Math93.com

TD 3 - Tle Maths Expertes
Matrices (Suites et Chaînes de Markov) - partie 3

Les exercices suivants dont l'intitulé est suivi du symbole (c) sont corrigés intégralement en fin du présent TD.
Les autres présentent des éléments de réponses ou un lien vers une correction détaillée sur www.math93.com

Partie I. Suites de Matrices

Exercice 1. (c) Suite de Matrices

Soit (U_n) la suite de vecteurs définie par :

$$\mathrm{U}_0 = \begin{pmatrix} 15 \\ 25 \end{pmatrix} \quad \text{et pour tout entier } n, \quad \mathrm{U}_{n+1} = A\mathrm{U}_n + B$$

avec :

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0 \\ 0 & 1{,}2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer U_1.

2. Justifier que $A - I_2$ est inversible.

3. Calculer C, l'élément invariant tel que $C = AC + B$.

4. Montrer que la suite (V_n) définie par $\mathrm{V}_n = \mathrm{U}_n - C$ vérifie $\mathrm{V}_{n+1} = A\mathrm{V}_n$.

5. En déduire l'expression du terme général V_n.

6. Calculer V_{10}.

Exercice 2. (c) Suite de Matrices 2 (ex.46)

Soit (U_n) la suite de vecteurs définie par :

$$\mathrm{U}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et pour tout entier } n, \quad \mathrm{U}_{n+1} = A\mathrm{U}_n + B$$

avec :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1. En choisissant astucieusement les nombres réels α, β et γ, déterminer une suite de matrices (V_n) définie, pour tout entier naturel n, par :

$$\mathrm{V}_n = U_n - \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{V}_{n+1} = AV_n$$

2. Montrer que, pour tout entier naturel n :

$$\mathrm{A}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

3. Déterminer V_0 puis exprimer, pour tout entier naturel n, V_n en fonction de n.

4. Exprimer, pour tout entier naturel n, U_n en fonction de n.

5. En déduire U_{10}.

Exercice 3. * Suite de Matrices et complexes (ex. 5 p240)

On considère deux suites de nombres complexes (z_n) et (z'_n) définies par $z_0 = 1$ et $z'_0 = \text{i}$ et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} z_{n+1} = (9 - 4\text{i})z_n + (-3 + 2i)z'_n \\ z'_{n+1} = (18 - 12\text{i})z_n + (-6 + 6i)z'_n \end{cases}$$

1. Calculer z_1 et z'_1.

2. Justifier que ce système s'écrit sous la forme matricielle $\text{Z}_{n+1} = A \times Z_n$, où Z_{n+1}, Z_n et A sont trois matrices dont on explicitera les coefficients.

3. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\text{Z}_n = A^n \times Z_0$$

4. On cherche dans cette partie à déterminer les coefficients de la matrice A^n.

4. a. Soit la matrice $\text{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Justifier que P est inversible puis déterminer p^{-1}.

4. b. Montrer que $A = PDP^{-1}$ où $\text{D} = \begin{pmatrix} 2\text{i} & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

4. c. En utilisant un raisonnement par récurrence, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\text{A}^n = PD^nP^{-1}$$

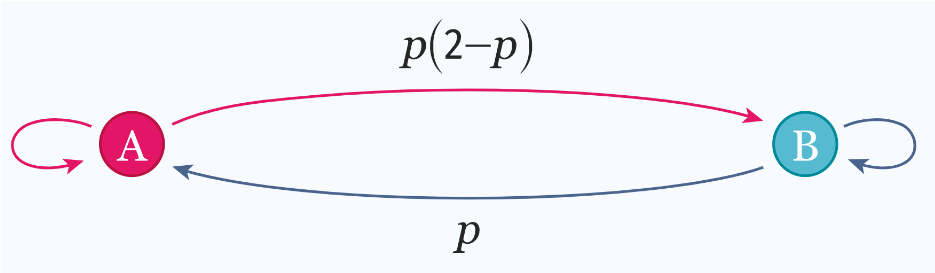
4. d. Déterminer A^n.

4. e. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, z_n et z'_n ?en fonction de n.

Partie II. Markov Chains

Exercice 4. (c) Ex. 58

Soit $p \in [0\ ;\ 1]$. On considère une chaîne de Markov associée au graphe probabiliste suivant :



1. Vérifier que :

$$0 \leqslant p(2-p) \leqslant 1$$

2. Montrer que :

$$\mathrm{P}_{\mathrm{A}}(A) = (\mathrm{P}_{\mathrm{B}}(B))^2$$

Partie III. Markov Chains ... Like in Bac ... Back in Time ...

Exercice 5. Antilles juin 2016 (c)

L'office de tourisme évalue chaque année les hôtels de sa région et répertorie les meilleurs sur son site internet. On admet que dans cette région, la création ou la disparition d'hôtels est négligeable. On constate que, chaque année :

- 10 % des hôtels répertoriés ne seront plus répertoriés l'année suivante ;
- 20 % des hôtels non répertoriés sur le site seront répertoriés l'année suivante.

1. Réaliser un graphe décrivant cette situation (on notera R l'évènement « l'hôtel est répertorié » et $\overline{R}$ son évènement contraire).
2. Écrire la matrice de transition de ce graphe.
3. En 2015, 30 % des hôtels de la région étaient répertoriés. Quel pourcentage d'hôtels sera répertorié en 2016 ? en 2017 ?
4. Quel pourcentage d'hôtel serait répertorié à long terme ?

Exercice 6. Polynésie, Juin 2013

Alors qu'une entreprise A possédait le monopole de l'accès à internet des particuliers, une entreprise concurrente B est autorisée à s'implanter.
Lors de l'ouverture au public en 2010 des services du fournisseur d'accès B, l'entreprise A possède 90 % du marché et l'entreprise B possède le reste du marché. Dans cet exercice, on suppose que chaque année, chaque internaute est client d'une seule entreprise A ou B.
On observe à partir de 2010 que chaque année, 15 % des clients de l'entreprise A deviennent des clients de l'entreprise B, et 10 % des clients de l'entreprise B deviennent des clients de l'entreprise A. Pour tout entier naturel n, on note a_n la probabilité qu'un internaute de ce pays, choisi au hasard, ait son accès à internet fourni par l'entreprise A pour l'année $2010 + n$, et b_n, la probabilité pour que son fournisseur d'accès en $2010 + n$ soit l'entreprise B.
On note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice correspondant à l'état probabiliste de l'année $2010 + n$ et on a ainsi $a_0 = 0,9$ et $b_0 = 0,1$.

