Corrigé de l'épreuve d'analyse et de probabilités
Concours Externe d'Agrégation Mathématiques 2015
abdelbaki.attioui@ gmail.com

PARTIE I: Polynômes d'Hermite.

1.(a) Pour tout $u \in \mathbb{R}$, $e^u = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^k}{k!}$. Il en découle que $e^{-t^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-t^2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k$ où $a_{2k+1} = 0$ et $a_{2k} = \frac{(-1)^k}{k!}$. C'est le DSE en $t = 0$ de la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ en outre son rayon de convergence $R_a = +\infty$ par le lemme d'Abel puisque pour tout $r > 0$, $|a_k r^k| \leqslant \frac{r^k}{k!}$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{r^k}{k!}$ converge dont la somme égal à e^r. De même, pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, $e^{2xt} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2xt)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k t^k$ où $b_k = \frac{(2x)^k}{k!}$ est le DSE en $t = 0$ de la fonction $t \mapsto e^{2xt}$ et $R_b = +\infty$.

1.(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\psi(t) = \varphi(x - t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x-t)^2} = \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} e^{2xt} = \varphi(x) e^{-t^2} e^{2xt}.$$

Alors ψ est DES en 0 comme produit de deux fonctions DES en 0.

1.(c) Avec le notations précédentes, pour tout $x, t \in \mathbb{R}$,

$$\psi(t) = \varphi(x) \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k . \sum_{k=0}^{+\infty} b_k t^k = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k t^k$$

où $c_k = \varphi(x) \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$ (produit de Cauchy). Par ailleurs, $R_c = +\infty$ et ψ est C^∞ sur $\mathbb{R}$. Par suite, cette série coïncide avec le développement en série de Taylor de ψ en 0 et alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $c_k = \frac{\psi^{(k)}(0)}{k!} = (-1)^k \frac{\varphi^{(k)}(x)}{k!}$. Ce qui donne, $\forall\, (x, t) \in \mathbb{R}^2$,

$$e^{2xt - t^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{c_k}{\varphi(x)} t^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\varphi^{(k)}(x)}{k! \varphi(x)} t^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{H_k(x)}{k!} t^k$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Le rayon de convergence de la série entière (1) étant infini, il en est de même que la série des dérivées dont la convergence est uniforme sur tout intervalle de la forme $]-r, r[$, $r > 0$. Le théorème de dérivation sous le signe somme assure que $\forall\, t \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{H_k(x)}{(k-1)!} t^{k-1} = 2(x - t) e^{2xt - t^2}$$

ou encore et le fait que $H_0(x) = 1$ et $H_1(x) = 2x$,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{H_{k+1}(x) - 2x H_k(x)}{k!} t^k = -2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{H_{k-1}(x)}{(k-1)!} t^k$$

Donc, $\forall\, k \geqslant 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$,

$$H_{k+1}(x) = 2x H_k(x) - 2k H_{k-1}(x)$$

3. On a $deg(H_0) = 0$ et $deg(H_1) = 1$, une récurrence forte sur k et la relation (2) montrent que $deg(H_k) = k$. On désigne par d_k le coefficient dominant de H_k , on a déjà $d_0 = 1$ et $d_1 = 2$. D'après (2), pour $k \geqslant 1$, $d_{k+1} = 2d_k$ alors $d_k = 2^k$.

4. Soit $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x \neq y$, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. L'égalité est vraie pour $n = 1$ car

$$H_1(x) H_0(y) - H_0(x) H_1(y) = 2(x - y) = 2(x - y) K_1(x, y)$$

Supposons que c'est vraie pour un entier $n \geqslant 1$.

$$\begin{aligned}
K_{n+1}(x,y) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{H_k(x)H_k(y)}{2^k k!} \\
&= \frac{H_n(x)H_n(y)}{2^n n!} + K_n(x,y) \\
&= \frac{H_n(x)H_n(y)}{2^n n!} + \frac{1}{2^n(n-1)!}\left(\frac{H_n(x)H_{n-1}(y)-H_{n-1}(x)H_n(y)}{x-y}\right) \text{, par Hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{1}{2^{n+1}n!(x-y)}\left(2xH_n(x)H_n(y) - 2yH_n(x)H_n(y) + 2nH_n(x)H_{n-1}(y) - 2nH_{n-1}(x)H_n(y)\right) \\
&= \frac{1}{2^{n+1}n!(x-y)}\left(\left(2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)\right)H_n(y) - H_n(x)\left(2yH_n(y) - 2nH_{n-1}(y)\right)\right) \\
&= \frac{1}{2^{n+1}n!(x-y)}\left(H_{n+1}(x)H_n(y) - H_n(x)H_{n+1}(y)\right) \text{, d'après (2)}
\end{aligned}$$

5. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$, il est bien connu que

$$\lim_{|t|\to+\infty} P(t)\varphi^{(k)}(t) = \lim_{|t|\to+\infty} (-1)^k P(t)H_k(t)\varphi(t) = 0$$

On en déduit par intégration par parties succéssives que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi^{(n)}(t)P(t)dt = (-1)^n \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)P^{(n)}(t)dt$$

6. Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ avec $m \leqslant n$, par définition de H_n,

$$\int_{\mathbb{R}} H_n(t)H_m(t)\varphi(t)dt = (-1)^n \int_{\mathbb{R}} H_m(t)\varphi^{(n)}(t)dt$$

D'après ce qui précéde, $\int_{\mathbb{R}} H_n(t)H_m(t)\varphi(t)dt = \int_{\mathbb{R}} H_m^{(n)}(t)\varphi(t)dt$. Comme $deg(H_m) = m$ alors $H_m^{(n)} = 0$ si $m < n$ et $H_n^{(n)} = 2^n n!$ car le coefficient dominant de H_n est 2^n. Par ailleurs, φ est la densité de la loi de gaussienne son intégrale sur $\mathbb{R}$ vaut 1 d'où le résultat.

7. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par récurrence forte sur k. Pour $k = 0$, en effectuant le changement de variable $s\sqrt{2} = t$, d'après l'indication :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/4}e^{-ixt}dt = \sqrt{2}\int_{\mathbb{R}} e^{-s^2/2}e^{-ixs\sqrt{2}}ds = 2\sqrt{\pi}e^{-x^2}$$

Donc, $\frac{e^{x^2}}{2\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/4}e^{-ixt}dt = 1 = H_0(x)$. Pour pouvoir utiliser (2), on doit vérifier l'égalité aussi pour $k = 1$. Par intégration par parties, pour tout $R > 0$,

$$\int_{-R}^{R} te^{-t^2/4}e^{-ixt}dt = \left[-2e^{-t^2/4}e^{-ixt}\right]_{-R}^{R} - 2ix\int_{-R}^{R} e^{-t^2/4}e^{-ixt}dt$$

Le terme entre crochets tend vers 0 quand $|t| \to +\infty$ car $\left|e^{-t^2/4}e^{-ixt}\right| = e^{-t^2/4}$. Ainsi,

$$\int_{\mathbb{R}} te^{-t^2/4}e^{-ixt}dt = -2ix\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/4}e^{-ixt}dt = -4ix\sqrt{\pi}e^{-x^2}$$

Donc,

$$\frac{ie^{x^2}}{2\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} te^{-t^2/4}e^{-ixt}dt = 2x = H_1(x)$$

On suppose que l'égalité est vraie pour tout $0 \leqslant h \leqslant k$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
H_{k+1}(x) &= 2xH_k(x) - 2kH_{k-1}(x) \text{ , d'après l'égalité (2)} \\
&= \frac{i^k xe^{x^2}}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} t^k e^{-t^2/4}e^{-ixt}dt - \frac{i^{k-1}ke^{x^2}}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} t^{k-1}e^{-t^2/4}e^{-ixt}dt \text{ , par hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{i^{k+1}e^{x^2}}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} t^k e^{-t^2/4}(-ix)e^{-ixt}dt + \frac{i^{k+1}e^{x^2}}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} kt^{k-1}e^{-t^2/4}e^{-ixt}dt \text{ , par intégration par parties} \\
&= \frac{i^{k+1}e^{x^2}}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} -\left(kt^{k-1} - t^{k+1}/2\right)e^{-t^2/4}e^{-ixt}dt + \frac{i^{k+1}e^{x^2}}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} kt^{k-1}e^{-t^2/4}e^{-ixt}dt \\
&= \frac{i^{k+1}e^{x^2}}{2\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} t^{k+1}e^{-t^2/4}e^{-ixt}dt
\end{aligned}$$

8. Soit $x \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2n}}\right) = \frac{i^n e^{x^2/2n}}{2\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} t^n e^{-t^2/4}e^{-ixt/\sqrt{2n}}dt$$

