

## Correction Baccalauréat S - Spécialité ASIE - Mercredi 19 Juin 2013

www.math93.com / www.mathexams.fr

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

**Exercice 1.**

**5 points**

**Commun à tous les candidats**

Dans cet exercice, les probabilités seront arrondies au centième.

**Partie A**

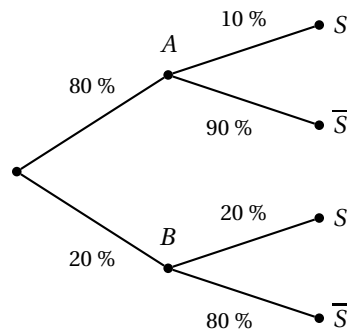
Un grossiste achète des boîtes de thé vert chez deux fournisseurs. Il achète 80 % de ses boîtes chez le fournisseur A et 20 % chez le fournisseur B.

10 % des boîtes provenant du fournisseur A présentent des traces de pesticides et 20 % de celles provenant du fournisseur B présentent aussi des traces de pesticides.

On prélève au hasard une boîte du stock du grossiste et on considère les événements suivants :

- événement A : « la boîte provient du fournisseur A » ;
- événement B : « la boîte provient du fournisseur B » ;
- événement S : « la boîte présente des traces de pesticides ».

**1. Traduire l'énoncé sous forme d'un arbre pondéré.**



**2. a. Quelle est la probabilité de l'évènement  $B \cap \bar{S}$  ?**

$$P(B \cap \bar{S}) = P_B(\bar{S}) \times P(B)$$

$$P(B \cap \bar{S}) = 80 \% \times 20 \%$$

$$P(B \cap \bar{S}) = 16 \%$$

**b. Justifier que la probabilité que la boîte prélevée ne présente aucune trace de pesticides est égale à 0,88.**

Les événements A et B forment une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales on a :

$$P(\bar{S}) = P(A \cap \bar{S}) + P(B \cap \bar{S})$$

$$P(\bar{S}) = P_A(\bar{S}) \times P(A) + 16 \%$$

$$P(\bar{S}) = 80 \% \times 90 \% + 16 \%$$

$$P(\bar{S}) = 72 \% + 16 \%$$

Donc on a bien  $P(\bar{S}) = 88 \% = 0,88$ .

**3. On constate que la boîte prélevée présente des traces de pesticides.**

**Quelle est la probabilité que cette boîte provienne du fournisseur B ?**

On cherche  $P_S(B) = \frac{P(B \cap S)}{P(S)} = \frac{20 \% \times 20 \%}{1 - 88 \%} = \frac{4 \%}{12 \%} = \frac{1}{3}$  soit  $P_S(B) \approx 33 \%$

**Partie B**

Le gérant d'un salon de thé achète 10 boîtes chez le grossiste précédent. On suppose que le stock de ce dernier est suffisamment important pour modéliser cette situation par un tirage aléatoire de 10 boîtes avec remise. On considère la variable aléatoire  $X$  qui associe à ce prélèvement de 10 boîtes, le nombre de boîtes sans trace de pesticides.

**1. Justifier que la variable aléatoire  $X$  suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.**

Les 10 tirages sont aléatoires et indépendants. Chaque tirage ne possède que 2 issues,  $S$  et  $\bar{S}$ , donc correspond à une épreuve de Bernoulli de paramètre  $p = P(\bar{S}) = 0,88$ .

La variable aléatoire  $X$  suit donc la loi binomiale de paramètres  $n = 10$  et  $p = 0,88$ .

**2. Calculer la probabilité que les 10 boîtes soient sans trace de pesticides.**

$$P(X = 10) = P(\bar{S})^{10} = 0,88^{10}, \text{ donc } \boxed{P(X = 10) \approx 0,28}$$

**3. Calculer la probabilité qu'au moins 8 boîtes ne présentent aucune trace de pesticides.**

On cherche  $P(X \geq 8)$ .

$$P(X \geq 8) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)$$

$$P(X \geq 8) = \binom{10}{8} \times 0,88^8 \times 0,12^2 + \binom{10}{9} \times 0,88^9 \times 0,12^1 + 0,88^{10}$$

$$\text{Soit } \boxed{P(X \geq 8) \approx 0,89}$$

**Partie C**

À des fins publicitaires, le grossiste affiche sur ses plaquettes : « 88 % de notre thé est garanti sans trace de pesticides ».