Partie A

1. Représenter cette situation par un graphe probabiliste.

2.

2. a. Déterminer la matrice de transition M de ce graphe.

2. b. Montrer qu'en 2013, l'état probabiliste est environ $\begin{pmatrix} 0,61 & 0,39 \end{pmatrix}$.

2. c. Déterminer l'état stable $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ de la répartition des clients des entreprises A et B. Interpréter le résultat.

Partie B

Lors d'une campagne de marketing l'entreprise B distribue un stylo ou un porte-clés ; il en coûte à l'entreprise 0,80 € par stylo et 1,20 € par porte-clés distribué. À la fin de la journée l'entreprise a distribué 550 objets et cela lui a coûté 540 €.
On cherche le nombre s de stylos et le nombre c de porte-clés distribués.

1. Écrire un système traduisant cette situation.

2. Montrer que le système précédent est équivalent à $R \times X = T$ où $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0,8 & 1,2 \end{pmatrix}$ et X et T sont des matrices que l'on précisera.

3. Résoudre le système à l'aide de la calculatrice. Interpréter le résultat.

Réponses
Voir la correction détaillée sur www.math93.com

Exercice 7. Pondichery 2016

Une étude statistique sur une population d'acheteurs a montré que :

- 90 % des personnes qui ont fait leur dernier achat en utilisant internet affirment vouloir continuer à utiliser internet pour faire le suivant. Les autres personnes comptent faire leur prochain achat en magasin ;
- 60 % des personnes qui ont fait leur dernier achat en magasin affirment vouloir continuer à effectuer le suivant en magasin. Les autres comptent effectuer leur prochain achat en utilisant internet.

Dans toute la suite de l'exercice, n désigne un entier naturel non nul. Une personne est choisie au hasard parmi les acheteurs. On note :

- a_n la probabilité que cette personne fasse son n-ième achat sur internet ;
- b_n la probabilité que cette personne fasse son n-ième achat en magasin.

On suppose de plus que $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$.
On note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & bn \end{pmatrix}$ l'état probabiliste correspondant au n-ième achat. Ainsi $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.
On note :

- A l'état : « La personne effectue son achat sur internet » ;
- B l'état : « La personne effectue son achat en magasin ».

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.

2. Écrire la matrice de transition M associée à ce graphe en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique.

3.

3. a. Calculer la matrice M^4.

3. b. En déduire que la probabilité que la personne interrogée fasse son 5e achat sur internet est égale à 0,812 5.

4. On note $P = (a \quad b)$ l'état stable associé à ce graphe.

4. a. Montrer que les nombres a et b sont solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 0,1a & - & 0,4b & = & 0 \\ a & + & b & = & 1 \end{array}\right.$$

4. b. Résoudre le système précédent.

4. c. À long terme, quelle est la probabilité que cette personne fasse ses achats sur internet ?

5.

5. a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$a_{n+1} = 0,5a_n + 0,4$$

5. b. Recopier et compléter l'algorithme suivant afin qu'il affiche le plus petit entier naturel n non nul tel que $a_n \leqslant 0,801$.

Variables :	N est un entier naturel
	A est un nombre réel
Initialisation :	Affecter à N la valeur 1
	Affecter à A la valeur 1
Traitement :	Tant que ...
	Affecter à A la valeur $0,5 \times A + 0,4$
	Affecter à N la valeur ....
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher N

5. c. Quelle est la valeur affichée par l'algorithme en sortie ?

Réponses
Voir la correction détaillée sur www.math93.com

Exercice 8. (c) Amérique du Sud, Novembre 2015

Claudine est une passionnée de lecture abonnée à l'hebdomadaire littéraire « La Lecture ». Elle se rend une fois par semaine à la bibliothèque et demande ou non l'avis de la bibliothécaire sur le livre mis en valeur dans l'hebdomadaire « La Lecture ».
Lorsque Claudine demande à la bibliothécaire son avis, la probabilité qu'elle le demande de nouveau la semaine suivante est $0,9$.
Lorsque Claudine ne demande pas à la bibliothécaire son avis, la probabilité qu'elle ne le demande pas non plus la semaine suivante est $0,6$.
La première semaine, on suppose que la probabilité que Claudine demande un avis vaut $0,1$.
Pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on note :

- a_n la probabilité que Claudine demande un avis à la bibliothécaire la n-ième semaine ;
- b_n, la probabilité que Claudine ne demande pas d'avis à la bibliothécaire la n-ième semaine ;
- $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne traduisant l'état probabiliste la n-ième semaine.

On a ainsi $a_1 = 0,1$ et $b_1 = 0,9$.

1.

1. a. Illustrer la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B : A représente l'état « Claudine demande un avis à la bibliothécaire » ; B représente l'état « Claudine ne demande pas d'avis à la bibliothécaire ».

1. b. Indiquer la matrice de transition M associée à ce graphe. On prendra les sommets A et B dans l'ordre (A, B).

2. Montrer que l'on a $P_2 = \begin{pmatrix} 0,45 & 0,55 \end{pmatrix}$.

3.

3. a. Montrer que l'état stable de la répartition du choix de la demande d'avis est $P = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$.

3. b. Interpréter ce résultat.

4. On admet que, pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on a :

$$a_{n+1} = 0,5a_n + 0,4.$$

On considère l'algorithme suivant :

VARIABLES :	A est un réel et N est un entier naturel
INITIALISATION :	A prend la valeur $0,1$ N prend la valeur 1

TRAITEMENT :	Tant que $A \leqslant 0,79$
	    N prend la valeur $N+1$
	    A prend la valeur $0,5 \times A + 0,4$
	Fin du Tant que

SORTIE :	Afficher N

Préciser ce que cet algorithme permet d'obtenir. (On ne demande pas de donner la valeur de N affichée en sortie d'algorithme.)

