BREVET BLANC
SESSION 2018

Épreuve de :

MATHÉMATIQUES
SÉRIE GÉNÉRALE

Collège Victor Duruy
75007 Paris

CORRIGÉ

Durée de l'épreuve : 2 heures

BARÈME (sur 100 points)			
Exercice 1	:	10	points
Exercice 2	:	18	points
Exercice 3	:	16	points
Exercice 4	:	10	points
Exercice 5	:	8	points
Exercice 6	:	10	points
Exercice 7	:	12	points
Exercice 8	:	10	points
Maitrise de la langue	:	6	points

EXERCICE 1 — 10 points (5×2)pts

Questions	Affirmations			
	A	B	C	D
1. Combien faut-il environ de CD de 700 Mégaoctets pour stocker autant de données qu'une clé de 32 Gigaoctets ?	A : 46			
2. La diagonale d'un rectangle de 10 cm par 20 cm mesure environ :		B : 22 cm		
3. Une solution de l'équation ci-dessous est : $2x+3=7x-4$		B : 1,4		
4. Le prix d'un article augmente de 20% puis diminue de 20%, après ces deux évolutions, le prix de l'article			C : est inférieur au prix initial	
5. La notation scientifique du nombre $A=\dfrac{5\times10^{-1\,200}\times0,21}{7\times10^{-1\,205}\times0,3}$		B : 5×10^4		

1. Un gigaoctet vaut 1 000 mégaoctets, donc 32 Go = 32×10^3 Mo.

   Il faut donc $\dfrac{32\times10^3}{700}\approx45,7$, soit 46 CD de 700 Mo.

   Remarque : on dit souvent en informatique que 1 ko = 1 024 octets, et 1 Mo = 1 048 576 octets, mais l'organisme mondial de standardisation IEEE a précisé que l'utilisation de ko pour désigner 1024 octets est erronée mais tolérée.

2. D'après le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle de côtés perpendiculaires 10 cm et 20 cm, la mesure de l'hypoténuse d vérifie :

$$d^2=10^2+20^2=100+400=500$$

   donc puisque d est positif

$$d=\sqrt{500}\approx22,3$$

   soit environ 22 cm à l'unité près.

3. Équation :

$$2x+3=7x-4\iff3+4=7x-2x\iff7=5x\iff x=\frac{7}{5}=\frac{14}{10}=1,4$$

4. Augmenter une valeur de 20% c'est multiplier par $(1+20\%)=1,2$ et diminuer de 20% c'est multiplier par $(1-20\%)=0,8$. Donc le prix initial sera multiplié par 1,2 puis 0,8 soit par :

$$1,2\times0,8=0,96=1-4\%$$

   Cela correspond à une baisse de 4%.

5. Notation scientifique : il fallait faire le calcul à la main car la calculatrice était ici dépassée.

$$\begin{aligned}A=\frac{5\times10^{-1\,200}\times0,21}{7\times10^{-1\,205}\times0,3}&=\frac{5\times0,21}{7\times0,3}\times\frac{10^{-1\,200}}{10^{-1\,205}}\\&=\frac{5\times21\times10^{-2}}{7\times3\times10^{-1}}\times10^{-1\,200+1\,205}\\&=5\times10^{-2+1}\times10^5\\&=5\times10^{-1}\times10^5\\&=\underline{5\times10^4}\end{aligned}$$

EXERCICE 2 — 18 points

Aline a gagné 135 euros pour 15 heures de travail.