Un inspecteur de la brigade de répression des fraudes souhaite étudier la validité de l'affirmation. À cette fin, il prélève 50 boîtes au hasard dans le stock du grossiste et en trouve 12 avec des traces de pesticides.

On suppose que, dans le stock du grossiste, la proportion de boîtes sans trace de pesticides est bien égale à 0,88.

On note  $F$  la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 50 boîtes, associe la fréquence des boîtes ne contenant aucune trace de pesticides.

**1. Donner l'intervalle de fluctuation asymptotique de la variable aléatoire  $F$  au seuil de 95 %.**

On a  $n = 50$ ,  $p = 88\%$  alors on sait que puisque  $n = 50 \geq 30$ ,  $np = 44 \geq 5$  et  $n(1 - p) = 6 \geq 5$ , l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95% pour la fréquence  $F$  est :

$$I_{50} = \left[ p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] \text{ soit } \boxed{I \approx [0,78 ; 0,97]}$$

**2. L'inspecteur de la brigade de répression peut-il décider, au seuil de 95 %, que la publicité est mensongère ?**

La fréquence observée de boîtes ne contenant pas de pesticide est  $\boxed{f = \frac{50 - 12}{52} = 0,76 \notin I_{50}}$ .

L'échantillon n'est pas représentatif de ce qu'annonce le grossiste. L'inspecteur de la brigade de répression peut décider que la publicité est mensongère.

## Exercice 2.

6 points

## Commun à tous les candidats

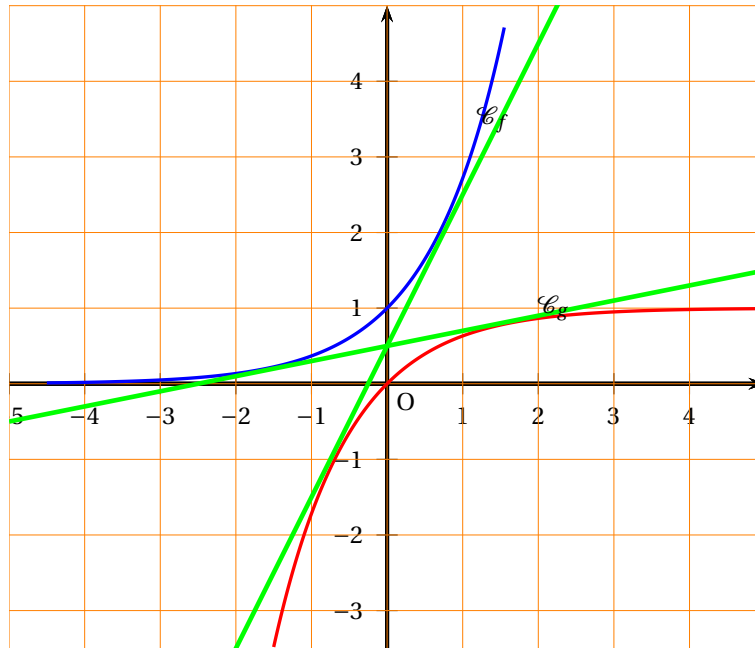
On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies pour tout réel  $x$  par :

$$f(x) = e^x \quad \text{et} \quad g(x) = 1 - e^{-x}.$$

Les courbes représentatives de ces fonctions dans un repère orthogonal du plan, notées respectivement  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$ , sont fournies en annexe.

## Partie A

Ces courbes semblent admettre deux tangentes communes. Tracer aux mieux ces tangentes sur la figure de l'annexe.



## Partie B

Dans cette partie, on admet l'existence de ces tangentes communes.

On note  $\mathcal{D}$  l'une d'entre elles. Cette droite est tangente à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point A d'abscisse  $a$  et tangente à la courbe  $\mathcal{C}_g$  au point B d'abscisse  $b$ .

1. a. **Exprimer en fonction de  $a$  le coefficient directeur de la tangente à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point A.**

La fonction  $f$  est dérivable car la fonction  $x \mapsto e^x$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Le coefficient directeur de la tangente à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point  $A(a; f(a))$  est le nombre dérivé  $f'(a) = e^a$ .

- b. **Exprimer en fonction de  $b$  le coefficient directeur de la tangente à la courbe  $\mathcal{C}_g$  au point B.**

La fonction  $g$  est dérivable car la fonction  $x \mapsto e^{-x}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  avec  $g'(x) = -(-e^{-x}) = e^{-x}$ . Le coefficient directeur de la tangente à la courbe  $\mathcal{C}_g$  au point  $B(b; f(b))$  est le nombre dérivé  $f'(b) = e^{-b}$ .

