Corrigé de l'épreuve I

A propos de l'équation fonctionnelle $f(x) = f(g(x))$

1°) *Etude du cas particulier* $|a| = 1$

a) On suppose que $a = 1$, donc $b \neq 0$.

Les fonctions $c : x \longrightarrow \cos(\omega x)$ et $s : x \longrightarrow \sin(\omega x)$appartiennent à $\mathcal{E}(1, b)$ si :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(\omega x) = \cos(\omega(x + b)) = \cos(\omega x + \omega b).$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(\omega x) = \sin(\omega(x + b)) = \sin(\omega x + \omega b).$$

Ceci est réalisé si et seulement si $\omega b \in 2\pi\mathbb{Z}$, soit : il existe un entier k tel que $\omega = \frac{2k\pi}{b}$.

Plus généralement, les fonctions continues vérifiant $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(x + b)$ avec $b \neq 0$ sont les fonctions continues b-périodiques.

b) Les fonctions continues vérifiant $\forall x,\ f(x) = f(-x)$ sont les fonctions continues paires.

Plus généralement, quitte à poser $x = t + b/2$ ou $t = x - b/2$, il y a équivalence entre :

$$(1)\quad \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(-x + b) \qquad ; \qquad (2)\quad \forall x \in \mathbb{R},\ f\left(\frac{b}{2} + x\right) = f\left(\frac{b}{2} - x\right).$$

Ainsi, les fonctions continues vérifiant $\forall x,\ f(x) = f(-x + b)$ sont les fonctions continues ayant la droite d'équation $x = b/2$ pour axe de symétrie, ou encore les fonctions continues telles que $x \longrightarrow f(b/2 + x)$ soit paire.

2°) *Etude du cas* $|a| < 1$

a) Si la suite de premier terme $x_0 = x$ définie par la relation de récurrence $x_{n+1} = a\,x_n + b$ converge, alors sa limite vérifie $L = a\,L + b$, soit $L = b/(1 - a)$.

b) Par différence avec $L = a\,L + b$, la relation $x_{n+1} = a\,x_n + b$ équivaut à :

$$x_{n+1} - L = a(x_n - L).$$

La suite $n \longrightarrow x_n - L$ est donc géométrique de raison a, et on a $x_n - L = a^n(x - L)$.

Comme $|a| < 1$, on en déduit que la suite $n \longrightarrow x_n - L$ converge vers 0 et $\lim x_n = L$.

c) Si f appartient à $\mathcal{E}(g_{a,b})$, on a $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(a\,x + b)$, donc $\forall n \in \mathbb{N},\ f(x_n) = f(x_{n+1})$.

La suite $(f(x_n))$ est donc une suite constante, égale à $f(x_0) = f(x)$, et comme f est continue, elle converge également vers $f(L)$, d'où, par unicité de la limite : $f(x) = f(L)$.

d) Si $f \in \mathcal{E}(g_{a,b})$ avec $|a| < 1$, ce qui précède montre que f est constante.

Inversement, les fonctions constantes sont continues et vérifient $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(a\,x + b)$.

3°) *Etude du cas* $|a| > 1$

a) Quitte à poser $t = a\,x + b$ ou $x = \frac{t}{a} - \frac{b}{a}$ (car $a \neq 0$), on voit qu'il y a équivalence entre :

$$(1)\quad \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(a\,x + b) \qquad ; \qquad (2)\quad \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f\left(\frac{x}{a} - \frac{b}{a}\right).$$

Autrement dit, les ensembles $\mathcal{E}(g_{a,b})$ et $\mathcal{E}(g_{1/a,\, b/a})$ sont égaux.

b) Si $|a| > 1$, alors $|1/a| < 1$ et d'après le résultat de la question 2, l'ensemble $\mathcal{E}\left(g_{1/a,\,-b/a}\right)$ des fonctions continues vérifiant $\forall\, t,\ f(t) = f\left(\frac{t}{a} - \frac{b}{a}\right)$ se réduit aux fonctions constantes. L'ensemble $\mathcal{E}\left(g_{a,b}\right)$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la relation équivalente $\forall\, x,\ f(x) = f(a\,x + b)$ est donc également l'ensemble des fonctions constantes.