1. **[1 pt] Calculer son salaire horaire.**
Son salaire horaire est de $135 \div 15 = \underline{9 \text{ euros par heure}}$.
2. **[1 pt] Exprimer son salaire S (en €) en fonction du temps t travaillé (en heures).**
Son salaire horaire est de 9 euros par heure donc pour t heures de travail, son salaire est de : $\underline{S(t) = 9 \times t}$.
3. **[2 pts] Construire la représentation graphique de la fonction S définie pour $0 \leq t \leq 20$ par $S(t) = 9t$ sur la feuille annexe.**
La fonction S est linéaire car de la forme at avec un coefficient directeur $a = 9$. On construit donc la droite passant par l'origine du repère et par le point A de coordonnées $A(15 ; 135)$ (par exemple) puisque d'après la question (1.) on sait que $S(15) = 135$.
4. **Le salaire de Barnabé est donné par la courbe $\mathscr{C}_g$ du graphique donné en annexe. On appelle g la fonction représentée sur ce graphique. Déterminer graphiquement (on laissera apparent les traits de construction nécessaires) :**
   a. **[2 pts] Le salaire correspondant à 10 heures de travail.**
   On lit sur le graphique l'ordonnée du point B de $\mathscr{C}_g$ d'abscisse 10 soit 75.
   Le salaire correspondant à 10 heures de travail est <u>75 euros</u>.
   b. **[2 pts] le nombres d'heures correspondant à un salaire de 120€.**
   On lit sur le graphique l'abscisse du point C de $\mathscr{C}_g$ d'ordonnée 120 soit 16.
   Le nombres d'heures correspondant à un salaire de 120€ est de <u>16 heures</u>.
5. a. **[2 pts] Démontrer que la fonction g est linéaire.**
   La courbe représentative de la fonction g est une droite passant par l'origine du repère, donc la fonction g est linéaire .
   b. **[2 pts] Donner par lecture graphique le coefficient directeur de g, puis donner une expression de $g(t)$.**
   Il suffit de considérer deux points de la droite, par exemple $O(0;0)$ et $C(16;120)$. Le coefficient directeur sera :
   $$m = \frac{120-0}{16-0} = 7,5$$
   L'expression de g est alors : $\underline{g(t) = 7,5 \times t}$.
   c. **[2 pts] Vérifier les résultats de la question 4 par le calcul.**
   On retrouve alors que $g(10) = 75$ et $g(16) = 120$.
6. **[2 pts] Aline a consacré 15% de ses 135€ à l'achat d'un vêtement, quel est le prix de ce vêtement ?**
Le prix du vêtement sera de : $\frac{15}{100} \times 135 = \underline{20,25€}$.
7. **[2 pts] Aline consacre 75€ à ses loisirs. Quel est le pourcentage du salaire cela représente-t-il ? On arrondira le résultat au pour-cent le plus proche.**
Cela représente :
$$\frac{75}{135} \approx \underline{56\%}$$

EXERCICE 3 — 16 points

On appelle f la fonction définie par : $f(x) = (x-1)(2x-5)$

1. **[2 pts] Développer et réduire $f(x)$.**

$$f(x) = 2x^2 - 5x - 2x + 5 = \underline{2x^2 - 7x + 5}$$

2. **On a utilisé un tableur pour calculer les images de différentes valeurs par cette fonction f :**

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	$f(x)$	5	0	-1	2	9	20	35	54	77
3										

- **[2 pts] <u>Affirmation 1</u> : $f(2) = 3$.**

$$f(2) = (2-1)(4-5) = 1 \times (-1) = -1$$

Affirmation fausse.

- **[2 pts] <u>Affirmation 2</u> : L'image de 11 par la fonction f est 170.**

$$f(11) = (11-1)(22-5) = 10 \times 17 = 170$$

Affirmation vraie.

- **[2 pts] <u>Affirmation 3</u> : La fonction f est affine.**

— On a montré que $f(x) = 2x^2 - 7x + 5$ qui n'est pas de la forme $(mx + p)$ donc f n'est pas affine.

— On pouvait aussi vérifier que la propriété de proportionnalité des accroissements n'était pas vérifiée. On a facilement :

$$\frac{f(2) - f(0)}{2-0} = -3 \text{ et } \frac{f(2) - f(1)}{2-1} = -1 \neq -3$$

— La fonction f n'est pas une fonction affine. L'affirmation est fausse.