- c. **En déduire que  $b = -a$ .**

Si les tangentes sont communes, elles ont même coefficient directeur et donc les réels  $a$  et  $b$  vérifient :

$$f'(a) = g'(b) \iff e^a = e^{-b}$$

$f'(a) = g'(b) \iff a = -b$  car la fonction  $x \mapsto e^x$  est bijective car strictement croissante et continue sur  $\mathbb{R}$ . On en déduit que  $b = -a$ .

**2. Démontrer que le réel  $a$  est solution de l'équation :  $2(x-1)e^x + 1 = 0$ .**

- Une équation de la tangente à  $\mathcal{C}_f$  au point A d'abscisse  $a$  est  $y = f'(a)(x - a) + f(a)$  soit  $y = e^a \times (x - a) + e^a$  donc  $y = xe^a + e^a(1 - a)$ .
  - Une équation de la tangente à  $\mathcal{C}_g$  au point B d'abscisse  $b$  est  $y = g'(b)(x - b) + g(b)$  soit  $y = e^{-b} \times (x - b) + 1 - e^{-b}$  donc puisque  $b = -a$  on a  $y = e^a \times (x + a) + 1 - e^a$  d'où  $y = xe^a + e^a(a - 1) + 1$ .
  - Le réel  $a$  vérifie donc :  $xe^a + e^a(1 - a) = xe^a + e^a(a - 1) + 1$ .  
Soit  $e^a(1 - a) = e^a(a - 1) + 1 \iff e^a - ae^a - ae^a + e^a - 1 = 0$   
 $\iff (-2a + 2)e^a - 1 = 0$   
 $\iff 2(a - 1)e^a + 1 = 0$
- Le réel  $a$  est donc solution de l'équation :  $2(x - 1)e^x + 1 = 0$ .

**Partie C**

On considère la fonction  $\varphi$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\varphi(x) = 2(x - 1)e^x + 1.$$

**1. a. Calculer les limites de la fonction  $\varphi$  en  $-\infty$  et  $+\infty$ .**

- En  $+\infty$ .  

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} 2(x - 1) & = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x & = +\infty \end{cases}, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$$
- En  $-\infty$ .  
 On a  $\varphi(x) = 2xe^x - e^x + 1$  et  

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} 2xe^x & = 0 \text{ (Croissances comparées)} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x & = 0 \end{cases}, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = 1$$

**b. Calculer la dérivée de la fonction  $\varphi$ , puis étudier son signe.**

La fonction  $\varphi$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme composée de fonctions qui le sont.  
 En posant  $\begin{cases} u(x) = 2(x - 1) & ; & u'(x) = 2 \\ v(x) = e^x & ; & v'(x) = e^x \end{cases}$ , on a  $\varphi(x) = u(x)v(x) + 1$  et donc :  
 $\varphi'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$  soit  
 $\varphi'(x) = 2e^x + 2(x - 1)e^x$   
 Pour tout réel  $x$ ,  $\varphi'(x) = 2xe^x$ .

Or pour tout réel  $x$ ,  $e^x > 0$  donc  $\varphi'(x)$  est du signe de  $2x$ .

$$\begin{cases} \forall x \in ]0; +\infty[ & , & \varphi'(x) > 0 \\ \forall x \in ]-\infty; 0[ & , & \varphi'(x) < 0 \end{cases}$$

**c. Dresser le tableau de variation de la fonction  $\varphi$  sur  $\mathbb{R}$ . Préciser la valeur de  $\varphi(0)$ .**

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$\varphi'(x)$	$-$	$0$	$+$
$\varphi$	$1 \swarrow \searrow$ $\varphi(0) = -1$ $\nearrow \nwarrow$ $+\infty$		

2. a. Démontrer que l'équation  $\varphi(x) = 0$  admet exactement deux solutions dans  $\mathbb{R}$ .

- La fonction  $\varphi$  est **continue** et **strictement décroissante** sur l'intervalle  $] -\infty ; 0]$  ;
- L'image par  $\varphi$  de l'intervalle  $] -\infty ; 0]$  est  $[-1 ; 1[$  d'après le tableau de variations.
- Le réel  $k = 0$  appartient à l'intervalle image  $[-1 ; 1[$ .

