Correction Baccalauréat S - Obligatoire
ASIE - Mercredi 19 Juin 2013

www.math93.com / www.mathexams.fr

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Exercice 1. 5 points

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, les probabilités seront arrondies au centième.

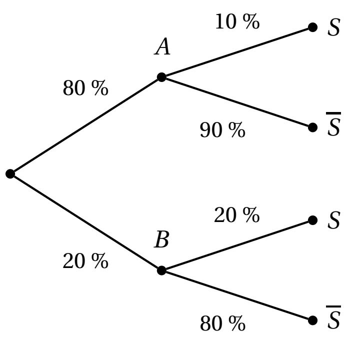
Partie A

Un grossiste achète des boîtes de thé vert chez deux fournisseurs. Il achète 80 % de ses boîtes chez le fournisseur A et 20 % chez le fournisseur B.

10 % des boîtes provenant du fournisseur A présentent des traces de pesticides et 20 % de celles provenant du fournisseur B présentent aussi des traces de pesticides.
On prélève au hasard une boîte du stock du grossiste et on considère les évènements suivants :

- évènement A : « la boîte provient du fournisseur A » ;
- évènement B : « la boîte provient du fournisseur B » ;
- évènement S : « la boîte présente des traces de pesticides ».

1. Traduire l'énoncé sous forme d'un arbre pondéré.



2. a. Quelle est la probabilité de l'évènement $B \cap \overline{S}$?

$P\left(B \cap \overline{S}\right) = P_B\left(\overline{S}\right) \times P(B)$

$P\left(B \cap \overline{S}\right) = 80\ \% \times 20\ \%$

$\boxed{P\left(B \cap \overline{S}\right) = 16\ \%}$

b. Justifier que la probabilité que la boîte prélevée ne présente aucune trace de pesticides est égale à 0,88.

Les évènements A et B forment une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales on a :

$P\left(\overline{S}\right) = P\left(A \cap \overline{S}\right) + P\left(B \cap \overline{S}\right)$

$P\left(\overline{S}\right) = P_A\left(\overline{S}\right) \times P(A) + 16\ \%$

$P\left(\overline{S}\right) = 80\ \% \times 90\ \% + 16\ \%$

$P\left(\overline{S}\right) = 72\ \% + 16\ \%$

Donc on a bien $\boxed{P\left(\overline{S}\right) = 88\ \% = 0,88}$.

3. On constate que la boîte prélevée présente des traces de pesticides.
Quelle est la probabilité que cette boîte provienne du fournisseur B ?
On cherche $P_S(B) = \dfrac{P(B \cap S)}{P(S)} = \dfrac{20\ \% \times 20\ \%}{1 - 88\ \%} = \dfrac{4\ \%}{12\ \%} = \dfrac{1}{3}$ soit $\boxed{P_S(B) \approx 33\ \%}$

Partie B

Le gérant d'un salon de thé achète 10 boîtes chez le grossiste précédent. On suppose que le stock de ce dernier est suffisamment important pour modéliser cette situation par un tirage aléatoire de 10 boîtes avec remise.
On considère la variable aléatoire X qui associe à ce prélèvement de 10 boîtes, le nombre de boîtes sans trace de pesticides.

1. **Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.**
   Les 10 tirages sont aléatoires et indépendants. Chaque tirage ne possède que 2 issues, S et $\overline{S}$, donc correspond à une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = P\left(\overline{S}\right) = 0,88$.
   La variable aléatoire X suit donc la loi binomiale de paramètres n = 10 et p = 0,88.
2. **Calculer la probabilité que les 10 boîtes soient sans trace de pesticides**.
   $P(X=10) = P\left(\overline{S}\right)^{10} = 0,88^{10}$, donc $\boxed{P(X=10) \approx 0,28}$
3. **Calculer la probabilité qu'au moins 8 boîtes ne présentent aucune trace de pesticides**.
   On cherche $P(X \geq 8)$.
   $P(X \geq 8) = P(X=8) + P(X=9) + P(X=10)$
   $P(X \geq 8) = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix} \times 0,88^8 \times 0,12^2 + \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \end{pmatrix} \times 0,88^9 \times 0,12^1 + 0,88^{10}$
   Soit $\boxed{P(X \geq 8) \approx 0,89}$

