^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$ .

2. a. Calculer  $V_6$ .

2. b. En déduire les valeurs de  $u_6$  et  $u_7$ .

**Exercice 17. (c) (ex. 66)**

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Démontrer qu'il existe deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que :

$$A^2 = \alpha A + \beta I_3$$

2. En déduire que la matrice  $A$  est inversible et exprimer  $A^{-1}$  en fonction de  $A$  et  $I_3$  ?

3. Déterminer  $A^{-1}$ .

**Exercice 18. (c) Une suite de l'exercice précédent (ex. 66)**

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer

$$(A - I_3)^3$$

2. En déduire que  $A$  est inversible et préciser  $A^{-1}$ .

**Exercice 19. \*\* (ex. 63)**

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 1.

On considère la matrice carrée  $J_n$  d'ordre  $n$  formée uniquement de 1.

1. Exprimer  $J_n^2$  en fonction de  $n$  et  $J_n$ .

2. En déduire que  $J_n$  n'est pas inversible.

↔ **Fin du TD** ↔

## Partie VI. Correction

### Correction de l'exercice 2 : Puissance et matrice nilpotente

Soit  $A$  la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & -3 \\ 5 & 10 & -6 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la matrice  $M$  telle que  $A = M - I_3$ .

$$M = A + I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & -3 \\ 5 & 10 & -5 \end{pmatrix}$$

2. Calculer  $M^2$ . En déduire  $A^2$ .

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = (M - I_3)^2 = M^2 - 2M + I_3^2 = -2M + I_3$$

Donc

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -6 & -11 & 6 \\ -10 & -20 & 11 \end{pmatrix}$$

### Correction de l'exercice 3 : Calcul de l'inverse

La matrice  $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$  est elle inversible ?

Calculons  $a, b, c$  et  $d$  tel que  $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .  $a, b, c$  et  $d$  sont les solutions éventuelles du système :

$$\begin{cases} 4a - 2c = 1 \\ 4b - 2d = 0 \\ -3a + c = 0 \\ -3b + d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - c = \frac{1}{2} \\ -3a + c = 0 \\ 2b - d = 0 \\ -3b + d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -1 \\ c = -\frac{3}{2} \\ d = -2 \end{cases}$$

L'inverse de la matrice  $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$  est la matrice  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ \frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix}$

### Correction de l'exercice 4 : Polynésie - 10 Juin 2016

**Affirmation 2 (Vraie)**

On considère les matrices  $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ . Il existe un réel  $a$  pour lequel  $B$  est l'inverse de  $A$ .

**Preuve.**

La matrice  $B$  est l'inverse de la matrice  $A$  si et seulement si  $AB = Id = BA$ . On a prouvé en cours que une seule égalité suffit de ce fait :

$$AB = Id \iff \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a = -1 \\ a^2 = 1 \end{cases} \iff a = -1$$

Il existe un réel  $a = -1$  pour lequel  $B$  est l'inverse de  $A$ . L'affirmation E est vraie.

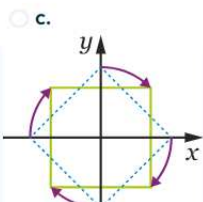
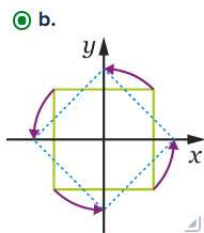
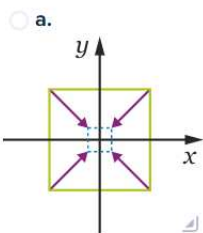
**Correction de l'exercice 12**

1.  $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

On a  $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$   $f(x)$

Donc cette matrice correspond à une rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{4}$ .