Donc, d'après le **corollaire du théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation  $\varphi(x) = k = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  sur l'intervalle  $] -\infty ; 0]$ .

De même :

- La fonction  $\varphi$  est **continue** et **strictement croissante** sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  ;
- L'image par  $\varphi$  de l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  est  $[-1 ; +\infty[$  d'après le tableau de variations.
- Le réel  $k = 0$  appartient à l'intervalle image  $[-1 ; +\infty[$ .

Donc, d'après le **corollaire du théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation  $\varphi(x) = k = 0$  admet une solution unique  $\beta$  sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ .

Pour conclure : l'équation  $\varphi(x) = 0$  admet exactement deux solutions dans  $\mathbb{R}$ .

b. On note  $\alpha$  la solution négative de l'équation  $\varphi(x) = 0$  et  $\beta$  la solution positive de cette équation.

$$\varphi(x) = 2(x-1)e^x + 1.$$

À l'aide d'une calculatrice, donner les valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  arrondies au centième.

- Encadrement de  $\alpha$ .

Pour avoir un encadrement de  $\alpha$ , on peut utiliser la fonction TABLE de la calculatrice.

Avec un pas de  $\Delta = 0,1$  on obtient :  $\begin{cases} \varphi(-1,7) \approx 0,0135 > 0 \\ \varphi(-1,6) \approx -0,0499 < 0 \end{cases}$  , donc  $-1,7 \leq \alpha \leq -1,6$ .

Avec un pas de  $\Delta = 0,01$  on obtient :  $\begin{cases} \varphi(-1,68) \approx 0,00104 > 0 \\ \varphi(-1,67) \approx -0,0052 < 0 \end{cases}$  , donc  $\boxed{-1,68 \leq \alpha \leq -1,67}$ .

- Encadrement de  $\beta$ .

Avec un pas de  $\Delta = 0,1$  on obtient :  $\begin{cases} \varphi(0,7) \approx -0,2083 < 0 \\ \varphi(0,8) \approx 0,10978 > 0 \end{cases}$  , donc  $0,7 \leq \beta \leq 0,8$ .

Avec un pas de  $\Delta = 0,01$  on obtient :  $\begin{cases} \varphi(0,76) \approx -0,0264 < 0 \\ \varphi(0,77) \approx 0,00651 > 0 \end{cases}$  , donc  $\boxed{0,76 \leq \beta \leq 0,77}$ .

**Partie D**

Dans cette partie, on démontre l'existence de ces tangentes communes, que l'on a admise dans la partie B.

On note E le point de la courbe  $\mathcal{C}_f$  d'abscisse  $a$  et F le point de la courbe  $\mathcal{C}_g$  d'abscisse  $-a$  ( $a$  est le nombre réel défini dans la partie C).

1. Démontrer que la droite (EF) est tangente à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point E.

- Les points E et F sont de coordonnées  $E(a ; e^a)$  et  $F(-a ; 1 - e^a)$

- Une équation de la tangente à  $\mathcal{C}_f$  au point E d'abscisse  $a$  est  $\boxed{(T_1) : y = xe^a + e^a(1 - a)}$ .

- Montrons que le point  $F(-a ; 1 - e^a)$  appartient à cette droite.

- En remplaçant  $x$  par  $-a$  dans l'équation  $(T_1)$  on obtient  $y_F = -ae^a + e^a(1 - a)$  soit :

$$\boxed{y_F = e^a(1 - 2a)} \tag{1}$$

- En outre, d'après la question B2, le réel  $a$  est solution de l'équation  $2(x-1)e^x + 1 = 0$  et de ce fait :

$$\boxed{2(a-1)e^a + 1 = 0} \tag{2}$$

- De l'équation (2) on obtient  
 $2ae^a - 2e^a + 1 = 0$   
 $1 - e^a - e^a + 2ae^a = 0$  soit  
 $1 - e^a = e^a - 2ae^a$  et donc  $1 - e^a = (1 - 2a)e^a$

- En réinjectant cela dans l'équation (1) on obtient :  $y_F = 1 - e^a$

Le point  $F(-a; 1 - e^a)$  appartient à cette droite et donc la droite (EF) est tangente à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point E .

## 2. Démontrer que (EF) est tangente à $\mathcal{C}_g$ au point F.

- Les points  $E$  et  $F$  sont de coordonnées  $E(a; e^a)$  et  $F(-a; 1 - e^a)$
- Une équation de la tangente à  $\mathcal{C}_g$  au point F d'abscisse  $-a$  est  $(T_2) : y = xe^a + e^a(a - 1) + 1$ .
- Montrons que le point  $E(a; e^a)$  appartient à cette droite.