Partie C

À des fins publicitaires, le grossiste affiche sur ses plaquettes : « 88 % de notre thé est garanti sans trace de pesticides ».
Un inspecteur de la brigade de répression des fraudes souhaite étudier la validité de l'affirmation. À cette fin, il prélève 50 boîtes au hasard dans le stock du grossiste et en trouve 12 avec des traces de pesticides.

On suppose que, dans le stock du grossiste, la proportion de boîtes sans trace de pesticides est bien égale à 0,88.
On note F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 50 boîtes, associe la fréquence des boîtes ne contenant aucune trace de pesticides.

1. **Donner l'intervalle de fluctuation asymptotique de la variable aléatoire F au seuil de 95 %**.
   On a $n = 50$, $p = 88\%$ alors on sait que puisque $n = 50 \geq 30$, $np = 44 \geq 5$ et $n(1-p) = 6 \geq 5$, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95% pour la fréquence F est :
   $I_{50} = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \,;\, p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$ soit $\boxed{I \approx [0,78\,;\,0,97]}$.
2. **L'inspecteur de la brigade de répression peut-il décider, au seuil de 95 %, que la publicité est mensongère** ?
   La fréquence observée de boîtes ne contenant pas de pesticide est $\boxed{f = \frac{50-12}{52} = 0,76 \notin I_{50}}$.
   L'échantillon n'est pas représentatif de ce qu'annonce le grossiste. L'inspecteur de la brigade de répression peut décider que la publicité est mensongère.

Exercice 2. **6 points**

Commun à tous les candidats

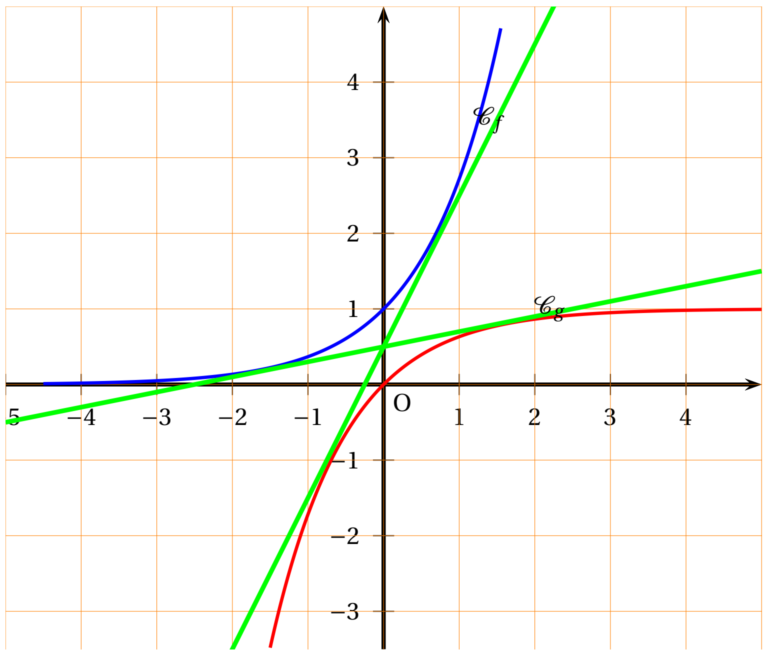
On considère les fonctions f et g définies pour tout réel x par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{x} \quad \text{et} \quad g(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}.$$

Les courbes représentatives de ces fonctions dans un repère orthogonal du plan, notées respectivement $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, sont fournies en annexe.

Partie A

Ces courbes semblent admettre deux tangentes communes. Tracer aux mieux ces tangentes sur la figure de l'annexe.