3. **[2 pts] Une formule a été saisie dans la cellule B2 puis recopiée ensuite vers la droite. Quelle formule a-t-on saisie dans cette cellule B2 ?**

$\boxed{\text{=(B1 - 1)*(2*B1 - 5)}}$ ou $\boxed{\text{=2*B1*B1-7*B1+5}}$

4. **[2 pts] Quels sont les deux nombres x pour lesquels $(x-1)(2x-5) = 0$?**
L'équation $(x-1)(2x-5) = 0$ est une équation produit nul. Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul soit :

$$\begin{aligned}(x-1)(2x-5) = 0 &\Longleftrightarrow (x-1=0) \quad \text{ou} \quad (2x-5=0)\\ &\Longleftrightarrow x = 1 \quad \text{ou} \quad x = \frac{5}{2}\end{aligned}$$

Les deux nombres qui annulent $f(x)$ sont 1 et $\frac{5}{2}$.

5. **[4 pts] Quels sont les antécédents de 5 par la fonction f ?**
Les antécédents de 5 par f sont les éventuelles solutions de l'équation $f(x) = 5$ soit en utilisant la forme développée de f :

$$\begin{aligned}f(x) = 5 &\Longleftrightarrow 2x^2 - 7x + 5 = 5\\ &\Longleftrightarrow 2x^2 - 7x = 0\\ &\Longleftrightarrow x(2x-7) = 0 \quad \text{(on retrouve une équation produit nul)}\\ &\Longleftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad 2x - 7 = 0\\ &\Longleftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{7}{2}\end{aligned}$$

Les antécédents de 5 par la fonction f sont $\underline{0 \text{ et } \frac{7}{2}}$.

EXERCICE 4 — 10 points

Un sac contient 24 boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à 24 . On tire une boule au hasard . Tous les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles et seront soigneusement justifiés.

Partie A

1. **[1 pt] Quelle est la probabilité d'obtenir la boule numérotée 17 ?**
   Il y a 1 boule sur les 24 qui porte le numéro 17 donc en supposant qu'il y a équiprobabilité des tirages :
   $$p_1 = \frac{1}{24}$$
2. **[1 pt] Quelle est la probabilité d'obtenir une boule ayant un numéro pair ?**
   Il y a 12 boules sur les 24 qui portent une numéro pair donc toujours en supposant l'équiprobabilité :
   $$p_2 = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$$
3. **[2 pts] Comparer la probabilité d'obtenir une boule portant un numéro multiple de 6 et la probabilité d'obtenir une boule portant un numéro diviseur de 6 ?**
   — Sur les 24 boules, 4 portent un numéro multiple de 6 soit : 6, 12, 18 et 24 ;
   — Sur les 24 boules, 4 portent un numéro diviseur de 6 soit : 6, 3, 2 et 1 .
   La probabilité d'obtenir une boule portant un numéro multiple de 6 et la probabilité d'obtenir une boule portant un numéro diviseur de 6 sont donc identiques :
   $$p_3 = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$$
4. **[2 pts] Quelle est la probabilité d'obtenir une boule portant un nombre premier ?**
   Sur les 24 boules, celles portant un nombre premiers sont celles numérotées :
   2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 et 23.
   Elles sont au nombre de 9 donc la probabilité d'obtenir une boule portant un nombre premier est :
   $$p_4 = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$$

Partie B

[4 pts] On utilise maintenant deux boîtes, dans la boîte B_1 on met les boules numérotées 5, 7 et 8, et dans la boîte B_2 on met les boules numérotées 11, 15, 16 et 23. On tire une boule dans la boîte B_1 puis une boule dans la boîte B_2. Quelle est la probabilité que la somme des numéros des deux boules tirées soit un nombre pair ? On justifiera soigneusement (on pourra s'aider d'un arbre).