- En remplaçant  $x$  par  $a$  dans l'équation  $(T_2)$  on obtient  $y_E = ae^a + e^a(a - 1) + 1$  soit :

$$y_E = (2a - 1)e^a + 1 \quad (3)$$

- En outre, d'après la question B2, le réel  $a$  est solution de l'équation  $2(x - 1)e^x + 1 = 0$  et de ce fait :

$$2(a - 1)e^a + 1 = 0 \quad (4)$$

- De l'équation (4) on obtient  
 $2ae^a - 2e^a + 1 = 0$   
 $2ae^a - e^a - e^a + 1 = 0$  soit  
 $(2a - 1)e^a - e^a + 1 = 0$  et donc  $(2a - 1)e^a + 1 = e^a$

- En réinjectant cela dans l'équation (3) on obtient :  $y_E = e^a$

Le point  $E(a; e^a)$  appartient à cette droite et donc la droite (EF) est tangente à la courbe  $\mathcal{C}_g$  au point F .

## Exercice 3.

4 points

## Commun à tous les candidats

Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.

Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si chacune d'elles est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Dans les questions 1. et 2., le plan est rapporté au repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On considère les points A, B, C, D et E d'affixes respectives :

$$a = 2 + 2i, \quad b = -\sqrt{3} + i, \quad c = 1 + i\sqrt{3}, \quad d = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{et} \quad e = -1 + (2 + \sqrt{3})i.$$

1. **L'affirmation 1 est VRAIE** : les points A, B et C sont alignés.

$$\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \arg\left(\frac{(1 + i\sqrt{3}) - (2 + 2i)}{(-\sqrt{3} + i) - (2 + 2i)}\right)$$

$$\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right) = \arg\left(\frac{-1 + (-2 + \sqrt{3})i}{(-2 - \sqrt{3}) - i}\right) = \arg\left(\frac{1 + (2 - \sqrt{3})i}{(2 + \sqrt{3}) + i}\right)$$

$$\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right) = \arg\left(\frac{1 + (2 - \sqrt{3})i}{(2 + \sqrt{3})(1 + (2 - \sqrt{3})i)}\right), \text{ car } (2 - \sqrt{3}) \times (2 + \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$$

$$\text{Donc } \left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right) = \arg\left(\frac{1}{2 + \sqrt{3}}\right) = 0[\pi], \text{ les points A, B et C sont alignés.}$$

2. **L'affirmation 2 est FAUSSE** : les points B, C et D n'appartiennent pas à un même cercle de centre E.

$$EB = |z_B - z_E| = |-\sqrt{3} + i - (-1 + (2 + \sqrt{3})i)| = |1 - \sqrt{3} + (3 + \sqrt{3})i|$$

$$EB = \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2 + (3 + \sqrt{3})^2}$$

$$EB = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ unités.}$$

$$ED = |z_D - z_E| = \left| -1 + \frac{\sqrt{3}}{2}i - (-1 + (2 + \sqrt{3})i) \right| = \left| \left( -2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) i \right|$$

$$ED = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ unités.}$$

Il n'est pas nécessaire de calculer EC, puisque  $ED \neq EB$ .

Les points B et D n'appartiennent pas au même cercle de centre E, ce qui met en défaut l'affirmation.

Pour information, on trouve  $EC = EB = 2\sqrt{2}$  unités.

Les points B et C appartiennent eux au même cercle de centre E.

3. Dans cette question, l'espace est muni d'un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère les points I(1 ; 0 ; 0), J(0 ; 1 ; 0) et K(0 ; 0 ; 1).

$$\text{L'affirmation 3 est VRAIE} : \text{ la droite } \mathcal{D} \text{ de représentation paramétrique } \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 6 - 2t \\ z = -2 + t \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}, \text{ coupe}$$

le plan (IJK) au point E  $\left(-\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2}\right)$ .

On obtient facilement une équation cartésienne du plan (IJK) :  $x + y + z - 1 = 0$ .