En posant $t = s\sqrt{2n}$, l'égalité devient

$$H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2n}}\right) = \frac{i^n e^{x^2/2n}\sqrt{2n}^{n+1}}{2\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} s^n e^{-ns^2/2} e^{-ixs} ds$$

Dans le but d'utiliser la méthode de Laplace, ceci invite à poser $f(t) = e^{-ixt}$ et $g(t) = \ln t - t^2/2$ pour $t > 0$. Alors, $g'(t) = 1/t - t$ et g' ne s'annule qu'au point $t_0 = 1$, $\max\limits_{\mathbb{R}^+} g = g(1) = -1/2$ et $g''(1) = -2 < 0$. Alors,

$$\int_{\mathbb{R}^+} s^n e^{-ns^2/2} e^{-ixs} ds = \sqrt{\pi} e^{-ix} \frac{e^{-n/2}}{\sqrt{n}} + \circ\left(\frac{e^{-n/2}}{\sqrt{n}}\right)$$

De même,

$$\int_{\mathbb{R}^-} s^n e^{-ns^2/2} e^{-ixs} ds = (-1)^n \int_{\mathbb{R}^+} s^n e^{-ns^2/2} e^{ixs} ds = (-1)^n \sqrt{\pi} e^{ix} \frac{e^{-n/2}}{\sqrt{n}} + \circ\left(\frac{e^{-n/2}}{\sqrt{n}}\right)$$

Donc, en tenant compte du fait que $e^{x^2/2n}$ tend vers 1,

$$H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2n}}\right) = \frac{i^n \sqrt{2n}^{n+1}}{2\sqrt{\pi}} \left(\sqrt{\pi} e^{-ix} \frac{e^{-n/2}}{\sqrt{n}} + (-1)^n \sqrt{\pi} e^{ix} \frac{e^{-n/2}}{\sqrt{n}} + \circ\left(\frac{e^{-n/2}}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

ou encore

$$H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2n}}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{2n}{e}\right)^{n/2} i^n \frac{(-1)^n e^{ix} + e^{-ix}}{2} + \circ\left(\left(\frac{2n}{e}\right)^{n/2}\right)$$

PARTIE II: Projection orthogonale sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

1. Pour $x \in E$, l'expressin du projecté orthogonal de x sur F est donné par $p_F(x) = \sum\limits_{k=1}^{p} < e_k, x > e_k$.

2. La famille $(\frac{1}{\sqrt{2^k k!}} H_k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ étant formée de polynômes de degrés échelonnés, est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et d'après I.7, elle en est une base orthonormale pour le produit scalaire de $L^2(\mathbb{R}, \mu)$. Alors, pour tous $f \in L^2(\mathbb{R}, \mu)$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$\Pi_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2^k k!}} H_k(y) f(y) \varphi(y) dy \frac{1}{\sqrt{2^k k!}} H_k(x) = \int_{\mathbb{R}} K_n(x, y) f(y) \varphi(y) dy$$

3. Soit $(x, z) \in \mathbb{R}^2$, dans le calcul qui suit les égalités de I.7. sont utilisées,

$$\int_{\mathbb{R}} K_n(x, y) K_n(y, z) \varphi(y) dy = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{h=0}^{n-1} \frac{H_k(x) H_h(z)}{2^{k+h} k! h!} \int_{\mathbb{R}} H_k(y) H_h(y) \varphi(y) dy = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{H_k(x) H_k(z)}{2^k k!} = K_n(x, z)$$

$$\int_{\mathbb{R}} K_n(x, x) \varphi(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\mathbb{R}} \frac{H_k(x) H_k(x)}{2^k k!} \varphi(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$$

4.(a) Pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant n$,

$$K_n(t_i, t_j) = \sum_{k=1}^{n} \frac{H_{k-1}(t_i) H_{k-1}(t_j)}{2^{k-1}(k-1)!} = L_i.{}^t L_j$$

où L_i est la iéme ligne de B. Donc, $A = B.{}^t B$. Les polynômes H_k , $0 \leqslant k \leqslant n-1$ sont échelonnés en degré, $deg(H_k) = k$ et H_k de coefficient dominant 2^k. On peut par des opérations élémentaires sur les colonnes (ajouter une combinaison linéaire des $H_0, H_1, \cdots, H_{k-1}$ à H_k) pour obtenir le monôme $2^k X^k$. Comme ces opérations laissent le déterminant invariable on aura alors

$$det\left((H_{i-1}(t_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}\right) = det\left((2^{i-1} t_j^{i-1})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}\right).$$

Ensuite, par multilinéarité factoriser tous les termes de la ligne i par 2^{i-1} pour obtenir

$$det\left((H_{i-1}(t_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}\right) = \prod_{k=1}^{n} 2^{k-1} det\left((t_j^{i-1})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}\right) = 2^{n(n-1)/2} det\left((t_j^{i-1})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}\right).$$

4.(b) D'après ce qui précéde, $det((K_n(t_i,t_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}) = det(A) = det(B)^2$ et

$$\begin{array}{rcl} det(B) & = & \prod_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2^{k-1}(k-1)!}} det\left((H_{i-1}(t_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}\right) \\ & = & \prod_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2^{k-1}(k-1)!}} 2^{n(n-1)/2} det\left((t_j^{i-1})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\right) \\ & = & \sqrt{n!D_n} det\left((t_j^{i-1})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\right) = \sqrt{n!D_n} \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(t_j-t_i) \end{array}$$

Le dernier déterminant est celui de Vandermonde dont la valeur est bien connue. On en déduit que

$$det((K_n(t_i,t_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}) = n!q_n(t_1,\cdots,t_n).$$

5. En utilisant l'expression théorique du determinant on a :

$$det\left((H_{i-1}(t_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}\right) = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n H_{\sigma(i)-1}(t_i)$$

Alors,

$$det\left((H_{i-1}(t_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}\right)^2 = \sum_{\sigma,\tau\in S_n} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau) \prod_{i=1}^n H_{\sigma(i)-1}(t_i)H_{\tau(i)-1}(t_i)$$

C'est une somme de fonctions à variables séparées alors,

$$\begin{array}{rcl} \int_{\mathbb{R}^n} det\left((H_{i-1}(t_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}\right)^2 d\mu(t_1)\cdots d\mu(t_n) & = & \displaystyle\sum_{\sigma,\tau\in S_n} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau) \prod_{i=1}^n \left(\int_{\mathbb{R}} H_{\sigma(i)-1}(t_i)H_{\tau(i)-1}(t_i)d\mu(t_i)\right) \\ & = & \displaystyle\sum_{\sigma,\tau\in S_n} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau) \prod_{i=1}^n \left\langle H_{\sigma(i)-1}, H_{\tau(i)-1}\right\rangle \\ & = & \displaystyle\sum_{\sigma\in S_n} \prod_{i=1}^n \left\langle H_{\sigma(i)-1}, H_{\sigma(i)-1}\right\rangle, \text{ par orthogonalité des } H_k \\ & = & \displaystyle\sum_{\sigma\in S_n} \prod_{i=1}^n 2^{\sigma(i)-1}(\sigma(i)-1)!, \text{ par I.7} \\ & = & 2^{n(n-1)/2}\prod_{k=1}^n k! \\ & = & 2^{n(n-1)}/D_n \end{array}$$

6.

$$\begin{array}{rcl} \int_{\mathbb{R}^n} q_n(t_1,\cdots,t_n)d\mu(t_1)\cdots d\mu(t_n) & = & \frac{1}{n!}\int_{\mathbb{R}^n} det(A)d\mu(t_1)\cdots d\mu(t_n) \text{ , par 4.(b)} \\ & = & \frac{1}{n!}\int_{\mathbb{R}^n} det(B)^2 d\mu(t_1)\cdots d\mu(t_n) \text{ , par 4.(a)} \\ & = & \frac{1}{2^{n(n-1)/2}\prod_{k=1}^n k!}\int_{\mathbb{R}^n} det\left((H_{i-1}(t_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}\right)^2 d\mu(t_1)\cdots d\mu(t_n) \text{ , par 4.(b)} \\ & = & \frac{D_n}{2^{n(n-1)}}\int_{\mathbb{R}^n} det\left((H_{i-1}(t_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}\right)^2 d\mu(t_1)\cdots d\mu(t_n) \\ & = & 1 \quad \text{, par 5.} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(t_j-t_i)^2 e^{-(t_1^2+\cdots+t_n^2)}dt_1\cdots dt_n & = & \frac{\pi^{n/2}}{D_n}\int_{\mathbb{R}^n} q_n(t_1,\cdots,t_n)d\mu(t_1)\cdots d\mu(t_n), \text{ par définition de } q_n \text{ et } d\mu \\ & = & \frac{\pi^{n/2}}{D_n} = \pi^{n/2}2^{-n(n-1)/2}\prod_{k=1}^n k! \end{array}$$