— On peut facilement montrer que la somme de deux entiers est un nombre pair si et seulement si les deux entiers sont pairs ou les deux entiers sont impairs.
Les cas favorables permettant d'obtenir un nombre pair dans cette expérience sont donc les 7 cas suivants :

Cas	B_1	B_2	Somme
1	8	16	$8+16=24$
2	5	11	16
3	5	15	20
4	5	23	28
5	7	11	18
6	7	15	22
7	7	23	30

— Les cas possibles sont au nombre de $3 \times 4 = 12$ puisqu'on a le choix entre 3 boules dans la boite B_1 et 4 dans la boite B_2.

— La probabilité que la somme des numéros des deux boules tirées soit un nombre pair est donc :
$$p_5 = \frac{7}{12}$$

EXERCICE 5 — 8 points

Mathilde et Eva se trouvent à la Baie des Citrons. Elles observent un bateau de croisière quitter le port de Nouméa. Mathilde pense qu'il navigue à une vitesse de 20 nœuds. Eva estime qu'il navigue plutôt à 10 nœuds. Elles décident alors de déterminer cette vitesse mathématiquement. Sur son téléphone, Mathilde utilise d'abord la fonction chronomètre. Elle déclenche le chronomètre quand l'avant du navire passe au niveau d'un cocotier et l'arrête quand l'arrière du navire passe au niveau du même cocotier ; il s'écoule 40 secondes. Ensuite, Eva recherche sur Internet les caractéristiques du bateau. Voici ce qu'elle a trouvé :

Caractéristiques techniques :
Longueur : 246 m
Largeur : 32 m
Calaison : 6 m
Mise en service : 1990
Nombre maximum de passagers : 1 596
Membres d'équipage : 677

Questions :

1. **[2 pts] Quelle distance a parcouru le navire en 40 secondes ?**
   En 40 secondes, le bateau a parcouru sa propre longueur, soit 246 m.
2. **[6 pts] Qui est la plus proche de la vérité, Mathilde ou Eva ? Justifier la réponse.**

   — [2 pts] Vitesse du bateau en m/s.
   $$v = \frac{d}{t}, \text{ soit } v = \frac{246 \text{ m}}{40 \text{ s}} = 6,15 \text{ m/s}.$$
   — [3 pts] Conversion des nœuds en en m/s.
   Naviguer à 1 nœud signifie parcourir 0,5 mètre en 1 seconde, donc :

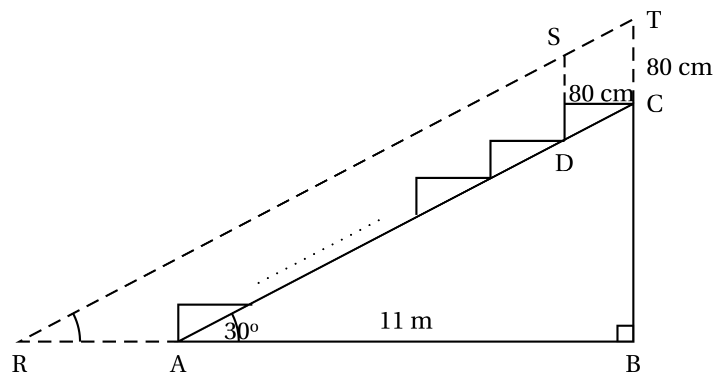
   - Naviguer à 20 nœuds c'est parcourir $20 \times 0,5$ mètres en 1 seconde, soit une vitesse de 10 m/s.
   - Naviguer à 10 nœuds signifie parcourir $10 \times 0,5$ mètres en 1 seconde, soit une vitesse de 5 m/s.

   — [1 pt] Conclusion : Eva est donc la plus proche de la vérité.