Puis on remplace dans cette équation  $x$ ,  $y$  et  $z$  par leur expression en fonction de  $t$  pour avoir les coordonnées du point d'intersection (si il existe) :

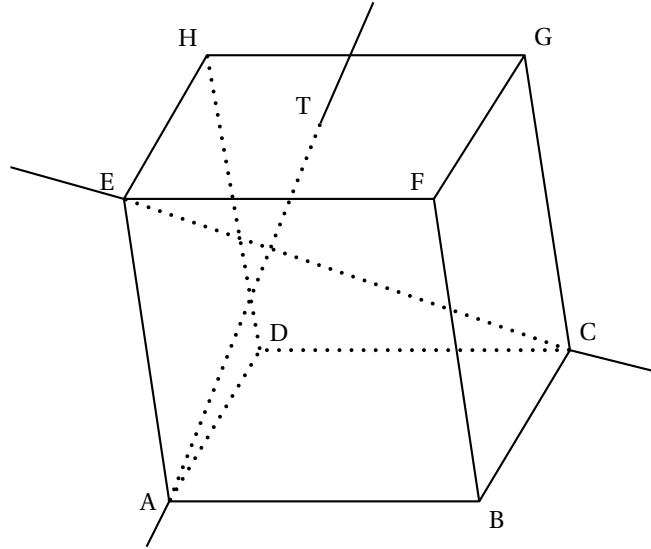
$$(2 - t) + (6 - 2t) + (-2 + t) - 1 = 5 - 2t = 0 \text{ soit } t = \frac{5}{2}.$$

Or pour  $t = \frac{5}{2}$ , on obtient bien :

$$\begin{cases} x_E = 2 - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2} \\ y_E = 6 - 2 \times \frac{5}{2} = 1 \\ z_E = -2 + \frac{5}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Remarque : On pouvait aussi vérifier que les coordonnées du point E vérifiaient les équations du plan et de la droite.

4. Dans le cube ABCDEFGH, le point T est le milieu du segment [HF].



**L'affirmation 4 est VRAIE** : les droites (AT) et (EC) sont orthogonales.

Du classique, utilisons la relation de Chasles<sup>1</sup>

$$\overrightarrow{AT} \cdot \overrightarrow{EC} = \left( \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2} (\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{EF}) \right) \cdot \left( \overrightarrow{EA} + (\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{EF}) \right)$$

$$\overrightarrow{AT} \cdot \overrightarrow{EC} = -AE^2 + \frac{1}{2} \left( EH^2 + EF^2 + 2\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{EF} \right), \text{ et si on pose } AE = a$$

$$\overrightarrow{AT} \cdot \overrightarrow{EC} = -a^2 + \frac{1}{2} (a^2 + a^2 + 0)$$

Donc  $\overrightarrow{AT} \cdot \overrightarrow{EC} = 0$  et les droites (AT) et (EC) sont orthogonales.

1. Pour plus de précisions sur la relation de Chasles consultez : [www.Math93.com/Chasles](http://www.Math93.com/Chasles)

## Exercice 4.

5 points

## Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Un logiciel permet de transformer un élément rectangulaire d'une photographie. Ainsi, le rectangle initial OEFG est transformé en un rectangle OE'F'G', appelé image de OEFG.

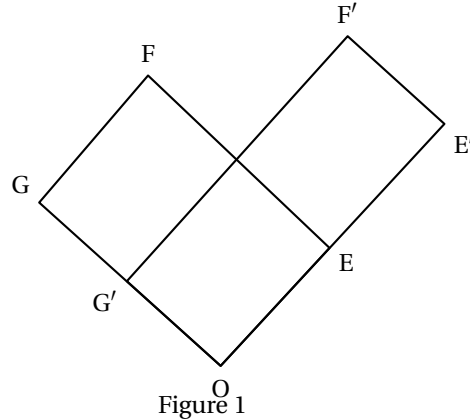


Figure 1

L'objet de cet exercice est d'étudier le rectangle obtenu après plusieurs transformations successives.

**Partie A**

Le plan est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Les points E, F et G ont pour coordonnées respectives  $(2; 2)$ ,  $(-1; 5)$  et  $(-3; 3)$ .

La transformation du logiciel associe à tout point  $M(x; y)$  du plan le point  $M'(x'; y')$ , image du point  $M$  tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}y \\ y' = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}y \end{cases}$$

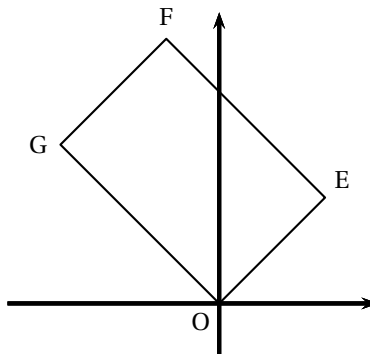


Figure 2

1. a. Calculer les coordonnées des points E', F' et G', images des points E, F et G par cette transformation.