7. Soit m tel que $2\leqslant m\leqslant n$ et $(t_1,\cdots,t_{m-1})\in\mathbb{R}^{m-1}$. Pour $1\leqslant k\leqslant m$, soit A_k la matrice, de taille $m-1$, obtenue de la matrice $(K_n(t_i,t_j))_{1\leqslant i,j\leqslant m}$ en supprimant la ligne k et la colonne m. Alors, en développant suivant la dernière colonne on obtient

$$det(K_n(t_i,t_j))_{1\leqslant i,j\leqslant m}) = \sum_{k=1}^m (-1)^{m+k}K_n(t_k,t_m)det(A_k)$$

On a $det(A_m) = det(K_n(t_i,t_j))_{1\leqslant i,j\leqslant m-1})$. Afin de se débarasser de la variable t_m des autres sous déterminants, on développe chacun suivant la dernière ligne $m-1$ où figure cette variable. On aura alors, pour $1\leqslant k\leqslant m-1$,

$$det(A_k) = \sum_{h=1}^{m-1}(-1)^{m+h-1}K_n(t_m,t_h)det(A_{k,h})$$

Où $A_{k,h}$ est la matrice, de taille $m-2$, $(K_n(t_i,t_j))_{1\leqslant i,j\leqslant m-1, i\neq k, j\neq h}$. En combinant toutes ces égalités et en tenant compte de II.3.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} det(K_n(t_i,t_j))_{1\leqslant i,j\leqslant m} d\mu(t_m) &= ndet(A_m) + \sum_{k=1}^{m-1}(-1)^{m+k}\sum_{h=1}^{m-1}(-1)^{m+h-1}det(A_{k,h})K_n(t_k,t_h)\\
&= ndet(A_m) + \sum_{k=1}^{m-1}\sum_{h=1}^{m-1}(-1)^{k+h-1}K_n(t_k,t_h)det(A_{k,h})\\
&= ndet(A_m) - \sum_{h=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{m-1}(-1)^{k+h}K_n(t_k,t_h)det(A_{k,h})\\
&= ndet(A_m) - \sum_{h=1}^{m-1} det(A_m) = (n-m+1)det(K_n(t_i,t_j))_{1\leqslant i,j\leqslant m-1})
\end{aligned}$$

PARTIE III: Holomorphie.

1.(a) Soit $f:\mathbb{C}^*\to\mathbb{C}$ définie par: $f(z)=1-2/z^2$. La fonction f est holomrphe sur $\mathbb{C}^*$. Pour démontrer que Φ est holomlorphe sur $\mathbb{C}\setminus[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$ (comme composée et produit de fonctions holomorphes) il suffit de vérifier que l'image par f de $\mathbb{C}\setminus[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$ est contenue dans $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}-$. Soit $z\in\mathbb{C}\setminus[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$. Si $z\in\mathbb{R}$, alors $f(z)\in\mathbb{R}$ et $f(z)=1-2/z^2>0$. Si $z\notin\mathbb{R}$, alors $f(z)\in\mathbb{R}$ ssi $z\in i\mathbb{R}$ dans ce cas, $z^2\in\mathbb{R}-$ et $f(z)>0$. Ainsi, dans tous les cas $f(z)\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}-$. D'où le résultat.
Soit $x\in\mathbb{R}\setminus[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$, la restriction du log à $\mathbb{R}_+^*$ conïcide avec le log neperien $\ln$ alors,

$$\Phi(x)=x\exp\left(\frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{2}{x^2}\right)\right)=x\exp\left(\ln\left(\frac{\sqrt{x^2-2}}{|x|}\right)\right)=\frac{x\sqrt{x^2-2}}{|x|}=\begin{cases}\sqrt{x^2-2} & \text{si } x>\sqrt{2}\\ -\sqrt{x^2-2} & \text{si } x<-\sqrt{2}\end{cases}$$

Noter que pour $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}-$, $\log(z)=\ln|z|+iArg(z)$ où Arg est la fonction argument principale à valeurs dans $]-\pi,\pi[$. Une expression de telle fonction est donnée par : $Arg(z)=2\text{arctan}\frac{\text{Im}(z)}{\text{Re}(z)+|z|}$. Alors, pour $z\in\mathbb{C}\setminus[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$,

$$\Phi(z)=\frac{z}{|z|}\sqrt{|z^2-2|}e^{\frac{i}{2}Arg(1-2/z^2)} \qquad [*]$$

1.(b). Soit $z\in\mathbb{C}$, la fonction $g:\omega\mapsto\frac{\Phi(\omega)-\omega}{\omega-z}$ est holomorphe sur $\{|\omega|>\max(\sqrt{2},|z|)\}$. D'après un lemme de Jordan, pour montrer que $\lim_{R\to+\infty}\int_{C(O,R)}g(\omega)d\omega=0$, il suffit de montrer que $\lim_{|\omega|\to+\infty}|\omega g(\omega)|=0$. On utilisera, les inégalités déduitent par exemple des expressions en séries entières: $|\exp(\xi)-1|\leqslant e^{|\xi|}-1$, pour tout $\xi\in\mathbb{C}$ et $|\log(1-\xi)|\leqslant-\ln(1-|\xi|)$, pour $|\xi|<1$. Pour $|\omega|>\sqrt{2}$,

$$\begin{aligned}
|\omega g(\omega)| &= \frac{|\omega|^2}{|\omega-z|}\left|\exp\left(\tfrac{1}{2}\log\left(1-\tfrac{2}{\omega^2}\right)\right)-1\right|\\
&\leqslant \frac{|\omega|^2}{|\omega-z|}\left(\exp\left(-\tfrac{1}{2}\log\left(1-\tfrac{2}{|\omega|^2}\right)\right)-1\right)\\
&= \frac{|\omega|^2}{|\omega-z|}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2}{|\omega|^2}}}-1\right)\sim\frac{1}{|\omega|} \quad , \quad |\omega|\to+\infty
\end{aligned}$$

2. Soit $\Gamma_{R,\varepsilon}$ le contour donné en indication avec $R>|z|$ et $\varepsilon>0$ tel que z soit à l'extérieure de K_ε où K_ε est le rectangle de sommets $\pm(\sqrt{2}+\varepsilon+i\varepsilon)$, $\pm(\sqrt{2}+\varepsilon-i\varepsilon)$ parcouru dans le sens positif. Ceci est possible vu que $z\in\mathbb{C}\setminus[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$. Noter aussi que $d(z,K_\varepsilon)>0$. La fonction $\omega\mapsto\frac{\Phi(\omega)}{\omega-z}$ est holomorphe à l'interieur de $\Gamma_{R,\varepsilon}$ sauf au point z qui est en un pôle simple, d'après la formule intégrale de Cauchy ou le théorème des résidus on a:

$$\int_{\Gamma_{R,\varepsilon}}\frac{\Phi(\omega)}{\omega-z}d\omega=2i\pi\Phi(z)$$

En d'autres termes,

$$2i\pi\Phi(z)=-\int_{K_\varepsilon}\frac{\Phi(\omega)}{\omega-z}d\omega+\int_{C(O,R)}\frac{\Phi(\omega)}{\omega-z}d\omega=-\int_{K_\varepsilon}\frac{\Phi(\omega)}{\omega-z}d\omega+\int_{C(O,R)}\frac{\Phi(\omega)-\omega}{\omega-z}d\omega+\int_{C(O,R)}\frac{\omega}{\omega-z}d\omega$$

Par aillleurs,

$$\int_{C(O,R)}\frac{\omega}{\omega-z}d\omega=\int_{C(O,R)}d\omega+z\int_{C(O,R)}\frac{d\omega}{\omega-z}=2i\pi z$$

Alors, d'après 1.(b) et quand $R \to +\infty$, on obtient

$$\int_{K_\varepsilon} \frac{\Phi(\omega)}{\omega - z} d\omega = 2i\pi(z - \Phi(z)) = 2i\pi G(z)$$

On pose $a = \sqrt{2} + \varepsilon$, on a:

$$\int_{K_\varepsilon} \frac{\Phi(\omega)}{\omega - z} d\omega = \int_a^{-a} \frac{\Phi(t + i\varepsilon)}{t + i\varepsilon - z} dt + \int_\varepsilon^{-\varepsilon} \frac{\Phi(-a + it)}{-a + it - z} dt + \int_{-a}^a \frac{\Phi(t - i\varepsilon)}{t - i\varepsilon - z} dt + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\Phi(a + it)}{a + it - z} dt$$