Partie B

Dans cette partie, on admet l'existence de ces tangentes communes.
On note $\mathscr{D}$ l'une d'entre elles. Cette droite est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse a et tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point B d'abscisse b.

1. **a. Exprimer en fonction de a le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A.**
   La fonction f est dérivable car la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $\mathrm{A}\big(a\,;\, f(a)\big)$ est le nombre dérivé $\boxed{f'(a) = \mathrm{e}^{a}}$.

   b. Exprimer en fonction de b le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point B.
   La fonction g est dérivable car la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-}x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $g'(x) = -\left(-\mathrm{e}^{-x}\right) = \mathrm{e}^{-x}$. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point $\mathrm{B}\big(b\,;\, f(b)\big)$ est le nombre dérivé $\boxed{f'(b) = \mathrm{e}^{-b}}$.

   c. En déduire que $b = -a$.
   Si les tangentes sont communes, elles ont même coefficient directeur et donc les réels a et b vérifient :
   $f'(a) = g'(b) \iff \mathrm{e}^{a} = \mathrm{e}^{-b}$
   $f'(a) = g'(b) \iff a = -b$ car la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{x}$ est bijective car strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$. On en déduit que $\underline{b = -a}$.

2. Démontrer que le réel a est solution de l'équation : $2(x-1)\mathrm{e}^{x}+1=0$.

- Une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse a est $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ soit
  $y=\mathrm{e}^{a}\times(x-a)+\mathrm{e}^{a}$ donc $\boxed{y=x\mathrm{e}^{a}+\mathrm{e}^{a}(1-a)}$.
- Une équation de la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point B d'abscisse b est $y=g'(b)(x-b)+g(b)$ soit
  $y=\mathrm{e}^{-b}\times(x-b)+1-\mathrm{e}^{-b}$ donc puisque $b=-a$ on a
  $y=\mathrm{e}^{a}\times(x+a)+1-\mathrm{e}^{a}$ d'où
  $\boxed{y=x\mathrm{e}^{a}+\mathrm{e}^{a}(a-1)+1}$.
- Le réel a vérifie donc : $x\mathrm{e}^{a}+\mathrm{e}^{a}(1-a)=x\mathrm{e}^{a}+\mathrm{e}^{a}(a-1)+1$.
  Soit
  $$\begin{aligned}\mathrm{e}^{a}(1-a)=\mathrm{e}^{a}(a-1)+1 &\iff \mathrm{e}^{a}-a\mathrm{e}^{a}-a\mathrm{e}^{a}+\mathrm{e}^{a}-1=0\\ &\iff (-2a+2)\mathrm{e}^{a}-1=0\\ &\iff 2(a-1)\mathrm{e}^{a}+1=0\end{aligned}$$
  Le réel a est donc solution de l'équation : $\boxed{2(x-1)\mathrm{e}^{x}+1=0}$.

Partie C

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(x)=2(x-1)\mathrm{e}^{x}+1.$$

1. a. Calculer les limites de la fonction φ en $-\infty$ et $+\infty$.

- En $+\infty$.
  $$\left\{\begin{array}{lcl}\lim\limits_{x\to+\infty}2(x-1) & = & +\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{x} & = & +\infty\end{array}\right.\text{, donc }\boxed{\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty}$$
- En $-\infty$.
  On a $\varphi(x)=2x\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{x}+1$ et
  $$\left\{\begin{array}{lcl}\lim\limits_{x\to-\infty}2x\mathrm{e}^{x} & = & 0\ \text{(Croissances comparées)}\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{x} & = & 0\end{array}\right.\text{, donc }\boxed{\lim_{x\to-\infty}\varphi(x)=1}$$

b. Calculer la dérivée de la fonction φ, puis étudier son signe.

La fonction φ est dérivable sur$\mathbb{R}$ comme composée de fonctions qui le sont.