5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

On admet que, pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on a :

$$a_n = 0,8 - 0,7 \times 0,5^{n-1}.$$

Déterminer le nombre de semaines à partir duquel la probabilité que Claudine demande un avis soit supérieure à $0,799$.

Exercice 9. Liban mai 2016

L'entreprise PiscinePlus, implantée dans le sud de la France, propose des contrats annuels d'entretien aux propriétaires de piscines privées. C'est la seule entreprise dans les environs. Aussi, les propriétaires de piscines n'ont que deux choix possibles : soit ils s'occupent eux-mêmes de l'entretien de leur piscine, soit ils souscrivent un contrat avec l'entreprise PiscinePlus. On admet que le nombre de propriétaires de piscines est constant. Le patron remarque que chaque année :

- 12 % des particuliers qui entretenaient eux-mêmes leur piscine décident de souscrire un contrat avec l'entreprise PiscinePlus ; et 20 % de particuliers sous contrat avec l'entreprise PiscinePlus décident de le résilier pour entretenir eux-mêmes leur piscine.

Cette situation peut être modélisée par un graphe probabiliste de sommets C et L où :

- C est l'évènement « Le particulier est sous contrat avec l'entreprise PiscinePlus » ; et L est l'évènement « Le particulier effectue lui-même l'entretien de sa piscine ».

Chaque année, on choisit au hasard un particulier possédant une piscine et on note pour tout entier naturel n :

- c_n la probabilité que ce particulier soit sous contrat avec l'entreprise PiscinePlus l'année $2015+n$; et l_n la probabilité que ce particulier entretienne lui-même sa piscine l'année $2015+n$.

On note $P_n = \begin{pmatrix} c_n & l_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne de l'état probabiliste pour l'année $2015+n$. Dans cet exercice, on se propose de savoir si l'entreprise PiscinePlus atteindra l'objectif d'avoir au moins 35 % des propriétaires de piscines comme clients sous contrat d'entretien.

Partie A

1. Dessiner le graphe probabiliste représentant cette situation et donner la matrice de transition associée au graphe dont les sommets sont pris dans l'ordre C et L.

2.

2. a. Montrer que l'état stable de ce graphe est $P = \begin{pmatrix} 0,375 & 0,625 \end{pmatrix}$.

2. b. Déterminer, en justifiant, si l'entreprise PiscinePlus peut espérer atteindre son objectif.

Partie B

En 2015, 15 % des propriétaires de piscines étaient sous contrat avec l'entreprise PiscinePlus. Ainsi $P_0 = \begin{pmatrix} 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $c_{n+1} = 0,68c_n + 0,12$.

2. Avec un algorithme, on cherche à savoir au bout de combien d'années l'entreprise PiscinePlus atteindra son objectif :

L1	Variables :	n est un nombre entier naturel
L2		C est un nombre réel
L3	Traitement :	Affecter à n la valeur 0
L4		Affecter à C la valeur $0,15$
L5		Tant que $C < 0,35$ faire
L6		n prend la valeur $n+1$
L7		C prend la valeur $0,68C + 0,12$
L8		Fin Tant que
L9	Sortie :	Afficher n

2. a. Recopier et compléter le tableau ci-dessous, en ajoutant autant de colonnes que nécessaire pour permettre la réalisation de l'algorithme ci-dessus. On arrondira les résultats au millième.

Valeur de n	0		
Valeur de C	0,15		

2. b. Donner la valeur affichée à la fin de l'exécution de cet algorithme puis interpréter la dans le contexte de l'exercice.

3. On rappelle que, pour tout entier n, on a $c_{n+1} = 0,68c_n + 0,12$ et que $c_0 = 0,15$. On pose, pour tout entier n, $v_n = c_n - 0,375$.

3. a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique. En préciser la raison et le premier terme. On admet que, pour tout entier naturel n, on a $c_n = -0,225 \times 0,68^n + 0,375$.

3. b. Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $c_n \geqslant 0,35$.

3. c. Quel résultat de la question 2. retrouve-t-on ?

Réponses
Le corrigé détaillé sur www.math93.com

Exercice 10. Métropole juin 2016

Afin de se préparer à courir des marathons, Hugo aimerait effectuer quotidiennement un footing à compter du 1er janvier 2014. On admet que :

- Si Hugo court un jour donné, la probabilité qu'il ne coure pas le lendemain est de 0,2 ;
- s'il ne court pas un jour donné, la probabilité qu'il ne coure pas le lendemain est de 0,4.

On note C l'état « Hugo court » et R l'état « Hugo ne court pas ». Pour tout entier naturel n, on note :

- c_n la probabilité de l'évènement « Hugo court le $(n+1)$-ième jour » ;
- r_n la probabilité de l'évènement « Hugo ne court pas le $(n+1)$-ième jour » ;
- P_n la matrice $\begin{pmatrix} c_n & r_n \end{pmatrix}$ correspondant à l'état probabiliste le $(n+1)$-ième jour.

Le 1er janvier 2014, motivé, le jeune homme court. On a donc :

$$P_0 = \begin{pmatrix} c_0 & r_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste de sommets C et R.
2. Écrire la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.
3. On donne
$$M^6 = \begin{pmatrix} 0{,}750\,016 & 0{,}249\,984 \\ 0{,}749\,952 & 0{,}250\,048 \end{pmatrix}$$
Quel calcul matriciel permet de déterminer la probabilité c_6 qu'Hugo coure le 7e jour ?
Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de c_6.
4.
   4. a. Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n.
   4. b. Montrer que, pour tout entier naturel n,
   $$c_{n+1} = 0,2c_n + 0,6$$
5. Pour tout entier naturel n, on considère la suite (v_n) définie par $v_n = c_n - 0,75$.
   5. a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,2$. Préciser le premier terme.
   5. b. Exprimer v_n en fonction de n.
   Déterminer la limite de la suite (v_n).
   5. c. Justifier que, pour tout entier naturel n,
   $$c_n = 0,75 + 0,25 \times 0,2^n$$
   5. d. Que peut-on conjecturer concernant la probabilité qu'Hugo coure le 29 décembre 2014 ?
   5. e. Conjecturer alors l'état stable de ce graphe.
   Comment valider votre conjecture ?