Pour $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, en utilisant l'expression de Φ [*] on a:

$$\left| \frac{\Phi(\pm a + it)}{\pm a + it - z} \right|^2 = \frac{\left|(\pm a + it)^2 - 2\right|}{|\pm a + it - z|^2} = \frac{\left|a^2 - t^2 \pm 2iat - 2\right|}{|\pm a + it - z|^2} \leqslant \frac{2\varepsilon^2 + 2\sqrt{2}\varepsilon + 2a\varepsilon}{d(z, K_\varepsilon)^2}$$

Comme, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} d(z, K_\varepsilon) = d(z, [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]) > 0$ alors, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \displaystyle\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\Phi(\pm a + it)}{\pm a + it - z} dt = 0.$
Pour $\sqrt{2} \leqslant |t| \leqslant a$,

$$\left| \frac{\Phi(t \pm i\varepsilon)}{t \pm i\varepsilon - z} \right|^2 = \frac{\left|t^2 - \varepsilon^2 \pm 2i\varepsilon t - 2\right|}{|t \pm i\varepsilon - z|^2} \leqslant \frac{t^2 - 2 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon a}{d(z, K_\varepsilon)^2} \leqslant \frac{2\varepsilon^2 + 2\sqrt{2}\varepsilon + 2\varepsilon a}{d(z, K_\varepsilon)^2}$$

Alors, même argument que ci-dessus, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \displaystyle\int_{-a}^{-\sqrt{2}} \frac{\Phi(t \pm i\varepsilon)}{t \pm i\varepsilon - z} dt = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_{\sqrt{2}}^{a} \frac{\Phi(t \pm i\varepsilon)}{t \pm i\varepsilon - z} dt = 0$. Il reste à étudier la limite de l'intégrale $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{\Phi(t \pm i\varepsilon)}{t \pm i\varepsilon - z} dt$, quand ε tend vers 0.
Pour $0 < |t| < \sqrt{2}$, et $0 < \varepsilon < \sqrt{2 - t^2}$ de sorte que $|t \pm i\varepsilon| < \sqrt{2}$, on a d'après [*] et ensuite par continuité:

$$\frac{\Phi(t \pm i\varepsilon)}{t \pm i\varepsilon - z} = \frac{t \pm i\varepsilon}{t \pm i\varepsilon - z} \exp\left(\frac{1}{2} \log\left(1 - 2(t \pm i\varepsilon)^{-2}\right)\right)$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\Phi(t \pm i\varepsilon)}{t \pm i\varepsilon - z} = \frac{t}{t - z} \exp\left(\frac{1}{2} \log\left(1 - 2t^{-2}\right)\right) = \frac{t\sqrt{2 - t^2}}{|t|(t - z)} e^{\frac{i}{2} Arg(1 - 2t^{-2})} = i \frac{t}{|t|} \frac{\sqrt{2 - t^2}}{t - z}$$

La fonction $\omega \to \frac{\Phi(\omega)}{\omega - z}$ est continue sur le compact K_ε. Alors, d'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{\Phi(t \pm i\varepsilon)}{t \pm i\varepsilon - z} dt = i \int_0^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2 - t^2}}{t - z} dt - i \int_{-\sqrt{2}}^0 \frac{\sqrt{2 - t^2}}{t - z} dt$$

Donc, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$,

$$2i\pi G(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\sqrt{2}}^{-\sqrt{2}} \frac{\Phi(t + i\varepsilon)}{t + i\varepsilon - z} dt + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{\Phi(t - i\varepsilon)}{t - i\varepsilon - z} dt = 2i \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2 - t^2}}{z - t} dt$$

$$G(z) = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{2 - t^2}}{z - t} dt$$

3.(a) Soit K un compact de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Par hypothèse, la suite (H_n) coverge simplement sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ alors pour tout $z \in K$, la suite $(H_n(z))$ est bornée. D'autre part, pour tous $z, z' \in K$,

$$|H_n(z) - H_n(z')| = \left| \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{z - t} - \frac{1}{z' - t} \right) d\sigma_n(t) \right| \leqslant |z - z'| \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{d(t, K)^2} d\sigma_n(t)$$

Alors, la suite (H_n) est uniformément équicontinue sur K. D'après le théorème d'Ascoli, on peut en extraire une sous suite $(H_{\phi_K(n)})$ convergente vers une fonction h_K dans $C(K)$. En considérant une suite exaustive de compacts (K_n) de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, on définit sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ l'application h par : $h(z) = h_{K_n}(z)$ si $z \in K_n$. Alors, par construction, $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$ et (H_n) converge simplement vers h sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Ainsi, la suite (H_n) admet une unique valeur d'adhérence à savoir h dans $\mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$. Donc, elle converge dans $\mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$.

3.(b). Par hypothèse et lorsque $n \to +\infty$, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\operatorname{Im}(z)\, h(z) \leqslant 0$ et $h(z)^2 - 2zh(z) + 2 = 0$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $h(ix) = ix - ix\sqrt{1 + 2/x^2} = G(ix)$. Par le principe de prolongement analytique, $h = G$ sur le demi plan supérieur $\{\operatorname{Im}(z) > 0\}$. De la même manière, $h = G$ sur le demi plan inférieur $\{\operatorname{Im}(z) < 0\}$. Donc,

$h=G$ sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. .

PARTIE IV: Intégration et probabilité sur $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$.

1.. Soient X_1,X_2,X_3,X_4 des variables aléatoires réelles définies sur un espace probalisé (Ω,P). On suppose que ces v.a sont mutuellemnt indépendantes et qu'elles suivent la même loi normale $\mathcal{N}(0,\frac{1}{2})$. Alors, pour tous I_1,I_2,I_3,I_4 des intervalles de $\mathbb{R}$,

$$\left(X=\begin{pmatrix} X_1 & \frac{X_2+iX_3}{\sqrt{2}}\\ \frac{X_2-iX_3}{\sqrt{2}} & X_4\end{pmatrix}\in U_{I_1,I_2,I_3,I_4}\right)=(X_1\in I_1)\cap\left(X_2\in\sqrt{2}I_2\right)\cap\left(X_3\in\sqrt{2}I_3\right)\cap(X_4\in I_4)$$

Par suite,

$$\begin{array}{rcl}P(X\in U_{I_1,I_2,I_3,I_4}) &=& P(X_1\in I_1)P(X_2\in\sqrt{2}I_2)P(X_3\in\sqrt{2}I_3)P(X_4\in I_4)\qquad(*)\\ &=& \int_{I_1}\varphi(x_1)dx_1\int_{\sqrt{2}I_2}\varphi(x_2)dx_2\int_{\sqrt{2}I_3}\varphi(x_3)dx_3\int_{I_4}\varphi(x_4)dx_4\\ &=& \frac{1}{\pi^2}\int_{I_1}e^{-x_1^2}dx_1\int_{\sqrt{2}I_2}e^{-x_2^2}dx_2\int_{\sqrt{2}I_3}e^{-x_3^2}dx_3\int_{I_4}e^{-x_4^2}dx_4\\ &=& \frac{2}{\pi^2}\int_{I_1}e^{-x_1^2}dx_1\int_{I_2}e^{-2x_2^2}dx_2\int_{I_3}e^{-2x_3^2}dx_3\int_{I_4}e^{-x_4^2}dx_4\\ &=& \frac{2}{\pi^2}\int_{I_1\times I_2\times I_3\times I_4}e^{-(x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+x_4^2)}dx_1dx_2dx_3dx_4\\ &=& \frac{2}{\pi^2}\int_{\mathbb{R}^4}1_{I_1\times I_2\times I_3\times I_4}(x_1,x_2,x_3,x_4)e^{-(x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+x_4^2)}dx_1dx_2dx_3dx_4\\ &=& \frac{2}{\pi^2}\int_{\mathbb{R}^4}g((x_1,x_2,x_4),x_3)(dx_1dx_2dx_4)dx_3\qquad(**)\\ &=& \frac{2}{\pi^2}\int_{\mathcal{H}_2(\mathbb{C})}1_{U_{I_1,I_2,I_3,I_4}}(M)e^{-Tr(M^2)}d\omega_2(M)\\ &=& \frac{2}{\pi^2}\int_{U_{I_1,I_2,I_3,I_4}}e^{-Tr(M^2)}d\omega_2(M)\end{array}$$

Dans l'égalité (**) on a posé, pour tout $(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4$, $M=\begin{pmatrix} x_1 & x_2+ix_3\\ x_2-ix_3 & x_4\end{pmatrix}$. Alors, $M\in\mathcal{H}_2(\mathbb{C})$ et avec les notations complémentaires, $M=M_{u,v}$ où $u=(x_1,x_2,x_4)$ et $v=x_3$ et $g(u,v)=1_{U_{I_1,I_2,I_3,I_4}}(M_{u,v})f(M_{u,v})$ où $f:\mathcal{H}_2(\mathbb{C})\to\mathbb{R}^+$ définie par $f(M)=e^{-Tr(M^2)}=e^{-(x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+x_4^2)}$ qui est mesurable positive.
Inversement, si on a ces égalités pour tous I_1,I_2,I_3,I_4 intervalles de $\mathbb{R}$ alors, on a d'après l'égalité (*) les variables aléatoires X_1,X_2,X_3,X_4 sont mutuellemnt indépendantes. D'autre part, en prenant tous les intervalles I_1,I_2,I_3,I_4 égaux à $\mathbb{R}$ sauf un I_k tout en restant variable, on déduit de ces égalités que la v.a X_k suit la loi normale $\mathcal{N}(0,\frac{1}{2})$.