En posant $\left\{\begin{array}{lcl}u(x)=2(x-1) & ; & u'(x)=2\\ v(x)=\mathrm{e}^{x} & ; & v'(x)=\mathrm{e}^{x}\end{array}\right.$, on a $\varphi(x)=u(x)v(x)+1$ et donc :

$\varphi'(x)=u'(x)v(v)+u(x)v'(x)$ soit
$\varphi'(x)=2\mathrm{e}^{x}+2(x-1)\mathrm{e}^{x}$
Pour tout réel x, $\boxed{\varphi'(x)=2x\mathrm{e}^{x}}$.

Or pour tout réel x, $\mathrm{e}^{x}>0$ donc $\varphi'(x)$ est du signe de $2x$.

$$\boxed{\left\{\begin{array}{lcl}\forall x\in]0\,;\,+\infty[& , & \varphi'(x)>0\\ \forall x\in]-\infty\,;\,0[& , & \varphi'(x)<0\end{array}\right.}$$

c. Dresser le tableau de variation de la fonction φ sur $\mathbb{R}$. Préciser la valeur de $\varphi(0)$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
φ	1	$\searrow$	$\varphi(0)=-1$	$\nearrow$	$+\infty$

2. **a. Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.**

   - La fonction φ est **continue** et **strictement décroissante** sur l'intervalle $]-\infty\,;\,0]$;
   - L'image par φ de l'intervalle $]-\infty\,;\,0]$ est $[-1\,;\,1[$ d'après le tableau de variations.
   - Le réel $k = 0$ appartient à l'intervalle image $[-1\,;\,1[$.

   Donc, d'après le **corollaire du théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $\varphi(x) = k = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $]-\infty\,;\,0]$.

   De même :

   - La fonction φ est **continue** et **strictement croissante** sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$;
   - L'image par φ de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ est $[-1\,;\,+\infty$ d'après le tableau de variations.
   - Le réel $k = 0$ appartient à l'intervalle image $[-1\,;\,+\infty$.

   Donc, d'après le **corollaire du théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $\varphi(x) = k = 0$ admet une solution unique β sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

   Pour conclure : <u>l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.</u>

   b. On note α la solution négative de l'équation $\varphi(x) = 0$ et β la solution positive de cette équation.

$$\varphi(x) = 2(x-1)\mathrm{e}^x + 1.$$

   À l'aide d'une calculatrice, donner les valeurs de α et β arrondies au centième.

   - <u>Encadrement de α</u>.
     Pour avoir un encadrement de α, on peut utiliser la fonction TABLE de la calculatrice.

     Avec un pas de $\Delta = 0,1$ on obtient : $\begin{cases} \varphi(-1,7) & \approx & 0,0135 > 0 \\ \varphi(-1,6) & \approx & -0,0499 < 0 \end{cases}$, donc $-1,7 \leq \alpha \leq -1,6$.

     Avec un pas de $\Delta = 0,01$ on obtient : $\begin{cases} \varphi(-1,68) & \approx & 0,00104 > 0 \\ \varphi(-1,67) & \approx & -0,0052 < 0 \end{cases}$, donc $\boxed{-1,68 \leq \alpha \leq -1,67}$.

   - <u>Encadrement de β</u>.

     Avec un pas de $\Delta = 0,1$ on obtient : $\begin{cases} \varphi(0,7) & \approx & -0,2083 < 0 \\ \varphi(0,8) & \approx & 0,10978 > 0 \end{cases}$, donc $0,7 \leq \beta \leq 0,8$.

     Avec un pas de $\Delta = 0,01$ on obtient : $\begin{cases} \varphi(0,76) & \approx & -0,0264 < 0 \\ \varphi(0,77) & \approx & 0,00651 > 0 \end{cases}$, donc $\boxed{0,76 \leq \beta \leq 0,77}$.

Partie D

Dans cette partie, on démontre l'existence de ces tangentes communes, que l'on a admise dans la partie B.
On note E le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a et F le point de la courbe $\mathscr{C}_g$ d'abscisse $-a$ (a est le nombre réel défini dans la partie C).