– Pour E' l'image de E(2 ; 2) :

$$\begin{cases} x_{E'} = \frac{5}{4} \times 2 + \frac{3}{4} \times 2 = 4 \\ y_{E'} = \frac{3}{4} \times 2 + \frac{5}{4} \times 2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{E'(4; 4)}$$

– Pour F' l'image de F(-1 ; 5) :

$$\begin{cases} x_{F'} = \frac{5}{4} \times (-1) + \frac{3}{4} \times 5 = 2,5 \\ y_{F'} = \frac{3}{4} \times (-1) + \frac{5}{4} \times 5 = 5,5 \end{cases} \Rightarrow \boxed{F'(2,5; 5,5)}$$

– Pour  $G'$  l'image de  $G(-3; 3)$  :

$$\begin{cases} x_{G'} = \frac{5}{4} \times (-3) + \frac{3}{4} \times 3 = -1,5 \\ y_{G'} = \frac{3}{4} \times (-3) + \frac{5}{4} \times 3 = 1,5 \end{cases} \Rightarrow \boxed{G'(-1,5; 1,5)}$$

**b. Comparer les longueurs  $OE$  et  $OE'$  d'une part,  $OG$  et  $OG'$  d'autre part.**

– Comparaison des longueurs : (en unité de longueur)

– On a  $\boxed{OE = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}}$  et  $\boxed{OE' = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}}$  donc  $\boxed{OE = 2 OE'}$  ;

– Puis  $\boxed{OG = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}}$  et  $\boxed{OG' = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{2}}$  donc  $\boxed{OG = 2 OG'}$  ;

– Matrice A :

On cherche la matrice carrée d'ordre 2, notée  $A$ , telle que :  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ .

$$\begin{cases} x' = \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}y \\ y' = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}y \end{cases} \Rightarrow \boxed{A = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}}$$

**Partie B**

Dans cette partie, on étudie les coordonnées des images successives du sommet F du rectangle OEF G lorsqu'on applique plusieurs fois la transformation du logiciel.

1. On considère l'algorithme suivant destiné à afficher les coordonnées de ces images successives. Une erreur a été commise.

Entrée	Saisir un entier naturel non nul $N$
Initialisation	Affecter à $x$ la valeur $-1$ Affecter à $y$ la valeur $5$
Traitement	POUR $i$ allant de $1$ à $N$ Affecter à $a$ la valeur $\frac{5}{4}x + \frac{3}{4}y$ Affecter à $b$ la valeur $\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}y$ Affecter à $x$ la valeur $a$ Affecter à $y$ la valeur $b$ FIN POUR
Sortie	Afficher $x$ , afficher $y$

**Modifier cet algorithme pour qu'il permette d'afficher ces coordonnées.**

Il faut intégrer dans la boucle l'affichage de  $x$  et de  $y$  donc l'algorithme modifié est :

Entrée	Saisir un entier naturel non nul $N$
Initialisation	Affecter à $x$ la valeur $-1$ Affecter à $y$ la valeur $5$
Traitement	POUR $i$ allant de $1$ à $N$ Affecter à $a$ la valeur $\frac{5}{4}x + \frac{3}{4}y$ Affecter à $b$ la valeur $\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}y$ Affecter à $x$ la valeur $a$ Affecter à $y$ la valeur $b$ <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">Afficher <math>x</math>, afficher <math>y</math></span> FIN POUR
Sortie	

2. On a obtenu le tableau suivant :

$i$	1	2	3	4	5	10	15
$x$	2,5	7,25	15,625	31,8125	63,9063	2047,9971	65535,9999
$y$	5,5	8,75	16,375	32,1875	64,0938	2048,0029	65536,0001

**Conjecturer le comportement de la suite des images successives du point F.**

La suite constituée des abscisses des points semble être croissante et avoir pour limite  $+\infty$ . Il est en de même pour les ordonnées.

### Partie C

Dans cette partie, on étudie les coordonnées des images successives du sommet E du rectangle OEFG. On définit la suite des points  $E_n(x_n; y_n)$  du plan par  $E_0 = E$  et la relation de récurrence :

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

où  $(x_{n+1}; y_{n+1})$  désignent les coordonnées du point  $E_{n+1}$ .