2. Le cas $n=2$ se déduit de la question précédente car

$$\mathcal{H}_2(\mathbb{C})=U_{\mathbb{R},\mathbb{R},\mathbb{R},\mathbb{R}}\quad\text{et}\quad 1=P(X\in\mathcal{H}_2(\mathbb{C}))=\frac{2}{\pi^2}\int_{\mathcal{H}_2(\mathbb{C})}e^{-Tr(M^2)}d\omega_2(M)$$

Soit $n\geqslant 2$, en s'inspirant du cas $n=2$, on considère une famille de n^2 variables aléatoires réelles $(X_k)_{1\leqslant k\leqslant n^2}$ définies sur un même espace probalisé (Ω,P) et on suppose que ces v.a sont mutuellemnt indépendantes et qu'elles suivent la même loi normale $\mathcal{N}(0,\frac{1}{2})$. De manière analogue, on pose

$$X=(X_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\quad\text{avec}\quad X_{i,j}=\begin{cases} X_{j^2} & \text{si } i=j\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(X_{(j-1)^2+2i-1}+iX_{(j-1)^2+2i}\right) & \text{si } i<j\\ \overline{X_{j,i}} & \text{si } j<i\end{cases}$$

X est donc une variable aléatoire sur (Ω,P) à valeurs dans $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$. Pour tout $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n^2}\in\mathbb{R}^{n^2}$, on pose

$$M=(m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\quad\text{avec}\quad m_{i,j}=\begin{cases} x_{j^2} & \text{si } i=j\\ x_{(j-1)^2+2i-1}+ix_{(j-1)^2+2i} & \text{si } i<j\\ \overline{m_{j,i}} & \text{si } j<i\end{cases}$$

Alors, $M\in\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ et le jème terme de la diagonale de M^2 est donné par:

$$\sum_{i=1}^n m_{j,i}m_{i,j}=\sum_{i=1}^n|m_{i,j}|^2=\sum_{i=1}^{j-1}\left(x_{(j-1)^2+2i-1}^2+x_{(j-1)^2+2i}^2\right)+x_{j^2}^2+\sum_{i=j+1}^{n}\left(x_{(i-1)^2+2j-1}^2+x_{(i-1)^2+2j}^2\right)$$

Par suite,

$$\begin{array}{rcl}Tr(M^2) &=& \sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_{(j-1)^2+2i-1}^2+\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_{(j-1)^2+2i}^2+\sum\limits_{j=1}^n x_{j^2}^2+\sum\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}x_{(i-1)^2+2j-1}^2+\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_{(i-1)^2+2j}^2\\ &=& 2\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_{(j-1)^2+2i-1}^2+2\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_{(j-1)^2+2i}^2+\sum\limits_{j=1}^n x_{j^2}^2\\ &=& 2\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n^2,\sqrt{k}\notin\mathbb{N}}x_k^2+\sum\limits_{j=1}^n x_{j^2}^2\end{array}$$

Car pour tout $1 < k < n^2$ avec $\sqrt{k} \notin \mathbb{N}$, soit $j = \left[\sqrt{k}\right] + 1$ alors $(j-1)^2 < k < j^2 = (j-1)^2 + 2j - 1$. Ainsi, il existe un couple unique (i, j) tel que $k = (j-1)^2 + 2i$ ou $k = (j-1)^2 + 2i - 1$ avec $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Avec les notations complémentaires, $M = M_{u,v}$ avec

$$u = (u_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} = (x_{(j-1)^2+2i-1})_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \quad \text{et} \quad v = (v_{i,j})_{1 \leqslant i < j \leqslant n} = (x_{(j-1)^2+2i})_{1 \leqslant i < j \leqslant n}$$

Par définition,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{H}_n(\mathbb{C})} e^{-Tr(M^2)} d\omega_n(M) &= \int_{\mathbb{R}^{n^2}} e^{-Tr(M_{u,v}^2)} \prod_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} du_{i,j} \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} dv_{i,j} \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n^2}} exp\left(-2 \sum_{1 \leqslant k \leqslant n^2, \sqrt{k} \notin \mathbb{N}} x_k^2 - \sum_{j=1}^{n} x_{j^2}^2)\right) \prod_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} dx_{(j-1)^2+2i-1} \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} dx_{(j-1)^2+2i} \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n^2}} exp\left(-2 \sum_{1 \leqslant k \leqslant n^2, \sqrt{k} \notin \mathbb{N}} x_k^2 - \sum_{j=1}^{n} x_{j^2}^2)\right) \prod_{1 \leqslant k \leqslant n^2} dx_k \\
&= \prod_{1 \leqslant k \leqslant n} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x_{k^2}^2} dx_{k^2}\right) \prod_{1 \leqslant k \leqslant n^2, \sqrt{k} \notin \mathbb{N}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-2x_k^2} dx_k\right) \\
&= (\sqrt{\pi})^n (\sqrt{\pi/2})^{n^2-n} = \frac{\pi^{n^2/2}}{2^{n(n-1)/2}}
\end{aligned}$$

Soit $f : \mathcal{H}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}$ définie par $f(M) = e^{-Tr(M^2)}$. f est une fonction positive mesurable est intégrable sur $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$. De plus, pour toutes matrices $M \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ et $V \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$, $f(M) = f(VDV^*)$ car la fonction trace et l'application carrée sont invariables par conjugaison. Alors d'après la formule d'intégration de Weyl et en tenant compte de II.6,

$$\int_{\mathcal{H}_n(\mathbb{C})} e^{-Tr(M^2)} d\omega_n(M) = C_n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2} \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i)^2 \prod_{i=1}^{n} \mathrm{d}\lambda_i = C_n \frac{\pi^{n/2}}{2^{n(n-1)/2}} \prod_{j=1}^{n} j!$$

Ce qui donne

$$C_n = \frac{\pi^{n(n-1)/2}}{\prod_{j=1}^{n} j!}$$

3. Soit $f : \mathcal{H}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable, bornée et invariable par conjugaison. Alors, la fonction $F : \mathcal{H}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}$ définir par : $F(M) = f(M)e^{-Tr(M^2)}$ est mesurable, intégrable et invariable par conjugaison. D'après (7) et (5)

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{H}_n(\mathbb{C})} f(M) dP_n(M) &= \int_{\mathcal{H}_n(\mathbb{C})} f(M) \frac{2^{n(n-1)/2}}{\pi^{n^2/2}} e^{-Tr(M^2)} d\omega_n(M) \\
&= \frac{2^{n(n-1)/2}}{\pi^{n^2/2}} \int_{\mathcal{H}_n(\mathbb{C})} F(M) d\omega_n(M) \\
&= \frac{2^{n(n-1)/2}}{\pi^{n^2/2}} C_n \int_{\mathbb{R}^n} F(\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)) \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i)^2 \prod_{i=1}^{n} \mathrm{d}\lambda_i \\
&= \frac{2^{n(n-1)/2}}{\pi^{n/2} \prod_{j=1}^{n} j!} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)) e^{-\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2} \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i)^2 \prod_{i=1}^{n} \mathrm{d}\lambda_i \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)) q_n(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \prod_{i=1}^{n} \mathrm{d}\mu(\lambda_i) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} g(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) q_n(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \prod_{i=1}^{n} \mathrm{d}\mu(\lambda_i)
\end{aligned}$$

Où $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est la fonction définie par: $g(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = f(\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n))$. La fonction g est mesurable et bornée car la fonction f l'est. On outre, pour tout $\sigma \in S_n$ et $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = V \mathrm{diag}(\lambda_{\sigma(1)}, \cdots, \lambda_{\sigma(n)}) V^*$$

avec $V \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ la matrice de permutation associée à σ. Alors, $g(\lambda_{\sigma(1)}, \cdots, \lambda_{\sigma(n)}) = g(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ d'après l'invariabilité par conjugaison de f .