1. **Démontrer que la droite (EF) est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point E.**

   - Les points E et F sont de coordonnées $E\,(a\,;\,\mathrm{e}^a)$ et $F\,(-a\,;\,1-\mathrm{e}^a)$
   - Une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point E d'abscisse a est $\boxed{(T_1) \;:\; y = x\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^a(1-a)}$.
   - <u>Montrons que le point $F\,(-a\,;\,1-\mathrm{e}^a)$ appartient à cette droite.</u>
     - En remplaçant x par $-a$ dans l'équation (T_1) on obtient $y_F = -a\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^a(1-a)$ soit :

$$\boxed{y_F = \mathrm{e}^a(1-2a)} \qquad (1)$$

     - En outre, d'après la question B2, le réel a est solution de l'équation $2(x-1)\mathrm{e}^x + 1 = 0$ et de ce fait :

$$\boxed{2(a-1)\mathrm{e}^a + 1 = 0} \qquad (2)$$

– De l'équation (2) on obtient
$2a\mathrm{e}^a - 2\mathrm{e}^a + 1 = 0$
$1 - \mathrm{e}^a - \mathrm{e}^a + 2a\mathrm{e}^a = 0$ soit
$1 - \mathrm{e}^a = \mathrm{e}^a - 2a\mathrm{e}^a$ et donc $\boxed{1 - \mathrm{e}^a = (1-2a)\mathrm{e}^a}$

– En réinjectant cela dans l'équation (1) on obtient : $\boxed{y_F = 1 - \mathrm{e}^a}$

Le point $F(-a\,;\ 1-\mathrm{e}^a)$ appartient à cette droite et donc la droite (EF) est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point E
.

2. Démontrer que (EF) est tangente à $\mathscr{C}_g$ au point F.

– Les points E et F sont de coordonnées $E(a\,;\ \mathrm{e}^a)$ et $F(-a\,;\ 1-\mathrm{e}^a)$
– Une équation de la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point F d'abscisse $-a$ est $\boxed{(T_2)\ :\ y = x\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^a(a-1)+1}$.

– Montrons que le point $E(a\,;\ \mathrm{e}^a)$ appartient à cette droite.

– En remplaçant x par a dans l'équation (T_2) on obtient $y_E = a\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^a(a-1)+1$ soit :

$$\boxed{y_E = (2a-1)\mathrm{e}^a + 1} \qquad (3)$$

– En outre, d'après la question B2, le réel a est solution de l'équation $2(x-1)\mathrm{e}^x + 1 = 0$ et de ce fait :

$$\boxed{2(a-1)\mathrm{e}^a + 1 = 0} \qquad (4)$$

– De l'équation (4) on obtient
$2a\mathrm{e}^a - 2\mathrm{e}^a + 1 = 0$
$2a\mathrm{e}^a - \mathrm{e}^a - \mathrm{e}^a + 1 = 0$ soit
$(2a-1)\mathrm{e}^a - \mathrm{e}^a + 1 = 0$ et donc $\boxed{(2a-1)\mathrm{e}^a + 1 = \mathrm{e}^a}$

– En réinjectant cela dans l'équation (3) on obtient : $\boxed{y_E = \mathrm{e}^a}$

Le point $E(a\,;\ \mathrm{e}^a)$ appartient à cette droite et donc la droite (EF) est tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point F .

Exercice 3. **4 points**

Commun à tous les candidats

Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.
Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si chacune d'elles est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Dans les questions 1. et 2., le plan est rapporté au repère orthonormé direct $\left(O,\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.
On considère les points A, B, C, D et E d'affixes respectives :

$$a = 2+2\mathrm{i},\quad b = -\sqrt{3}+\mathrm{i},\quad c = 1+\mathrm{i}\sqrt{3},\quad d = -1+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\quad \text{et}\quad e = -1+\left(2+\sqrt{3}\right)\mathrm{i}.$$

1. $\boxed{\text{L'affirmation 1 est VRAIE}}$ **: les points A, B et C sont alignés**.