Réponses
(4.) $c_6 \approx 0,75$
Le corrigé détaillé sur www.math93.com

Exercice 11. Amerique du Nord 2016

Un groupe de presse édite un magazine qu'il propose en abonnement.
Jusqu'en 2010, ce magazine était proposé uniquement sous forme papier. Depuis 2011, les abonnés du magazine ont le choix entre la version numérique et la version papier.
Une étude a montré que, chaque année, certains abonnés changent d'avis : 10 % des abonnés à la version papier passent à la version numérique et 6 % des abonnés à la version numérique passent à la version papier.
On admet que le nombre global d'abonnés reste constant dans le temps.
Pour tout nombre entier naturel n, on note :

- a_n la probabilité qu'un abonné pris au hasard ait choisi la version papier l'année $2010 + n$;
- b_n la probabilité qu'un abonné pris au hasard ait choisi la version numérique l'année $2010 + n$;
- $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice correspondant à l'état probabiliste de l'année $2010 + n$.

On a donc $a_0 = 1,\ b_0 = 0$ et $P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1.

1. a. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B où le sommet A représente l'état « abonné à la version papier » et B l'état « abonné à la version numérique ».

1. b. Déterminer la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre A, B des sommets.

1. c. Montrer que $P_1 = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \end{pmatrix}$.

2. On admet que, pour tout entier naturel n, on a $a_{n+1} = 0,9a_n + 0,06b_n$ et $b_{n+1} = 0,1a_n + 0,94b_n$.
Le directeur du groupe de presse souhaite visualiser l'évolution des deux types d'abonnements. Pour cela, on lui propose les deux algorithmes suivants :

Algorithme 1

```
Entrée
Saisir n
Traitement
a prend la valeur 1
b prend la valeur 0
Pour i allant de 1 à n
    a prend la valeur 0,9 × a + 0,06 × b
    b prend la valeur 0,1 × a + 0,94 × b
    Afficher a et b
Fin Pour
```

Algorithme 2

```
Entrée
Saisir n
Traitement
a prend la valeur 1
b prend la valeur 0
Pour i allant de 1 à n
    c prend la valeur a
    a prend la valeur 0,9 × a + 0,06 × b
    b prend la valeur 0,1 × c + 0,94 × b
    Afficher a et b
Fin Pour
```

Sachant qu'un seul des algorithmes proposés permet de répondre au souhait du directeur, préciser lequel en justifiant la réponse.

3.

3. a. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a :

$$a_{n+1} = 0,84a_n + 0,06$$

3. b. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = a_n - 0,375$.
Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,84 et calculer u_0.

3. c. Donner l'expression de u_n en fonction de n.
En déduire que, pour tout entier naturel n, on a :

$$a_n = 0,375 + 0,625 \times 0,84^n$$

4. En résolvant une inéquation, déterminer l'année à partir de laquelle la proportion d'abonnés à la version papier du magazine devient inférieure à 50 %.

Réponses
(2.) algo. 2 - (4.) à partir de 2020
Le corrigé détaillé sur www.math93.com

Exercice 12. (c) Métropole sept 2014

Pour satisfaire ses adhérents, un club de sport a instauré trois niveaux d'apprentissage :

DÉBUTANT (D), CONFIRMÉ (C) et EXPERT (E).

Au 1er septembre 2012, lors de l'inscription, le club comptait :

- 30 % de débutants ;
- 50 % de confirmés ;
- 20 % d'experts.

D'une année sur l'autre, on constate que :

- parmi les adhérents de niveau débutant, 40 % restent à ce niveau et 60 % passent au niveau confirmé ;
- parmi les adhérents de niveau confirmé, 60 % restent à ce niveau et 40 % passent au niveau expert ;
- parmi les adhérents de niveau expert, 80 % restent à ce niveau, 10 % redescendent au niveau confirmé et les autres 10 % préfèrent reprendre les bases au niveau débutant.

On considère qu'il n'y a pas de nouveaux venus ni de départs dans le club.

Soit $P_n = \begin{pmatrix} d_n & e_n & e_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne décrivant l'état probabiliste de la répartition parmi les trois niveaux d'apprentissage D, C et E au 1er septembre de l'année $2012 + n$ pour tout entier naturel n.

1.

1. a. Donner sans justification la matrice P_0.

1. b. Traduire la situation par un graphe probabiliste de sommets D, C et E.

On donne la matrice carrée M de transition en respectant l'ordre D, C, E des sommets.

$$M = \begin{pmatrix} 0,4 & \underline{0,6} & 0 \\ 0 & 0,6 & 0,4 \\ 0,1 & 0,1 & \underline{0,8} \end{pmatrix}$$

Dans la suite de l'exercice, on pourra utiliser les résultats suivants (résultats arrondis au millième) :

$$M^5 = \begin{pmatrix} 0,085 & 0,331 & 0,584 \\ 0,097 & 0,293 & 0,610 \\ 0,104 & 0,298 & 0,598 \end{pmatrix} \qquad M^{10} = \begin{pmatrix} 0,100 & 0,299 & 0,601 \\ 0,100 & 0,300 & 0,600 \\ 0,100 & 0,300 & 0,600 \end{pmatrix}$$

2. Dans cette matrice on lit **0,6** et **0,8** en italique gras.

2. a. Préciser, à l'aide d'une phrase, à quoi correspondent ces deux valeurs en lien avec la situation étudiée.

2. b. Calculer P_1.

2. c. Déterminer la répartition prévisible, en pourcentages, des adhérents dans ce club de sport au 1er septembre 2017. Les résultats seront donnés à $0,1$ % près.

3.

3. a. En calculant P_{10}, émettre une conjecture sur la matrice P correspondant à l'état probabiliste stable.

3. b. Vérifier cette conjecture.