4. Soit $k \in \{1, \cdots, n\}$. Par définition, la variable aléatoire F_k est mesurable, bornée (car la fonction γ l'est) et invariable par conjugaison (car pour toute matrice $V \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ les matrices M et VMV^* ont les mêmes valeurs propres). Soit $\mathbb{E}_n(F_k)$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire F_k. Alors, d'après IV.3. et des égalités de II.4.(b), II.6 et II.7

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_n(F_k) &= \int_{\mathcal{H}_n(\mathbb{C})} F_k(M) dP_n(M) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} F_k(\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)) q_n(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \prod_{i=1}^{n} \mathrm{d}\mu(\lambda_i) \\
&= \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \gamma(\lambda_{i_1}) \cdots \gamma(\lambda_{i_k}) det((K_n(\lambda_i, \lambda_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}) \prod_{i=1}^{n} \mathrm{d}\mu(\lambda_i) \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \int_{\mathbb{R}^k} \gamma(\lambda_{i_1}) \cdots \gamma(\lambda_{i_k}) \left(\int_{\mathbb{R}^{n-k}} det((K_n(\lambda_i, \lambda_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}) \prod_{i=1, i \neq i_m}^{n} \mathrm{d}\mu(\lambda_i) \right) \prod_{m=1}^{k} \mathrm{d}\mu(\lambda_{i_m}) \\
&= \frac{(n-k)!}{n!} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \int_{\mathbb{R}^k} \gamma(\lambda_{i_1}) \cdots \gamma(\lambda_{i_k}) det((K_n(\lambda_{i_r}, \lambda_{i_s}))_{1 \leqslant r,s \leqslant k}) \prod_{m=1}^{k} \mathrm{d}\mu(\lambda_{i_m}) \qquad (*) \\
&= \frac{(n-k)!}{n!} \int_{\mathbb{R}^k} \gamma(\lambda_1) \cdots \gamma(\lambda_k) det((K_n(\lambda_r, \lambda_s))_{1 \leqslant r,s \leqslant k}) \prod_{m=1}^{k} \mathrm{d}\mu(\lambda_m) \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} 1 \qquad (**) \\
&= \frac{1}{k!} \int_{\mathbb{R}^k} \gamma(\lambda_1) \cdots \gamma(\lambda_k) det((K_n(\lambda_i, \lambda_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant k}) \mathrm{d}\mu(\lambda_1) \cdots \mathrm{d}\mu(\lambda_k) \qquad (***)
\end{aligned}$$

On a l'égalité (***) car $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} 1 = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ c'est le nombre de perties à k éléments parmi n. Dans l'égalité (**), c'est tout simplement le changement de notation des k variables. En ce qui concerne l'égalité (*), on utilise l'égalité II.7, la symétrie de K_n et des changements de rôles des variables avec un ordre adéquat (on pourra aussi le faire par récurrence sur k).

PARTIE V: Localisation du spectre.

1.. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $k \in \{1, \cdots, n\}$. Pour tout $M \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$, il existe un unique $j \in \{0, \cdots, n\}$ tel que $M \in A_n^{(j)}(I)$. Ainsi, les $(A_n^{(j)}(I))_{0 \leqslant j \leqslant n}$ forment une partition de $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_n(X_I^{(k)}) &= \int_{\mathcal{H}_n(\mathbb{C})} X_I^{(k)}(M) dP_n(M) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \int_{A_n^{(j)}(I)} X_I^{(k)}(M) dP_n(M) \\
&= \sum_{j=k}^{n} \int_{A_n^{(j)}(I)} X_I^{(k)}(M) dP_n(M), \text{ car } X_I^{(k)} = 0 \text{ sur } A_n^{(j)}(I) \text{ pour } 0 \leqslant j < k \\
&= \sum_{j=k}^{n} \int_{A_n^{(j)}(I)} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \chi_I(\lambda_{i_1}) \cdots \chi_I(\lambda_{i_k}) dP_n(M) \\
&= \sum_{j=k}^{n} \sum_{\substack{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n \\ \text{les } \lambda_{i_s} \text{ parmi les } j \text{ v.p } \in I}} \int_{A_n^{(j)}(I)} dP_n(M) \\
&= \sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} P_n(A_n^{(j)}(I))
\end{aligned}$$

2. Soit $z \in \mathbb{C}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $M \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$. En développant le produit on a

$$X_{I,z}(M) = \prod_{i=1}^{n} (1 - z\chi_I(\lambda_i)) = 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k z^k \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \chi_I(\lambda_{i_1}) \cdots \chi_I(\lambda_{i_k}) = 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k z^k X_I^{(k)}(M)$$

Alors, par linéarité de l'espérance,

$$\begin{aligned}
Q_{n,I}(z) &= \mathbb{E}_n(X_{I,z}) \\
&= 1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k z^k \mathbb{E}_n(X_I^{(k)}) \\
&= 1+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k}^{n}(-1)^k \left(\begin{array}{c} j \\ k \end{array}\right) z^k P_n(A_n^{(j)}(I)) \\
&= 1+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(-1)^k \varepsilon(k,j) \left(\begin{array}{c} j \\ k \end{array}\right) z^k P_n(A_n^{(j)}(I)) \text{ avec } \varepsilon(k,j)=1 \text{ si } 1\leqslant k\leqslant j\leqslant n \text{ et } \varepsilon(k,j)=0 \text{ sinon} \\
&= 1+\sum_{j=1}^{n} P_n(A_n^{(j)}(I)) \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \varepsilon(k,j) \left(\begin{array}{c} j \\ k \end{array}\right) z^k \\
&= 1+\sum_{j=1}^{n} P_n(A_n^{(j)}(I)) \sum_{k=1}^{j}(-1)^k \left(\begin{array}{c} j \\ k \end{array}\right) z^k \\
&= 1+\sum_{j=1}^{n} P_n(A_n^{(j)}(I))[(1-z)^j-1]
\end{aligned}$$

Pour $k=0$, on a $\sum_{j=0}^{n} P_n(A_n^{(j)}(I))=1$, alors $P_n(A_n^{(0)}(I))=1-\sum_{j=1}^{n} P_n(A_n^{(j)}(I))=Q_{n,I}(1)$. Pour $k\in\{1,\cdots,n\}$, le coefficient de $(z-1)^k$ dans l'expression de $Q_{n,I}(z)$ n'est autre que $(-1)^k P_n(A_n^{(j)}(I))$. D'autre part, par développement de Taylor du plynôme $Q_{n,I}(z)$ au point $z=1$, on obient $P_n(A_n^{(k)}(I))=\dfrac{(-1)^k}{k!}Q_{n,I}^{(k)}(1)$.

3. Soit $z\in\mathbb{C}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, la fonction χ_I est mesurable bornée. Pour tout $k\in\{1,\cdots,n\}$, la variable aléatoire $X_I^{(k)}$ n'est autre que F_k avec $\gamma=\chi_I$, d'après IV.4. On a alors, par l'égalité (9),

$$\begin{aligned}
Q_{n,I}(z) &= \mathbb{E}_n(X_{I,z}) \\
&= 1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k z^k \mathbb{E}_n(X_I^{(k)}) \\
&= 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k z^k}{k!}\int_{\mathbb{R}^k}\gamma(\lambda_1)\cdots\gamma(\lambda_k) det((K_n(\lambda_i,\lambda_j))_{1\leqslant i,j\leqslant k})\mathrm{d}\mu(\lambda_1)\cdots\mathrm{d}\mu(\lambda_k) \\
&= 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k z^k}{k!}\int_{I^k} det((K_n(\lambda_i,\lambda_j))_{1\leqslant i,j\leqslant k})\mathrm{d}\mu(\lambda_1)\cdots\mathrm{d}\mu(\lambda_k)
\end{aligned}$$