   $$\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \arg\left(\frac{\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)-(2+2\mathrm{i})}{\left(-\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)-(2+2\mathrm{i})}\right)$$
   $$\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right) = \arg\left(\frac{-1+\left(-2+\sqrt{3}\right)\mathrm{i}}{\left(-2-\sqrt{3}\right)-\mathrm{i}}\right) = \arg\left(\frac{1+\left(2-\sqrt{3}\right)\mathrm{i}}{\left(2+\sqrt{3}\right)+\mathrm{i}}\right)$$
   $$\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right) = \arg\left(\frac{1+\left(2-\sqrt{3}\right)\mathrm{i}}{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(1+\left(2-\sqrt{3}\right)\mathrm{i}\right)}\right), \text{ car } \left(2-\sqrt{3}\right)\times\left(2+\sqrt{3}\right) = 4-3 = 1$$

   Donc $\boxed{\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right) = \arg\left(\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right) = 0\,[\pi]}$, <u>les points A, B et C sont alignés</u>.

2. $\boxed{\text{L'affirmation 2 est FAUSSE}}$ **: les points B, C et D n'appartiennent pas à un même cercle de centre E**.

   $EB = |z_B - z_E| = \left|-\sqrt{3}+\mathrm{i}-\left(-1+\left(2+\sqrt{3}\right)\mathrm{i}\right)\right| = \left|1-\sqrt{3}+\left(3+\sqrt{3}\right)\mathrm{i}\right|$
   $EB = \sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2+\left(3+\sqrt{3}\right)^2}$
   $\boxed{EB = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ unités}}$.
   $$ED = |z_D - z_E| = \left|-1+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}-\left(-1+\left(2+\sqrt{3}\right)\mathrm{i}\right)\right| = \left|\left(-2-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathrm{i}\right|$$
   $\boxed{ED = 2+\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ unités}}$.

   Il n'est pas nécessaire de calculer EC, puisque $ED \neq EB$.,
   <u>Les points B et D n'appartiennent pas au même cercle de centre E, ce qui met en défaut l'affirmation</u> .

   Pour information, on trouve $EC = EB = 2\sqrt{2}$ unités.
   Les points B et C appartiennent eux au même cercle de centre E.

3. Dans cette question, l'espace est muni d'un repère $\left(O,\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$.
   On considère les points I(1 ; 0 ; 0), J(0 ; 1 ; 0) et K(0 ; 0 ; 1).

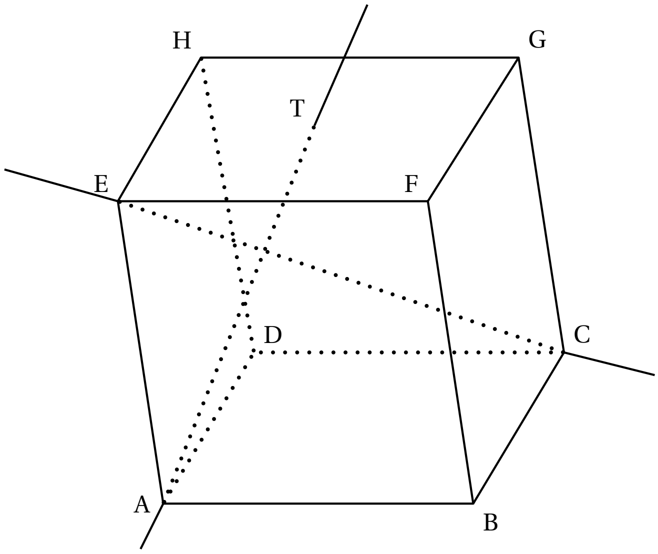
   $\boxed{\text{L'affirmation 3 est VRAIE}}$ **: la droite $\mathscr{D}$ de représentation paramétrique** $\begin{cases} x = 2-t \\ y = 6-2t \\ z = -2+t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$, **coupe le plan (IJK) au point** **E**$\left(-\frac{1}{2}\ ;\ 1\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.