3. c. Quelle conclusion peut-on en tirer pour la répartition des adhérents ?

Partie IV. Correction : Graphes Probabilistes

Correction de l'exercice 1 : Suite de Matrices

1. **Calcul de U_1 :**

$$\mathrm{U}_1 = A\mathrm{U}_0 + B = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0 \\ 0 & 1{,}2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 15 \\ 25 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}9\times 15 \\ 1{,}2\times 25 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13{,}5 \\ 30 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16{,}5 \\ 28 \end{pmatrix}.$$

2. **Justification de l'inversibilité de $A - I_2$:**

$$A - I_2 = \begin{pmatrix} 0{,}9-1 & 0 \\ 0 & 1{,}2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}1 & 0 \\ 0 & 0{,}2 \end{pmatrix}.$$

La matrice $A - I_2$ est diagonale avec des coefficients diagonaux non nuls ($-0{,}1 \neq 0$ et $0{,}2 \neq 0$). Elle est donc inversible.
On pouvait aussi calculer le déterminant de la matrice.

3. **Calcul de l'élément invariant C :**

$$C = AC + B \implies (I_2 - A)C = B \implies C = (I_2 - A)^{-1}B.$$

Calculons $I_2 - A$:

$$I_2 - A = \begin{pmatrix} 1-0{,}9 & 0 \\ 0 & 1-1{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0 \\ 0 & -0{,}2 \end{pmatrix}.$$

L'inverse de $I_2 - A$ est :

$$(I_2 - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{0{,}1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{-0{,}2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

D'où :

$$C = (I_2 - A)^{-1}B = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10\times 3 \\ -5\times(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

4. **Expression de V_{n+1} :**
Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{V}_n = \mathrm{U}_n - C \implies \mathrm{V}_{n+1} &= \mathrm{U}_{n+1} - C \\ &= (A\mathrm{U}_n + B) - C \\ &= A(\mathrm{U}_n - C) + \underbrace{(AC + B - C)}_{0_2} \\ &= A\mathrm{V}_n. \end{aligned}$$

5. **Terme général de V_n :** Pour tout entier n on a :

$$\mathrm{V}_{n+1} = A\mathrm{V}_n \implies \mathrm{V}_n = A^n\mathrm{V}_0.$$

Avec $\mathrm{V}_0 = \mathrm{U}_0 - C = \begin{pmatrix} 15 \\ 25 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 15 \end{pmatrix}$, on obtient :

$$\mathrm{V}_n = A^n\begin{pmatrix} -15 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

6. **Calcul de V_{10} :**

$$A^n = \begin{pmatrix} 0{,}9^n & 0 \\ 0 & 1{,}2^n \end{pmatrix} \implies \mathrm{V}_{10} = A^{10}\begin{pmatrix} -15 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}9^{10} & 0 \\ 0 & 1{,}2^{10} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -15 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

En calculant les puissances :

$$0{,}9^{10} \approx 0{,}3487 \quad \text{et} \quad 1{,}2^{10} \approx 6{,}1917,$$

on obtient :

$$\mathrm{V}_{10} = \begin{pmatrix} 0{,}3487 & 0 \\ 0 & 6{,}1917 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -15 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3487\times(-15) \\ 6{,}1917\times 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5{,}231 & 92{,}876 \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 2

1. **Détermination de V_n :**

Remarquons tout d'abord que $A - I_3$ est inversible, d'inverse $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

En posant $C = -(A - I_3)^{-1}B = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

on en déduit, d'après le cours, qu'en choisissant :

$C = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, la suite (V_n) vérifie $V_{n+1} = AV_n$.

2. **Calcul de A^n :**

Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n : $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

Initialisation :

Pour $n = 0$, $\begin{pmatrix} 2^0 & 0 & 0 \times 2^{0-1} \\ 0 & 2^0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^0 \end{pmatrix} = I_3 = A^0$.

Hérédité :

Supposons qu'il existe un entier naturel n tel que $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

$A^{n+1} = A^n A$

$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & (n+1)2^{(n+1)-1} \\ 0 & 2^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$

Conclusion : On a montré que la propriété était vraie au rang 0, puis que s'il existait un rang n tel que la propriété est vraie, alors elle l'est au rang $n+1$. D'après le principe de récurrence, on en déduit que, pour tout entier naturel n :

3. **Détermination de V_n :** On obtient :

$$V_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

D'où :

$$V_n = A^n V_0 = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En effectuant les produits :

$$V_n = \begin{pmatrix} 2^{n+1} + n2^{n-1} \\ 2^n \\ 2^n \end{pmatrix}.$$

4. **Expression de U_n :**

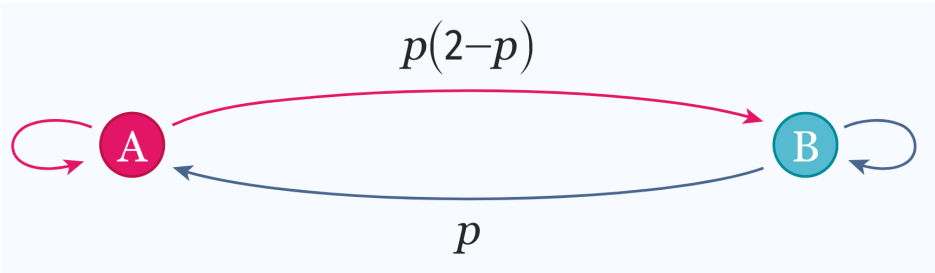
$$U_n = V_n + C = \begin{pmatrix} 2^n + n2^{n-1} \\ 2^n + 1 \\ 2^n + 1 \end{pmatrix}.$$

5. **Calcul de U_{10} :**

$$U_{10} = \begin{pmatrix} 7168 \\ 1025 \\ 1025 \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 4

Soit $p \in [0\ ;\ 1]$. On considère une chaîne de Markov associée au graphe probabiliste suivant :



1. Vérifier que $0 \leqslant p(2-p) \leqslant 1$.

Pour tout $p \in [0,1]$, on définit la fonction f par $f(p) = p(2-p) = -p^2 + 2p$. Il s'agit d'une fonction trinôme du second degré dont le maximum est obtenu pour $p = 1$ et $f(1) = 1$. De plus f est croissante sur $[0,1]$ ainsi le minimum de f sur $[0;1]$ est atteint pour $p = 0$ et $f(0) = 0$. Ainsi pour tout $p \in [0,1]$ on a $p(2-p) \in [0,1]$.