4. Soit $k\in\mathbb{N}^*$ et $I=[a,b]$ avec $a,b\in\mathbb{R}$ et $a<b$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $(t_1,\cdots,t_k)=\sqrt{2n}(\lambda_1,\cdots,\lambda_k)$

$$\begin{aligned}
u_n : &= \textstyle\int_{(\frac{1}{\sqrt{2n}}I)^k} det((K_n(\lambda_i,\lambda_j))_{1\leqslant i,j\leqslant k})\mathrm{d}\mu(\lambda_1)\cdots\mathrm{d}\mu(\lambda_k) \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{\pi}^k}\textstyle\int_{(\frac{1}{\sqrt{2n}}I)^k} det((K_n(\lambda_i,\lambda_j))_{1\leqslant i,j\leqslant k})e^{-(\lambda_1^2+\cdots+\lambda_k^2)}\mathrm{d}\lambda_1\cdots\mathrm{d}\lambda_k \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{2n\pi}^k}\textstyle\int_{I^k} det((K_n(\frac{t_i}{\sqrt{2n}},\frac{t_j}{\sqrt{2n}}))_{1\leqslant i,j\leqslant k})e^{-(t_1^2+\cdots+t_k^2)/2n}\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_k \\
&= \tfrac{1}{\pi^k}\textstyle\int_{I^k} det((\sqrt{\frac{\pi}{2n}}K_n(\frac{t_i}{\sqrt{2n}},\frac{t_j}{\sqrt{2n}}))_{1\leqslant i,j\leqslant k})e^{-(t_1^2+\cdots+t_k^2)/2n}\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_k \\
&= \tfrac{1}{\pi^k}\textstyle\int_{I^k\setminus\Delta_k} det((\sqrt{\frac{\pi}{2n}}K_n(\frac{t_i}{\sqrt{2n}},\frac{t_j}{\sqrt{2n}}))_{1\leqslant i,j\leqslant k})e^{-(t_1^2+\cdots+t_k^2)/2n}\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_k
\end{aligned}$$

Où $\Delta_1=\emptyset$ et pour $k>1$, Δ_k est la partie de I^k constituée des k-uplets dont au moins deux composantes sont égales. L'intégrale sur Δ_k est nulle car le déterminant l'est. Noter aussi que Δ_k est négligeable pour la mesure produit. Pour $(t_1,\cdots,t_k)\in I^k\setminus\Delta_k$, on pose

$$f_n(t_1,\cdots,t_k):=det\left(\left(\sqrt{\frac{\pi}{2n}}K_n\left(\frac{t_i}{\sqrt{2n}},\frac{t_j}{\sqrt{2n}}\right)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant k}\right)e^{-(t_1^2+\cdots+t_k^2)/2n}$$

$$f(t_1,\cdots,t_k):=det\left(\left(\frac{\sin(t_i-t_j)}{t_i-t_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant k}\right)$$

Avec les indications données et la continuité du déterminant, la suite (f_n) dominée par une constante et converge simplement vers la fonction f p.p sur I^k. Le théorème de convergence dominée assure la convergence de la suite (u_n) vers $\frac{1}{\pi^k}\int_{I^k}f(t_1,\cdots,t_k)\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_k$. D'où le résultat.

5. Soit $z \in \mathbb{C}$, on pose $Q(z) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k z^k$ où pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$a_k := \frac{(-1)^k}{\pi^k k!} \int_{[a,b]^k} det\left(\left(\frac{\sin(t_i - t_j)}{t_i - t_j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant k}\right) \mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_k$$

Comme la matrice $\left(\frac{\sin(t_i-t_j)}{t_i-t_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant k} \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$, pour tout $(t_1, \cdots, t_k) \in [a,b]^k$. En utilisant l'inégalité de Hadamard et l'inégalité $|\sin(x)| \leqslant |x|$ valable pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |a_k| &\leqslant \frac{1}{\pi^k k!} \int_{[a,b]^k} \left| det\left(\left(\frac{\sin(t_i - t_j)}{t_i - t_j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant k}\right)\right| \mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_k \\ &\leqslant \frac{1}{\pi^k k!} \int_{[a,b]^k} \prod_{j=1}^{k} \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \left|\frac{\sin(t_i - t_j)}{t_i - t_j}\right|^2} \mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_k \\ &\leqslant \frac{\sqrt{k}^k (b-a)^k}{\pi^k k!} \end{aligned}$$

Par ailleurs, la suite $\left(\frac{\sqrt{k}}{k!^{1/k}}\right)_k$ tend vers 0 car $\frac{k^k}{k!} \leqslant e^k$. Alors, la série entière $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k z^k$ a $+\infty$ comme rayon de convergence. Donc, Q est bien définie et holomorphe sur $\mathbb{C}$.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Q_{n,[a/\sqrt{2n},b/\sqrt{2n}]}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ car fonction polynomiale. Soit K un compact de $\mathbb{C}$; on note $d = \max_{z \in K} |z|$. Pour tout $z \in K$ et avec les notations ci-dessus

$$\begin{aligned} \left|Q_{n,[a/\sqrt{2n},b/\sqrt{2n}]}(z) - Q(z)\right| &\leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left(\frac{|z|}{\pi}\right)^k \left|\int_{[a,b]^k} (f_n - f)(t_1, \cdots, t_k)\mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_k\right| + \sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k||z|^k \\ \max_{z \in K}\left|Q_{n,[a/\sqrt{2n},b/\sqrt{2n}]}(z) - Q(z)\right| &\leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left(\frac{d}{\pi}\right)^k \left|\int_{[a,b]^k} (f_n - f)(t_1, \cdots, t_k)\mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_k\right| + \sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k| d^k \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$, d'après ce qui précéde, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$

$$\left|\int_{[a,b]^k} (f_n - f)(t_1, \cdots, t_k)\mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_k\right| < \varepsilon \text{ et } \sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k| d^k \leqslant \varepsilon$$

Alors, pour tout $n \geqslant N$

$$\max_{z \in K}\left|Q_{n,[a/\sqrt{2n},b/\sqrt{2n}]}(z) - Q(z)\right| \leqslant \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left(\frac{d}{\pi}\right)^k + \varepsilon \leqslant \varepsilon e^{d/\pi} + \varepsilon$$

D'ou le résultat .

7. Soit $m \in \mathbb{N}$. D'après V.2, pour tout $n \geqslant m$,

$$P_n(A_n^{(m)}([a/\sqrt{2n}, b/\sqrt{2n}])) = \frac{(-1)^m}{m!} Q^{(m)}_{n,[a/\sqrt{2n},b/\sqrt{2n}]}(1).$$

Comme la suite $(Q_{n,[a/\sqrt{2n},b/\sqrt{2n}]})_n$ converge vers Q dans $\mathcal{O}(\mathbb{C})$, alors d'après un théorème sur la convergence holomorphe, la suite $(Q^{(m)}_{n,[a/\sqrt{2n},b/\sqrt{2n}]})_n$ converge vers $Q^{(m)}$ dans $\mathcal{O}(\mathbb{C})$. Donc,

$$\lim_{n \to +\infty} P_n(A_n^{(m)}([a/\sqrt{2n}, b/\sqrt{2n}])) = \frac{(-1)^m}{m!} Q^{(m)}(1)$$

PARTIE VI: Loi du demi-cercle.

1. Soit $[a,b]$ un segement de $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_n\left(\frac{1}{n} X^{(1)}_{[a\sqrt{n},b\sqrt{n}]}\right) &= \frac{1}{n}\mathbb{E}_n\left(X^{(1)}_{[a\sqrt{n},b\sqrt{n}]}\right), \text{ par linéarité de l'espérance} \\ &= \frac{1}{n}\int_{[a\sqrt{n},b\sqrt{n}]} K_n(\lambda,\lambda)\mathrm{d}\mu(\lambda), \text{ d'après l'égalité (9) et IV.4} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}}\int_{[a,b]} K_n(t\sqrt{n}, t\sqrt{n})\varphi(t\sqrt{n})\mathrm{d}t, \text{ on pose: } \lambda = t\sqrt{n} \\ &= \int_{[a,b]} \mathrm{d}v_n(t) = v_n([a,b]) \end{aligned}$$

Si la longueur de l'intervalle $[a,b]$ pour la mesure dv_n est non nulle, on peut espérer d'avoir une valeur propre dans l'intervalle $[a\sqrt{n}, b\sqrt{n}]$.