   On obtient facilement une équation cartésienne du plan (IJK) : $x+y+z-1=0$.
   Puis on remplace dans cette équation x, y et z par leur expression en fonction de t pour avoir les coordonnées du point d'intersection (si il existe) :
   $(2-t)+(6-2t)+(-2+t)-1 = 5-2t = 0$ soit $t = \frac{5}{2}$.

Or pour $t = \frac{5}{2}$, on obtient bien : $\boxed{\left\{\begin{array}{lcccc} x_E & = & 2-\frac{5}{2} & = & -\frac{1}{2} \\ y_E & = & 6-2\times\frac{5}{2} & = & 1 \\ z_E & = & -2+\frac{5}{2} & = & \frac{1}{2} \end{array}\right.}$

Remarque : On pouvait aussi vérifier que les coordonnées du point E vérifiaient les equations du plan et de la droite.

4. Dans le cube ABCDEFGH, le point T est le milieu du segment [HF].



$\boxed{\textbf{L'affirmation 4 est VRAIE}}$: **les droites (AT) et (EC) sont orthogonales**.
Du classique, utilisons la relation de Chasles [1]

$\overrightarrow{AT}\cdot\overrightarrow{EC} = \left(\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{EF}\right)\right)\cdot\left(\overrightarrow{EA}+\left(\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{EF}\right)\right)$
et puisque $\overrightarrow{AE}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{EF}$:
$\overrightarrow{AT}\cdot\overrightarrow{EC} = -AE^2+\frac{1}{2}\left(EH^2+EF^2+\underbrace{2\overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{EF}}\right)$, et si on pose $AE = a = EH = EF$
$\overrightarrow{AT}\cdot\overrightarrow{EC} = -a^2 \quad +\frac{1}{2}\left(a^2 \quad + \quad a^2 \quad + \quad 0 \quad\right)$

Donc $\overrightarrow{AT}\cdot\overrightarrow{EC} = 0$ et <u>les droites (AT) et (EC) sont orthogonales.</u>

1. Pour plus de précisions sur la relation de Chasles consultez : www.Math93.com/Chasles

Exercice 4. **5 points**

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier nature n :

$$u_{n+1} = \frac{1+3u_n}{3+u_n}.$$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. **Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :** $u_n > 1$.
Considérons la propriété (ou prédicat) :

$$(\mathscr{P}_n) \ : \ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_n > 1$$

– **Initialisation** : Pour $n = 0$ on a $u_0 = 2 > 1$ donc $(\mathscr{P}_0)$ est vérifiée.

– **Hérédité** : Supposons que pour l'entier n fixé, $(\mathscr{P}_n)$ soit vraie et donc que $u_n > 1$.
Alors
$u_{n+1} = \dfrac{1+3u_n}{3+u_n} = \dfrac{3+u_n-2+2u_n}{3+u_n} = 1 + \dfrac{-2+2u_n}{3+u_n}$
$u_{n+1} = 1 + 2 \times \dfrac{u_n - 1}{3+u_n}$
Or puisque $u_n > 1$, on a $\dfrac{u_n-1}{3+u_n} > 0$ et donc $1 + 2 \times \dfrac{u_n-1}{3+u_n} > 1$
De ce fait, $(\mathscr{P}_{n+1})$ est aussi vraie.

– **Conclusion** : La propriété $(\mathscr{P}_n)$ est vraie au rang 0. En la supposant vraie au rang n , elle est encore vraie au rang suivant $n+1$. Donc $\boxed{\text{pour tout entier naturel, } u_n > 1}$.

2. **a. Établir que, pour tout entier naturel n, on a :** $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}$.

Pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1+3u_n}{3+u_n} - u_n \\ &= \frac{1+3u_n-3u_n-u_n^2}{3+u_n} \\ u_{n+1}-u_n &= \frac{1-u_n^2}{3+u_n} \end{aligned}$$

Pour tout entier naturel n, on a :

$$\boxed{u_{n+1} - u_n = \frac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}}$$

b. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
On a montré à la question 1°) que pour tout entier naturel $u_n > 1$, de ce fait $(1-u_n) < 1$ et donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \ : \ u_{n+1} - u_n < 0}$$

<u>La suite (u_n) est donc décroissante</u>.