2. Montrer que $P_A(A) = (P_B(B))^2$.

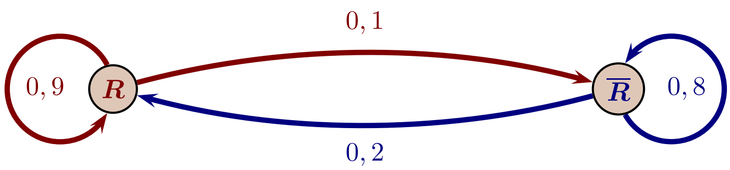
$$P_A(A) = 1 - P_A(B) = 1 - p(2-p) = p^2 - 2p + 1 = (p-1)^2 = (1-p)^2 = (1 - P_B(A))^2 = (P_B(B))^2$$

Correction de l'exercice 5 : Antilles 2016

L'office de tourisme évalue chaque année les hôtels de sa région et répertorie les meilleurs sur son site internet. On admet que dans cette région, la création ou la disparition d'hôtels est négligeable.
On constate que, chaque année :

- 10 % des hôtels répertoriés ne seront plus répertoriés l'année suivante ;
- 20 % des hôtels non répertoriés sur le site seront répertoriés l'année suivante.

1. On notera R l'évènement « l'hôtel est répertorié » et $\overline{R}$ son évènement contraire ; on réalise un graphe décrivant la situation :



2. **Écrire la matrice de transition de ce graphe**.
La matrice de transition M se construit à partir des probabilités suivantes :
   - 1ère ligne : probabilité d'aller de A vers A, de A vers B ;

- 2ème ligne : probabilité d'aller de B vers A, de B vers B.

On obtient donc :

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}}$$

3. En 2015, 30 % des hôtels étaient répertoriés. Quel pourcentage d'hôtels sera répertorié en 2016 ? en 2017 ?

Pour n entier naturel, on appelle P_n l'état donnant la répartition des hôtels répertoriés et ceux qui ne le sont pas l'année $2015 + n$; on représente cet état par une matrice 1 ligne 2 colonnes. On a donc pour l'année 2015, correspondant à $n = 0$:

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$$

- En 2016 l'état sera :

$$\begin{aligned} P_1 = P_0 \times M &= \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,3 \times 0,9 + 0,7 \times 0,2 & 0,3 \times 0,1 + 0,7 \times 0,8 \end{pmatrix} \\ P_1 = P_0 \times M &= \begin{pmatrix} 0,41 & 0,59 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  Donc le pourcentage d'hôtels répertoriés en 2016 sera de 41 %.

- En 2017 l'état sera :

$$\begin{aligned} P_2 = P_1 \times M &= \begin{pmatrix} 0,41 & 0,59 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,41 \times 0,9 + 0,59 \times 0,2 & 0,41 \times 0,1 + 0,59 \times 0,8 \end{pmatrix} \\ P_2 = P_1 \times M &= \begin{pmatrix} 0,487 & 0,513 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  Donc le pourcentage d'hôtels répertoriés en 2017 sera de 48,7 %.

4. Quel pourcentage d'hôtel serait répertorié à long terme ?

Propriété 1 (État stable)

Pour tout graphe probabiliste d'ordre 2, dont la matrice de transition M ne comporte pas de 0, l'état P_n converge vers un état stable P indépendant de l'état initial P_0.
Cet état stable vérifie l'égalité :

$$P = P \times M$$

La matrice de transition M ne comporte aucun zéro, donc d'après la propriété 1 l'état P_n converge vers l'état stable du système, c'est-à-dire vers la matrice P telle que :

$$P = \begin{pmatrix} r & 1-r \end{pmatrix} \text{ avec } P \times M = P.$$

Or on a :

$$\begin{aligned} P \times M = P &\iff \begin{pmatrix} r & 1-r \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 1-r \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} 0,9r + 0,2(1-r) &= r \\ 0,1r + 0,8(1-r) &= 1-r \end{cases} \\ &\iff 0,2 = 0,3r \\ P \times M = P &\iff r = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

L'état stable du système est donc la matrice

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Donc, à long terme, il y aura les deux tiers des hôtels qui seront répertoriés, soit environ 66,67 %.

Correction de l'exercice 8 : Amérique du Sud, Novembre 2015

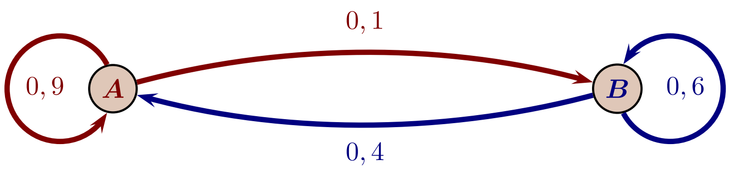
Claudine est une passionnée de lecture abonnée à l'hebdomadaire littéraire « La Lecture ». Elle se rend une fois par semaine à la bibliothèque et demande ou non l'avis de la bibliothécaire sur le livre mis en valeur dans l'hebdomadaire « La Lecture ».
Lorsque Claudine demande à la bibliothécaire son avis, la probabilité qu'elle le demande de nouveau la semaine suivante est $0,9$.
Lorsque Claudine ne demande pas à la bibliothécaire son avis, la probabilité qu'elle ne le demande pas non plus la semaine suivante est $0,6$.
La première semaine, on suppose que la probabilité que Claudine demande un avis vaut $0,1$.
Pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on note :

- a_n la probabilité que Claudine demande un avis à la bibliothécaire la n-ième semaine ;
- b_n, la probabilité que Claudine ne demande pas d'avis à la bibliothécaire la n-ième semaine ;
- $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne traduisant l'état probabiliste la n-ième semaine.