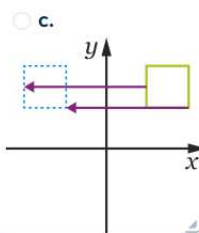
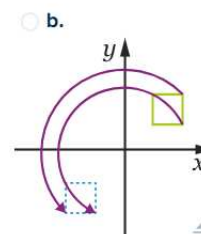
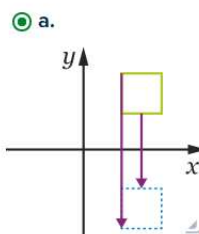
Il s'agit donc de la figure b.



2.  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  est la matrice associée à une symétrie axiale par rapport à l'axe des abscisses.

Il s'agit donc de la figure a.



## Correction de l'exercice 13

1b.

La matrice de transformation associée à la symétrie axiale par rapport à l'axe des ordonnées est  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . On a  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ .

Donc les coordonnées de  $A'$  sont  $(-2; 4)$ .

2. Soit  $A''$  l'image du point  $A$  par la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{4}$ .

Déterminer les coordonnées de  $A''$  à l'aide d'un calcul matriciel.

$$\text{On a } \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Donc les coordonnées de  $A''$  sont  $(-\sqrt{2}; 3\sqrt{2})$ .

3. On considère le point  $C(3; 1)$ .

a. Déterminer par le calcul les coordonnées de  $C'$ , image de  $C$  par la rotation de centre  $A$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .

$$\text{On a } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{AC} = 1\vec{i} - 3\vec{j}.$$

Ainsi, dans le repère  $(A; \vec{i}, \vec{j})$ , le point  $C$  a pour coordonnées  $(1; -3)$ .

$$\text{Or } \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2} & -\sin \frac{\pi}{2} \\ \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Donc les coordonnées de } C' \text{ dans le repère } (A; \vec{i}, \vec{j}) \text{ sont } (3; 1). \text{ Après}$$

application de la translation de vecteur  $\vec{t} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ , on obtient pour coordonnées de  $C'''(5; 5)$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

## Correction de l'exercice 17

a. Démontrer qu'il existe deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que :

$$A^2 = \alpha A + \beta I_3.$$

$$\text{On a } A^2 = \begin{pmatrix} 18 & 9 & 9 \\ 9 & 18 & 9 \\ 9 & 9 & 18 \end{pmatrix}. \text{ D'où } A^2 = 9A - 18I_3.$$

b. En déduire que la matrice  $A$  est inversible et exprimer  $A^{-1}$  en fonction de  $A$  et  $I_3$ .

$$\text{On a donc } A^2 - 9A = 18I_3, \text{ d'où } \frac{1}{18}(A^2 - 9A) = I_3, \text{ c'est-à-dire } A \times \frac{1}{18}(A - 9I_3) = I_3.$$

$$\text{Donc } A \text{ est inversible et on a } A^{-1} = \frac{1}{18}(A - 9I_3) = \frac{1}{18}A - \frac{1}{2}I_3.$$

c. Déterminer la matrice  $A^{-1}$ .

$$\text{On a } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{18} & \frac{-1}{18} & \frac{-1}{18} \\ \frac{-1}{18} & \frac{18}{5} & \frac{-1}{18} \\ \frac{-1}{18} & \frac{-1}{18} & \frac{18}{5} \end{pmatrix}.$$

## Correction de l'exercice 18

2. Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

a. Calculer  $(A - I_3)^3$ .

$$\text{On a } A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ d'où } (A - I_3)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b. En déduire que  $A$  est inversible et préciser  $A^{-1}$ .

$$\text{On a alors } (A - I_3)^3 = 0_n.$$

$$\text{Or, } (A - I_3)^3 = A^3 - 3A^2 + 3A - I_3 \text{ car } A \times I_3 = I_3 \times A, \text{ d'où } A^3 - 3A^2 + 3A - I_3 = 0_n.$$

$$\text{On a alors } A^3 - 3A^2 + 3A = I_3 \text{ c'est-à-dire } A(A^2 - 3A + 3I_3) = I_3.$$

$$\text{Donc } A \text{ est inversible et } A^{-1} = A^2 - 3A + 3I_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$