Ainsi  $x_0 = 2$  et  $y_0 = 2$ .

1. On admet que, pour tout entier  $n \geq 1$ , la matrice  $A^n$  peut s'écrire sous la forme :  $A^n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix}$ .

**Démontrons par récurrence la propriété  $(\mathcal{P}_n)$ .**

Considérons la propriété (ou prédicat) :

$$(\mathcal{P}_n) : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, \alpha_n = 2^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}} \quad \text{et} \quad \beta_n = 2^{n-1} - \frac{1}{2^{n+1}}$$

- **Initialisation** : Pour  $n = 1$  on a  $\begin{cases} 2^{1-1} + \frac{1}{2^{1+1}} = \frac{5}{4} = \alpha_1 \\ 2^{1-1} - \frac{1}{2^{1+1}} = \frac{3}{4} = \beta_1 \end{cases}$

On a bien  $A^1 = A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \beta_1 & \alpha_1 \end{pmatrix}$  donc  $(\mathcal{P}_1)$  est vérifiée.

- **Hérédité** : Supposons que pour l'entier  $n$  fixé,  $(\mathcal{P}_n)$  soit vraie

Alors

$$A^{n+1} = A \times A^n = A \times \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}} & 2^{n-1} - \frac{1}{2^{n+1}} \\ 2^{n-1} - \frac{1}{2^{n+1}} & 2^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{n+1} & \beta_{n+1} \\ \beta_{n+1} & \alpha_{n+1} \end{pmatrix}$$

Alors :

$$\begin{array}{l} \alpha_{n+1} = \frac{5}{4} \times \left( 2^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}} \right) + \frac{3}{4} \left( 2^{n-1} - \frac{1}{2^{n+1}} \right) \\ \alpha_{n+1} = \left( \frac{5}{4} + \frac{3}{4} \right) 2^{n-1} + \left( \frac{5}{4} - \frac{3}{4} \right) \frac{1}{2^{n+1}} \\ \alpha_{n+1} = 2 \times 2^{n-1} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{n+1}} \\ \boxed{\alpha_{n+1} = 2^n + \frac{1}{2^{n+2}}} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \beta_{n+1} = \frac{5}{4} \times \left( 2^{n-1} - \frac{1}{2^{n+1}} \right) + \frac{3}{4} \left( 2^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}} \right) \\ \beta_{n+1} = \left( \frac{5}{4} + \frac{3}{4} \right) 2^{n-1} + \left( -\frac{5}{4} + \frac{3}{4} \right) \frac{1}{2^{n+1}} \\ \beta_{n+1} = 2 \times 2^{n-1} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{n+1}} \\ \boxed{\beta_{n+1} = 2^n - \frac{1}{2^{n+2}}} \end{array}$$

De ce fait,  $(\mathcal{P}_{n+1})$  est aussi vraie.

- **Conclusion** : La propriété  $(\mathcal{P}_n)$  est vraie au rang  $n = 1$ . En la supposant vraie au rang  $n$ , elle est encore vraie au rang suivant  $n + 1$ . Donc pour tout entier  $n$ ,  $(\mathcal{P}_n)$  est vraie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, \alpha_n = 2^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}} \quad \text{et} \quad \beta_n = 2^{n-1} - \frac{1}{2^{n+1}}$$

2. a. **Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ , le point  $E_n$  est situé sur la droite d'équation  $y = x$ .**  
On pourra utiliser que, pour tout entier naturel  $n$ , les coordonnées  $(x_n ; y_n)$  du point  $E_n$  vérifient :

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{On a } \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ donc } \begin{cases} x_n = 2\alpha_n + 2\beta_n \\ y_n = 2\alpha_n + 2\beta_n \end{cases}$$

On a bien  $x_n = y_n$  et donc pour tout entier naturel  $n$ , le point  $E_n$  est situé sur la droite d'équation  $y = x$ .

- b. **Démontrer que la longueur  $OE_n$  tend vers  $+\infty$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .**

$$OE_n = \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x_n = 2 \times (\alpha_n + \beta_n) = 2(2^{n-1} + 2^{n-1}) = 2^{n+1} \\ y_n = x_n \end{cases}$$

Soit

$$OE_n = \sqrt{2x_n^2} = \sqrt{2} \times |x_n| \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x_n = 2^{n+1} \\ y_n = x_n \end{cases}$$

Donc puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{n+1} = +\infty$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} OE_n = +\infty$$