On a ainsi $a_1 = 0,1$ et $b_1 = 0,9$ et donc $P_1 = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$.

1.

1. a. Illustrer la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B où A représente l'état « Claudine demande un avis à la bibliothécaire » ; B représente l'état « Claudine ne demande pas d'avis à la bibliothécaire ».



1. b. Indiquer la matrice de transition M associée à ce graphe. On prendra les sommets A et B dans l'ordre (A,B).

- Première rédaction.
  La matrice de transition M se construit à partir des probabilités suivantes :
  - 1ère ligne : probabilité d'aller de A vers A, de A vers B ;
  - 2ème ligne : probabilité d'aller de B vers A, de B vers B.

  On obtient donc :

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}}$$

- Autre rédaction.

  D'après le texte, pour tout entier n on a : $\begin{cases} a_{n+1} &= 0,9a_n + 0,4b_n \\ b_{n+1} &= 0,1a_n + 0,6b_n \end{cases}$

  ce qui donne sous forme matricielle : $\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$

  Donc la matrice de transition de ce graphe est $M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$

2. Montrer que l'on a $P_2 = \begin{pmatrix} 0,45 & 0,55 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} P_2 = P_1 M &= \begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,1 \times 0,9 + 0,9 \times 0,4 & 0,1 \times 0,1 + 0,9 \times 0,6 \end{pmatrix} \\ P_2 = P_1 M &= \underline{\begin{pmatrix} 0,45 & 0,55 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

3.

3. a. Montrer que l'état stable de la répartition du choix de la demande d'avis est $P = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$.

L'état stable est l'état

$$P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \text{ tel que } \begin{cases} a+b=1 \\ P \times M = P \end{cases}$$

$$\begin{aligned} PM = P &\iff \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} 0,9a+0,4b & 0,1a+0,6b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} 0,9a+0,4b &= a \\ 0,1a+0,6b &= b \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -0,1a+0,4b &= 0 \\ 0,1a-0,4b &= 0 \end{cases} \\ &\iff a-4b=0 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{cases} a+b=1 \\ PM=P \end{cases} \iff \begin{cases} a+b &= 1 \\ a-4b &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a+b &= 1 \\ 5b &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a &= 0,8 \\ b &= 0,2 \end{cases}$$

L'état stable est donc :

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}}$$

3. b. Interpréter ce résultat.

Si la répartition est de 80 % - 20 % pour les états A et B la semaine n, cette répartition restera la même la semaine $n+1$ et toutes les suivantes.

On peut aussi dire, qu'à terme, la répartition se répartira ainsi : 80 % - 20 % pour les états A et B.

4. *On admet que, pour tout nombre entier naturel* n *strictement positif, on a :* $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,4$.

On considère l'algorithme suivant :

VARIABLES :	A est un réel et N est un entier naturel
INITIALISATION :	A prend la valeur $0,1$ N prend la valeur 1

TRAITEMENT :	Tant que $A \leqslant 0,79$
	    N prend la valeur $N+1$
	    A prend la valeur $0,5 \times A + 0,4$
	Fin du Tant que

SORTIE :	Afficher N

Préciser ce que cet algorithme permet d'obtenir. (On ne demande pas de donner la valeur de N affichée en sortie d'algorithme.)

Dans cet algorithme, la variable A désigne le terme a_n dont le rang est donné par N.

Cet algorithme permet d'obtenir, si elle existe, la première valeur de n pour laquelle a_n est strictement supérieur à 0,79.

5. On admet que, pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on a : $a_n = 0,8 - 0,7 \times 0,5^{n-1}$. déterminer n tel que $a_n > 0,799$

On cherche n tel que $a_n > 0,799$:

$$\begin{aligned}
a_n > 0,799 \iff & \quad 0,8 - 0,7 \times 0,5^{n-1} & > & \quad 0,799 \\
\iff & \quad 0,7 \times 0,5^{n-1} & < & \quad 0,001 \\
\iff & \quad 0,5^{n-1} & < & \quad \frac{0,001}{0,7} \\
\iff & \quad \ln\left(0,5^{n-1}\right) & < & \quad \ln\left(\frac{0,001}{0,7}\right) && \text{: par croissance de la fonction ln sur } \mathbb{R}_+^* \\
\iff & \quad (n-1)\ln 0,5 & < & \quad \ln\left(\frac{0,001}{0,7}\right) && \text{: par propriété de la fonction ln} \\
\iff & \quad n-1 & > & \quad \frac{\ln\left(\frac{0,001}{0,7}\right)}{\ln 0,5} && \text{car } \ln 0,5 < 0 \\
\iff & \quad n & > & \quad \frac{\ln\left(\frac{0,001}{0,7}\right)}{\ln 0,5} + 1
\end{aligned}$$

Or

$$\frac{\ln\left(\frac{0,001}{0,7}\right)}{\ln 0,5} + 1 \approx 10,5$$

donc le nombre de semaines à partir duquel la probabilité que Claudine demande un avis est supérieur à 0,799 est 11.

Exercice 13. Correction de l'exercice 12 : Métropole Septembre 2014

Pour satisfaire ses adhérents, un club de sport a instauré trois niveaux d'apprentissage : DÉBUTANT (D), CONFIRMÉ (C) et EXPERT (E). Au 1er septembre 2012, lors de l'inscription, le club comptait : 30 % de débutants, 50 % de confirmés et 20 % d'experts. D'une année sur l'autre, on constate que : parmi les adhérents de niveau débutant, 40 % restent à ce niveau et 60 % passent au niveau confirmé ; parmi les adhérents de niveau confirmé, 60 % restent à ce niveau et 40 % passent au niveau expert ; parmi les adhérents de niveau expert, 80 % restent à ce niveau, 10 % redescendent au niveau confirmé et les autres 10 % préfèrent reprendre les bases au niveau débutant.

On considère qu'il n'y a pas de nouveaux venus ni de départs dans le club. Soit $P_n = \begin{pmatrix} d_n & e_n & e_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne décrivant l'état probabiliste de la répartition parmi les trois niveaux d'apprentissage D, C et E au 1er septembre de l'année $2012 + n$ pour tout entier naturel n.