En déduire que la suite (u_n) converge.
La suite (u_n) est donc décroissante et minorée par 1 d'après la question 1°), donc elle est convergente vers un réel l avec $l \leq 1$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier nature n :

$$u_{n+1} = \frac{1+0,5u_n}{0,5+u_n}.$$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. On considère l'algorithme suivant :

Entrée	Soit un entier naturel non nul n
Initialisation	Affecter à u la valeur 2
Traitement et sortie	POUR i allant de 1 à n Affecter à u la valeur $\dfrac{1+0,5u}{0,5+u}$ Afficher u
	FIN POUR

Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $n = 3$. Les valeurs de u seront arrondies au millième.

i	1	2	3
u	0,800	1,077	0,976

2. Pour $n = 12$, on a prolongé le tableau précédent et on a obtenu :

i	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u	1,008 3	0,997 3	1,000 9	0,999 7	1,000 1	0,999 97	1,000 01	0,999 996	1,000 001

Conjecturer le comportement de la suite (u_n) à l'infini.
Il semblerait que la suite (u_n) « oscille » autour de 1 tout en tendant vers 1.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

Remarque : On admet que tous les termes de la suite u_n sont définis et strictement positifs, de ce fait, pour tout entier n, $u_n \neq -1$ et la suite (v_n) est bien définie.

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.
Pour entier naturel n on a :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1} = \frac{\dfrac{1+0,5u_n}{0,5+u_n}-1}{\dfrac{1+0,5u_n}{0,5+u_n}+1}$$

$$v_{n+1} = \frac{\dfrac{1+0,5u_n-0,5-u_n}{0,5+u_n}}{\dfrac{1+0,5u_n+0,5+u_n}{0,5+u_n}} = \frac{0,5-0,5u_n}{1,5+1,5u_n}$$

$$v_{n+1} = \frac{0,5}{1,5}\times\frac{1-u_n}{1+u_n} = -\frac{1}{3}\times\frac{u_n-1}{u_n+1}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ v_{n+1} = -\frac{1}{3}v_n}.$$

La suite (v_n) est géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

b. Calculer v_0 puis écrire v_n en fonction de n.

– On a donc pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$

- Or $v_0 = \dfrac{u_0 - 1}{u_0 + 1} = \dfrac{2-1}{2+1} = \dfrac{1}{3}$.
- De ce fait :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \ v_n = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n}$$

4. **a. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :** $v_n \neq 1$.

Pour tout entier n en a :
$|v_n| = \left|\dfrac{1}{3} \times \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n\right| = \dfrac{1}{3^{n+1}} \leq \dfrac{1}{3}$.

Donc pour tout entier naturel n , on a : $\boxed{v_n \neq 1}$.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \dfrac{1+v_n}{1-v_n}$.

Pour tout entier naturel n, $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$, donc

$$\begin{array}{rclrcll}
v_n & = & \dfrac{u_n-1}{u_n+1} & \iff & (u_n+1)\,v_n & = & u_n - 1 & : \text{ car } (u_n+1) \neq 0 \\
 & & & \iff & u_n v_n + v_n - u_n & = & -1 & \\
 & & & \iff & u_n\,(v_n - 1) & = & -1 - v_n & : \text{ et puisque } (v_n - 1) \neq 0 \\
 & & & \iff & u_n & = & \dfrac{-1-v_n}{v_n - 1} & \\
 & & & \iff & u_n & = & \dfrac{1 v_n}{1 - v_n} &
\end{array}$$

Pour tout entier naturel n, on a : $\boxed{u_n = \dfrac{1+v_n}{1-v_n}}$.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

- La suite (v_n) est géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$ donc elle tend vers 0 en $+\infty$;
- On a montré que : pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \dfrac{1+v_n}{1-v_n}$;
- De ce fait on a : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1}$