Transcendance de e

Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS Algèbre 1*, page 229

Exercice :

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et, pour $t \in \mathbb{R}$,
$$I(t) = \int_0^t e^{t-u} P(u) du$$
Montrer que, si $\deg(P) = q$,
$$I(t) = e^t \sum_{i=0}^{q} P^{(i)}(0) - \sum_{i=0}^{q} P^{(i)}(t)$$

2. Supposons donnés des entiers relatifs $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tels que $a_0 \neq 0$ et $a_0 + a_1 e + \ldots a_n e^x = 0$. Soit $p \in \mathbb{N}$; on pose
$$P = X^{p-1}(X-1)^p(X-2)^p \ldots (X-n)^p$$
et
$$J = a_0 I(0) + a_1 I(1) + \ldots + a_n I(n)$$
Montrer que J est un entier. Montrer que $(p-1)!$ divise J et enfin que, pour tout entier premier p assez grand, $J \neq 0$.

3. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $|J| \leq C^p$ et trouver une minoration de $|J|$. En déduire que e est transcendant.

1. On définit $D(P) = \sum_{i=0}^{q} P^{(i)}$ et la fonction f par $f(u) = e^{-u} D(P)(u)$. On note que $D(P)' = F(P) - P$ car $P^{(q+1)} = 0$; on en déduit que, pour tout $u \in \mathbb{R}$, on a
$$f'(u) = -e^{-u} D(P)(u) + e^{-u} D(P)'(u) =^{-} e^{-u} P(u)$$
On obtient alors
$$I(t) = e^t \int_0^t e^{-u} P(u) du = e^t \left[-e^{-u} D(P)(u) \right]_0^t = e^t D(P)(0) - D(P)(t)$$
c'est-à-dire
$$I(t) = e^t \sum_{i=0}^{q} P^{(i)}(0) - \sum_{i=0}^{q} P^{(i)}(t)$$

2. • Avec les notations précédentes, on a, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$,
$$I(k) = e^k D(P)(0) - D(P)(k)$$
On en déduit que
$$J = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k e^k \right) D(P)(0) - \sum_{k=0}^{n} a_k D(P)(k) = -\sum_{k=0}^{n} a_k D(P)(k)$$
P est à coefficients entiers, donc $D(P)$ également ; les a_k étant entiers, on en déduit que J est un entier.

• Montrons que pour $k \in \{0, \ldots, n\}$, $D(P)(k)$ est divisible par $(p-1)!$.

P s'écrit $X^{p-1}Q$ avec $Q \in \mathbb{Z}[X]$. Pour $i \in \mathbb{N}$, on calcule $P^{(i)}$ par la formule de Leibniz. Les termes qui apportent une contribution non nulle à $P^{(i)}(0)$ sont ceux pour lesquels on aura dérivé $p-1$ fois X^{p-1}. La dérivée $(p-1)$-ième de X^{p-1} étant $(p-1)!$, on en déduit que, pour tout entier i, $P^{(i)}(0)$ est divisible par $(p-1)!$. Il en est donc de même de $D(P)(0)$.

Pour $1 \leq k \leq n$, en écrivant $P = (X-k)^p R$, avec $R \in \mathbb{Z}[X]$, on montre de la même manière que $D(P)(k)$ est divisible par $p!$ et a fortiori par $(p-1)!$.

Finalement, chaque $D(P)(k)$ étant divisible par $(p-1)!$, on conclut que J est divisible par $(p-1)!$.

• Montrons que, si p est un nombre premier assez grand, J n'est pas divisible par $p!$. Avec les notations précédentes, on a, pour $i \geq 1$, $Q^{(i)}(0)$ divisible par p, car il existe $Q_1 \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $Q = Q_1^p$. On en déduit que, si $i \geq p$, alors $P^{(i)}(0)$ est divisible par $p!$. Comme

$$P^{(p-1)}(0) = (p-1)!Q(0) = (p-1)!(-1)^{pn}(n!)^p$$

on en déduit que

$$\begin{array}{rcll} D(P)(0) & \equiv & (p-1)!(-1)^{pn}(n!)^p & (\text{mod } p!) \quad \text{puis que} \\ J & \equiv & -a_0(p-1)!(-1)^{pn}(n!)^p & (\text{mod } p!) \end{array}$$

Par hypothèse, a_0 est non nul. Si p est un entier premier supérieur à $|a_0|$ et à n, p ne divise ni a_0, ni $n!$ et donc $p!$ ne divise pas J. On en déduit qu'alors J n'est pas nul.

3. Pour majorer J, on majore $I(k)$, pour $0 \leq k \leq n$, en revenant à l'expression initiale de $I(t)$. On a, pour $k \in \{0, \ldots, n\}$,

$$|I(k)| = \left| \int_0^k e^{t-u} P(u) du \right| \leq \sup_{[0,k]} |P| \int_0^k e^{k-u} du = (e^k - 1) \sup_{[0,k]} |P| \leq e^n \sup_{[0,n]} |P|$$

Or, pour tout $x \in [0, n]$, on a

$$|P(x)| = x^{p-1}(|x-1||x-2| \ldots |x-n|)^p \leq n^{p-1}(n^n)^p$$

On en déduit que, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$,

$$|I(k)| \leq e^n n^{p-1}(n^n)^p$$

puis que, pour tout entier $p \in \mathbb{N}$,

$$|J| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k| e^n n^{p-1}(n^n)^p$$

Soit $a = \max\left(\sum_{k=0}^{n} |a_k| e^n ; n \right)$. On a alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$|J| \leq a^p (n^n)^p \leq (an^n)^p$$

c'est-à-dire $|J| \leq C^p$, avec $C = an^n$.

Mais nous avons vu dans la question précédente que, si p est un entier premier assez grand, alors J est non nul et divisible par $(p-1)!$. On en déduit que $|J| \geq (p-1)!$ et a fortiori, $C^p \geq (p-1)!$. Or on a $\lim_{p\infty} \frac{C^p}{(p-1)!} = 0$. Pour p assez grand, on a donc $C^p < (p-1)!$. D'où la contradiction cherchée. Il ne peut pas exister des entiers $a_0, a_1, \ldots, a_n$ appartenant à $\mathbb{Z}$ tels que $a_0 \neq 0$ et $a_0 + a_1 e + \ldots + a_n e^n = 0$.

On en déduit que e est transcendant. En effet, si e est algébrique sur $\mathbb{Q}$, il existe $P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $P(e) = 0$. En multipliant P par un entier, on peut supposer que $P \in \mathbb{Z}[X]$. Il existe donc des entiers $a_0, a_1, \ldots, a_n$ appartenant à $\mathbb{Z}$ tels que $a_0 + a_1 e + \ldots + a_n e^n = 0$. On peut supposer que $a_0 \neq 0$, car si l'ordre de 0 comme racine de P est p, on divise P par X^p.