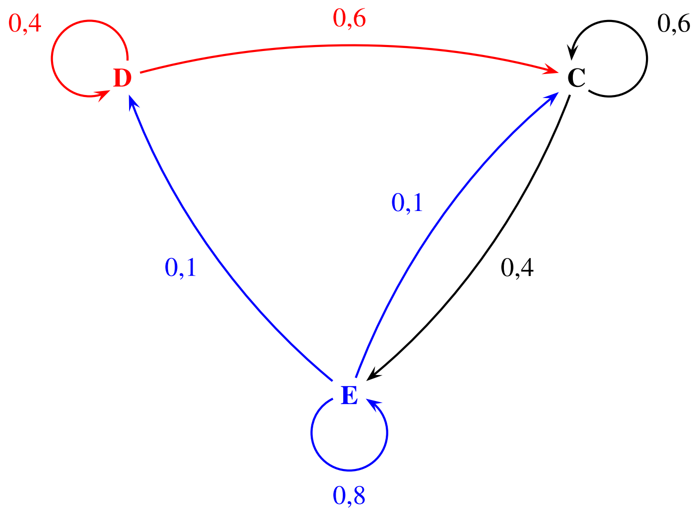
1. **1. a. Donner sans justification la matrice P_0.**

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 & 0,2 \end{pmatrix}$$

Puisqu'il y a 30 % de débutants, 50 % de confirmés et 20 % d'experts en 2012 c'est-à-dire quand $n = 0$.

1. b. Traduire la situation par un graphe probabiliste de sommets D, C et E.

On traduit la situation par un graphe probabiliste :



On donne la matrice de transition M, ainsi que M^5 et M^{10}, en respectant l'ordre D, C, E des sommets :

$$M = \begin{pmatrix} 0,4 & \underline{0,6} & 0 \\ 0 & 0,6 & 0,4 \\ 0,1 & 0,1 & \underline{0,8} \end{pmatrix} \qquad M^5 = \begin{pmatrix} 0,085 & 0,331 & 0,584 \\ 0,097 & 0,293 & 0,610 \\ 0,104 & 0,298 & 0,598 \end{pmatrix} \qquad M^{10} = \begin{pmatrix} 0,100 & 0,299 & 0,601 \\ 0,100 & 0,300 & 0,600 \\ 0,100 & 0,300 & 0,600 \end{pmatrix}$$

2. *Dans la matrice M on lit* ***0,6*** *et* ***0,8*** *en italique gras.*

2. a. Préciser, à l'aide d'une phrase, à quoi correspondent ces deux valeurs en lien avec la situation étudiée.

Le nombre $0,6$ situé sur la première ligne et la deuxième colonne de la matrice M correspond aux 60 % d'adhérents débutants qui deviennent confirmés l'année suivante.

Le nombre $0,8$ situé sur la troisième ligne et la troisième colonne de la matrice M correspond aux 80 % d'adhérents experts qui restent experts l'année suivante.

2. b. Calculer P_1.

D'après le cours, on peut dire que, pour tout n, $P_{n+1} = P_n \times M$. On a donc :

$$\begin{aligned} P_1 = P_0 \times M &= \begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 & 0,2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0,4 \\ 0,1 & 0,1 & 0,8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,3 \times 0,4 + 0,5 \times 0 + 0,2 \times 0,1 & 0,3 \times 0,6 + 0,5 \times 0,6 + 0,2 \times 0,1 & 0,3 \times 0 + 0,5 \times 0,4 + 0,2 \times 0,8 \end{pmatrix} \\ &= \underline{\begin{pmatrix} 0,14 & 0,5 & 0,36 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

2. c. Déterminer la répartition prévisible, en pourcentages, des adhérents dans ce club de sport au 1er septembre 2017. Les résultats seront donnés à $0,1$ % près.

La répartition prévisible des adhérents au 1er septembre 2017 est donnée par P_5 car $2017 = 2012 + 5$.

D'après le cours, on sait que, pour tout n, $P_n = P_0 \times M^n$; donc $P_5 = P_0 \times M^5$.

$$P_5 = P_0 \times M^5 = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 & 0,2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,085 & 0,331 & 0,584 \\ 0,097 & 0,293 & 0,610 \\ 0,104 & 0,298 & 0,598 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,095 & 0,305 & 0,600 \end{pmatrix}$$

Donc en 2017 il devrait y avoir 9,5 % de débutants, 30,5 % de confirmés et 60,0 % d'experts.

3.

3. a. En calculant P_{10}, émettre une conjecture sur la matrice P correspondant à l'état probabiliste stable.

$$P_{10} = P_0 \times M^{10} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 & 0,2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,100 & 0,299 & 0,601 \\ 0,100 & 0,300 & 0,600 \\ 0,100 & 0,300 & 0,600 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,100 & 0,300 & 0,600 \end{pmatrix}$$

On peut conjecturer que la matrice

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,6 \end{pmatrix}$$

correspond à l'état probabiliste stable.

3. b. Vérifier cette conjecture.

On vérifie d'abord que $0,1 + 0,3 + 0,6 = 1$ donc la matrice P correspond à un état probabiliste.

La matrice P correspond à l'état probabiliste stable si $\mathrm{P} \times M = \mathrm{P}$.

$$\begin{aligned}\mathrm{P} \times M &= \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0,4 \\ 0,1 & 0,1 & 0,8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,1 \times 0,4 + 0,3 \times 0 + 0,6 \times 0,1 & 0,1 \times 0,6 + 0,3 \times 0,6 + 0,6 \times 0,1 & 0,1 \times 0 + 0,3 \times 0,4 + 0,6 \times 0,8 \end{pmatrix} \\ \mathrm{P} \times M &= \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,6 \end{pmatrix} = \mathrm{P}\end{aligned}$$

Donc la matrice P correspond à l'état probabiliste stable.

3. c. Quelle conclusion peut-on en tirer pour la répartition des adhérents ?

On peut conclure qu'à long terme, la répartition dans le club de sport tendra vers 10 % de débutants, 30 % de confirmés et 60 % d'experts.