2. Soit $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Pour tout $M \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$, on peut écrire $M = V\text{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)V^*$ avec $V \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ et les $\lambda_i \in \mathbb{R}$ (les valeurs propres de M). Alors,

$$R^{(n)}_{\sqrt{n}z}(M) = Tr((\sqrt{n}zI_n - M)^{-1}) = Tr(\text{diag}(\sqrt{n}z-\lambda_1,\cdots,\sqrt{n}z-\lambda_n)^{-1}) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n}z-\lambda_i} = F_1(M),$$

d'après IV.4. avec $\gamma : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ définie par : $\gamma(\lambda) = \dfrac{1}{\sqrt{n}z-\lambda}$, pour $\lambda \in \mathbb{R}$. On a γ est mesurable et bornée car continue et $|\gamma| \leqslant \dfrac{1}{d(\sqrt{n}z,\mathbb{R})}$. Donc, d'après le résultat du IV.4.

$$\begin{aligned}
G_n(z) &= \sqrt{n}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{\sqrt{n}z-\lambda}K_n(\lambda,\lambda)\mathrm{d}\mu(\lambda)\\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{z-t}K_n(t\sqrt{n},t\sqrt{n})\varphi(t\sqrt{n})\mathrm{d}t, \text{ on pose: } \lambda = t\sqrt{n}\\
&= \int_{\mathbb{R}}\frac{\mathrm{d}v_n(t)}{z-t}
\end{aligned}$$

3. Soit $R \in \mathbb{R}^+$, $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\iint_{|x+iy|\leqslant R}\frac{dxdy}{|(x+iy)-t|} &\leqslant \iint_{|(x+iy)-t|\leqslant R+|t|}\frac{dxdy}{|(x+iy)-t|} \text{ , car } \{|x+iy|\leqslant R\}\subset\{|(x+iy)-t|\leqslant R+|t|\}\\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{R+|t|} dr\, d\theta = 2\pi(R+|t|) \text{ , en posant } x+iy = t+re^{i\theta}
\end{aligned}$$

Si $|t| < 2R$, alors

$$\iint_{|x+iy|\leqslant R}\frac{dxdy}{|(x+iy)-t|} \leqslant 6\pi R$$

Si $|t| \geqslant 2R$, en passant encore aux coordonnées polaires, $x+iy = re^{i\theta}$

$$\begin{aligned}
\iint_{|x+iy|\leqslant R}\frac{dxdy}{|(x+iy)-t|} &= \int_0^{2\pi}\int_0^{R}\frac{r\,dr\,d\theta}{|re^{i\theta}-t|}\\
&\leqslant \frac{1}{R}\int_0^{2\pi}\int_0^{R} r\,dr\,d\theta \text{ , car } \left|re^{i\theta}-t\right| \geqslant |t|-r \geqslant R\\
&= \pi R
\end{aligned}$$

Donc, $c = 6\pi$ convient. Pour montrer qu'une fonction est localement intégrable sur $\mathbb{R}^2$, il suffit de montrer qu'elle est intégrable sur toute boule de centre 0. Soit $R > 0$, $\displaystyle\iint_{|x+iy|\leqslant R}\frac{dxdy}{|x+iy|} \leqslant 6\pi R$. Alors, $z \mapsto \frac{1}{z}$ est localement intégrable sur $\mathbb{R}^2$. De même, pour G et G_n car

$$\iint_{|x+iy|\leqslant R}|G(x+iy)|dxdy \leqslant \iint_{|x+iy|\leqslant R}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{|(x+iy)-t|}dv(t)dxdy \leqslant 6\pi R\int_{\mathbb{R}}dv(t) = 6\pi R$$

Les expressions des fonctions G_n et G sont similaires, elles sont alors localement intégrables sur $\mathbb{R}^2$.

4. Soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ de support K un compact de $\mathbb{R}^2$. On a la suite (G_n) converge simplement vers G sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ et uniformément sur $K\setminus\mathbb{R}$. Donc, la suite $(G_n\psi)$ est bornée p.p sur K et elle converge simplement vers $G\psi$ p.p sur K. D'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_K G_n(x+iy)\psi(x,y)dxdy = \int_K G(x+iy)\psi(x,y)dxdy$$

Par conséquent,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^2} G_n(x+iy)\psi(x,y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^2} G(x+iy)\psi(x,y)dxdy$$

5. Soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. Il existe $R > 0$ tel que $supp(\psi) \subset \{|x+iy| \leqslant R\}$ et $\psi = 0$ sur le bord $\{|x+iy| = R\}$. On effectue le changement de variables en coordonnées polaires $x+iy = re^{it}$ et on pose $\tilde{\psi}(r,t) = \psi(r\cos(t), r\sin(t)) = \psi(x,y)$, $(r,t) \in]0,R]\times[0,2\pi[$.

On a les relations suivantes: $0 < |x+iy| \leqslant R$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial \psi}{\partial y}(x,y) & = & \cos(t)\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial r}(r,t) - \frac{1}{r}\sin(t)\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t}(r,t) \\ \frac{\partial \psi}{\partial y}(x,y) & = & \sin(t)\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial r}(r,t) + \frac{1}{r}\cos(t)\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t}(r,t) \end{array} \right.$$

Par suite,

$$\begin{array}{rcl} \overline{\partial}\psi(x,y) & = & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}(x,y) + i\frac{\partial \psi}{\partial y}(x,y)\right) \\ & = & \frac{1}{2}\left(\cos(t)\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial r}(r,t) - \frac{1}{r}\sin(t)\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t}(r,t) + i\sin(t)\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial r}(r,t) + i\frac{1}{r}\cos(t)\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t}(r,t)\right) \\ & = & \frac{e^{it}}{2}\left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial r}(r,t) + \frac{i}{r}\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t}(r,t)\right) \end{array}$$

L'intégrale en question devient, noter que $supp(\overline{\partial}\psi) \subset \{|x+iy| \leqslant R\}$, $\tilde{\psi}(R,t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $r \in [0,R]$, $\tilde{\psi}(r,2\pi) = \tilde{\psi}(r,0)$. Soit $0 < \varepsilon < R$,

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\iint_{\varepsilon \leqslant |x+iy| \leqslant R} \frac{1}{x+iy}\overline{\partial}\psi(x,y)dxdy & = & \displaystyle\int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^R \frac{1}{re^{it}}\left(\frac{e^{it}}{2}\left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial r}(r,t) + \frac{i}{r}\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t}(r,t)\right)\right) r\, dr\, dt \\ & = & \displaystyle\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^R \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial r}(r,t) + \frac{i}{r}\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t}(r,t)\right) dr\, dt \\ & = & \displaystyle\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^R \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial r}(r,t)\, dr\, dt + \frac{i}{2}\int_\varepsilon^R \frac{1}{r}\int_0^{2\pi} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t}(r,t)\, dt\, dr \\ & = & \displaystyle -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \tilde{\psi}(\varepsilon,t)\, dt \\ & = & \displaystyle -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \psi(\varepsilon\cos(t),\varepsilon\sin(t))\, dt \end{array}$$

Donc,

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{x+iy}\overline{\partial}\psi(x,y)dxdy & = & \displaystyle\iint_{|x+iy| \leqslant R} \frac{1}{x+iy}\overline{\partial}\psi(x,y)dxdy \\ & = & \displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0}\iint_{\varepsilon \leqslant |x+iy| \leqslant R} \frac{1}{x+iy}\overline{\partial}\psi(x,y)dxdy \\ & = & \displaystyle -\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon \to 0}\int_0^{2\pi} \psi(\varepsilon\cos(t),\varepsilon\sin(t))\, dt \\ & = & -\pi\psi(0,0) = -\pi\left\langle \delta_{(0,0)}, \psi\right\rangle \end{array}$$

En d'autres termes,

$$\overline{\partial}\left(\frac{1}{z}\right) = \pi\delta_{(0,0)}$$

6. Soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. Noter que pour $t \in \mathbb{R}$, la fonction $(x,y) \mapsto \psi(x+t,y)$ est aussi dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$.

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} G(x+iy)\overline{\partial}\psi(x,y)dxdy & = & \displaystyle\int_{\mathbb{R}}\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{x+iy-t}\overline{\partial}\psi(x,y)dxdydv(t) \\ & = & \displaystyle\int_{\mathbb{R}}\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{x+iy}\overline{\partial}\psi(x+t,y)dxdydv(t) \\ & = & \displaystyle -\pi\int_{\mathbb{R}} \psi(t,0)dv, \text{ d'après le résultat 5. précédent} \\ & = & -\pi\left\langle v, \psi\right\rangle \end{array}$$

Donc, $\overline{\partial}G = \pi v$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$. Par un raisonnement identique, on a aussi l'égalité $\overline{\partial}G_n = \pi v_n$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$. D'après 4., la suite $(G_n)_{n\geqslant 2}$ converge vers G dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ alors $(\overline{\partial}G_n)_{n\geqslant 2}$ converge vers $\overline{\partial}G$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$. Donc, $(v_n)_{n\geqslant 2}$ converge vers v dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

7. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, alors $v_n([a,b]) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} 1_{[a,b]}(t)dv_n(t) = \lim_{\varepsilon \to 0}\left\langle v_n, \psi_\varepsilon\right\rangle$ avec $\psi_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ telle que $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0}\psi_\varepsilon(x,y) = 1_{[a,b]}(x)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ (par régularisation). Par suite,

$$\lim_{n \to +\infty} v_n([a,b]) = \lim_{\varepsilon \to 0}\left\langle v, \psi_\varepsilon\right\rangle = \int_{\mathbb{R}} 1_{[a,b]}(t)dv(t) = v([a,b])$$

.

Si pour n assez grand, la probabilité v_n d'avoir une valeur propre dans $[a,b]$ est non nulle, alors la probabilité v de d'avoir une valeur propre dans $[a,b]$ est aussi non nulle.