Rappel : Le « nœud » est une unité de vitesse.
Naviguer à 1 *nœud signifie parcourir* 0,5 *mètre en* 1 *seconde*

EXERCICE 6 — 10 points

La figure ci-dessous représente le plan de coupe d'une tribune d'un gymnase. Pour voir le déroulement du jeu, un spectateur du dernier rang assis en C doit regarder au-dessus du spectateur placé devant lui et assis en D. Une partie du terrain devant la tribune lui est alors masquée. On considérera que la hauteur d'un spectateur assis est de 80 *cm (CT = DS =* 80 *cm).*



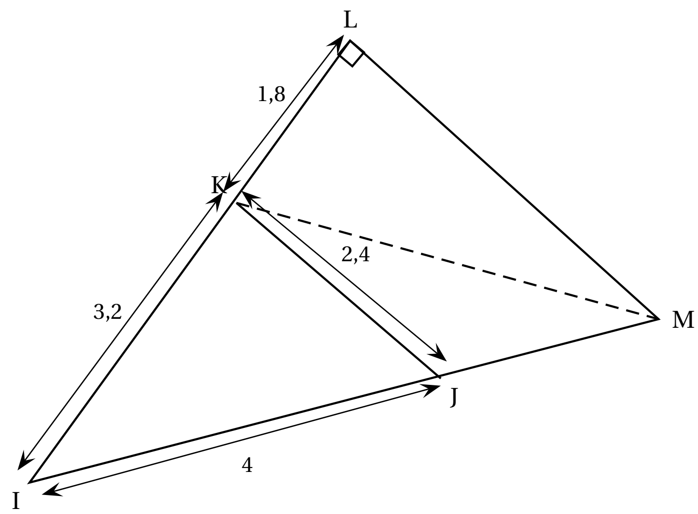
Sur ce plan de coupe de la tribune : les points R, A et B sont alignés horizontalement et les points B, C et T sont alignés verticalement ; les points R, S et T sont alignés parallèlement à l'inclinaison (AC) de la tribune ; on considérera que la zone représentée par le segment [RA] n'est pas visible par le spectateur du dernier rang ; la largeur au sol AB de la tribune est de 11 m et l'angle $\widehat{BAC}$ d'inclinaison de la tribune mesure $30°$.

1. **[3 pts] Montrer que la hauteur BC de la tribune mesure $6,35$ m, arrondie au centième de mètre près.**
   Dans le triangle ABC rectangle en B, on a :
   $$\tan\widehat{BAC} = \frac{BC}{AB} \Longleftrightarrow \tan 30° = \frac{BC}{11}$$
   soit
   $$BC = 11 \times \tan 30° \approx \underline{6,35\text{m}}$$

2. **[2 pts] Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{BRT}$?**
   Les droites (RT) et (AC) étant parallèles, les angles correspondants $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BRT}$ ont la même mesure 30°.

3. **[5 pts] Calculer la longueur RA en centimètres. Arrondir le résultat au centimètre près.**
   Dans le triangle BRT rectangle en B, on a :
   $$\tan\widehat{BRT} = \frac{BT}{BR}$$
   Or puisque le point C appartient au segment [BT] :
   $$BT = BC + CT \approx 6,35 + 0,80 \text{ soit } BT \approx 7,15 \text{ m.}$$
   Donc
   $$\tan\widehat{BRT} = \frac{BT}{BR} \Longleftrightarrow \tan 30° \approx \frac{7,15}{BR}$$
   Et
   $$BR \approx \frac{7,15}{\tan 30°} \approx 12,38 \text{ m.}$$
   Finalement puisque le point A appartient au segment [BR] :
   $$AR = BR - AB \approx 12,38 - 11 \text{ soit environ } \underline{1,38 \text{ m}}.$$

EXERCICE 7 12 points



1. **[3 pts] Montrer que IKJ est un triangle rectangle.**
   Si IJK est rectangle c'est en K car [IJ] est le plus grand côté.
   D'une part : $IJ^2 = 4^2 = 16$. D'autre part $IK^2 + KJ^2 = 3,2^2 + 2,4^2 = 16$.
   Donc
   $$IJ^2 = IK^2 + KJ^2$$
   D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle IKJ est un triangle rectangle en K.

2. **[5 pts] Montrer que LM est égal à 3,75 m.**
   — Les droites (KJ) et (LM) sont toutes les deux perpendiculaires à la même droite (IL), donc elles sont parallèles.
   — De plus, le point J appartient au segment [LM] et le point K appartient au segment [IL].
   D'après le théorème de Thalès, on a :
   $$\frac{IK}{IL} = \frac{IJ}{IM} = \frac{KJ}{LM} \quad \text{soit} \quad \frac{3,2}{5} = \frac{4}{IM} = \frac{2,4}{LM}$$
   et donc $LM = \dfrac{2,4 \times 5}{3,2} = \underline{3,75 \text{ m}}$.

3. **[4 pts] Calculer la longueur KM au centimètre près**.
   On sait que le triangle KLM est rectangle en L.
   D'après la propriété de Pythagore, on a :
   $$\begin{aligned} KM^2 &= KL^2 + LM^2 \\ &= 1,8^2 + 3,75^2 \\ KM^2 &= 17,3025 \end{aligned}$$
   et donc puisque KM est positif on a :
   $$KM = \sqrt{17,3025} \approx \underline{4,16 \text{ m}}.$$

EXERCICE 8 : ALGORITHMIQUE — 10 points

1.

a. [1 pt] Julie a fait fonctionner ce programme en choisissant le nombre (-3). Vérifier que ce qui est dit à la fin est : « J'obtiens finalement (-4) ».

Pour $\underline{x=5}$:
- étape 1 : $6 \times (-3) = -18$
- étape 2 : $-18 + 10 = -8$
- résultat : $-8 \div 2 = -4$
- dire « J'obtiens finalement (-4) ».

b. [2 pts] Que dit le programme en choisissant au départ 8 ?

Pour $\underline{x=8}$:
- étape 1 : $6 \times 8 = 48$
- étape 2 : $48 + 10 = 58$
- résultat $= 58 \div 2 = 29$
- dire « J'obtiens finalement 29 ».

2. [2 pts] Julie fait fonctionner le programme, et ce qui est dit est : « J'obtiens finalement 5 ». Quel nombre a-t-elle choisi ?

Pour retrouver le nombre du départ on peut « remonter » l'algorithme, d'où
- dire « J'obtiens finalement 5 ».
- résultat $= 5 \Longrightarrow 5 \times 2 = 10$
- étape 2 : $10 - 10 = 0$
- étape 1 : $0 \div 6 = 0$
- le nombre de départ est 0.

3. [2 pts] Si l'on appelle x le nombre choisi au départ, écrire en fonction de x l' expression obtenue à la fin du programme, puis réduire cette expression autant que possible.

Pour x au départ :
- étape 1 : $6 \times x = 6x$
- étape 2 : $6x + 10$
- résultat : $(6x + 10) : 2 = \underline{3x + 5}$

4. [3 pts] Maxime utilise le programme de calcul ci-dessous :

• Choisir un nombre.
• Lui ajouter 3
• Multiplier le résultat par 7

Peut-on choisir un nombre pour lequel le résultat obtenu par Maxime est le même que celui obtenu par Julie ?

- Le programme de Maxime donne, en choisissant x comme nombre de départ :
  Pour x au départ :
  - étape 1 : $x + 3$
  - étape 2 : $7 \times (x + 3) = \underline{7x + 21}$
- On cherche donc x pour que les deux programmes donnent le même résultat. Cela revient à résoudre l'équation :

$$7x + 21 = 3x + 5 \Longleftrightarrow 4x = -16$$
$$\Longleftrightarrow x = -\frac{16}{4} = \underline{-4}$$

Le résultat obtenu par Maxime est le même que celui obtenu par Julie avec -4 au départ.

ANNEXE de l'exercice 2 à rendre avec votre copie