4°) *Etude des points fixes de la fonction g lorsque* $|g'| \leq K < 1$

a) D'après l'inégalité des accroissements finis, on a pour tout réel x, sachant que $|g'| \leq K$:

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\quad |g(x) - g(0)| \leq K\,|x|.$$

Ce qui s'écrit encore $-K\,|x| \leq g(x) - g(0)| \leq K\,|x|$, et donne finalement :

$$g(0) - K\,|x| \;\leq\; g(x) \;\leq\; g(0) + K\,|x|.$$

b) D'après l'inégalité précédente, on a pour $x \geq 0$:

$$g(x) - x \;\leq\; g(0) + (K-1)\,x.$$

Comme $K - 1 < 0$, on en déduit que la limite de $g(x) - x$ en $+\infty$ est $-\infty$.
De même, l'inégalité précédente donne pour $x \leq 0$:

$$g(0) + (K-1)\,x \;\leq\; g(x) - x.$$

Comme $K - 1 < 0$, on en déduit que la limite de $g(x) - x$ en $-\infty$ est $+\infty$.

c) La fonction $x \longrightarrow y = g(x) - x$ est continue sur $\mathbb{R}$ et varie de $+\infty$ à $-\infty$ d'après ci-dessus. Il résulte du théorème des valeurs intermédiaires qu'elle s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$, et comme sa dérivée vérifie $y' = g'(x) - 1 \leq K - 1 < 0$, elle est strictement décroissante et s'annule au plus une fois sur $\mathbb{R}$, d'où l'existence et l'unicité du point fixe L.

5°) *Etude de l'ensemble* $\mathcal{E}(g)$ *lorsque* $|g'| \leq K < 1$

a) On exploite à nouveau l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad |x_{n+1} - L| = |g(x_n) - g(L)| \leq K\,|x_n - L|.$$

Par récurrence immédiate, on en déduit que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad |x_n - L| \leq K^n\,|x - L|.$$

Comme $0 \leq K < 1$, on en déduit que la suite (x_n) converge vers L.

b) Si f appartient à $\mathcal{E}(g)$, on a $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(g(x)) = f(x)$, donc $\forall\, n \in \mathbb{N},\ f(x_{n+1}) = f(x_n)$.
La suite $(f(x_n))$ est donc une suite constante, égale à $f(x_0) = f(x)$, et comme f est continue, elle converge également vers $f(L)$, d'où, par unicité de la limite : $f(x) = f(L)$.

c) D'après ce qui précède, une fonction f appartenant à $\mathcal{E}(g)$ est nécessairement constante, et réciproquement, les fonctions constantes sont continues et vérifient $\forall\, x,\ f(g(x)) = f(x)$. Ainsi, $\mathcal{E}(g)$ est dans ce cas l'ensemble des fonctions constantes.

6°) *Recherche de fonctions vérifiant l'hypothèse* $(\mathcal{H})$

a) Considérons pour $r \geq 0$ la série de fonctions proposée en la variable réelle t :

$$S\left(r\,e^{i\,t}\right) e^{-i\,n\,t} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\, r^k\, e^{(k-n)\,i\,t}.$$

On observe, pour tout réel $t \in [0, 2\pi]$, que $\left|a_k\, r^k\, e^{(k-n)\,i\,t}\right| = \left|a_k\, r^k\right| = |a_k|\, r^k$.
Et la série $\sum |a_k|\, r^k$ converge car on sait qu'une série entière est absolument convergente en tout point r appartenant à son disque de convergence (qui est ici $\mathbb{C}$ tout entier).
Par conséquent, la série de fonctions proposée converge normalement (et uniformément) sur le segment $[0, 2\pi]$ (et même sur $\mathbb{R}$).

b) Si $k = n$, on a $\int_0^{2\pi} e^{(k-n)\,i\,t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = 2\pi$, et sinon :

$$\int_0^{2\pi} e^{(k-n)\,i\,t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{(k-n)\,i\,t}}{(k-n)\,i}\right]_0^{2\pi} = 0.$$

c) On sait qu'on peut permuter les symboles $\sum_{k=0}^{+\infty}$ et $\int_0^{2\pi}$ lorsqu'on a une série de fonctions continues normalement (ou uniformément) convergente sur un segment, de sorte qu'on a :

$$\int_0^{2\pi} e^{-i\,n\,t}\, S\!\left(r\, e^{i\,t}\right) \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\, r^k\, e^{(k-n)\,i\,t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\, r^k \int_0^{2\pi} e^{(k-n)\,i\,t}\,\mathrm{d}t = 2\pi\, a_n\, r^n.$$

d) Si S est bornée sur $\mathbb{C}$ par un réel $K \le 1$, on a maintenant pour tout réel positif r :

$$2\pi\,|a_n|\, r^n = \left|\int_0^{2\pi} e^{-i\,n\,t}\, S\!\left(r\, e^{i\,t}\right) \mathrm{d}t\right| \le \int_0^{2\pi} \left|e^{-i\,n\,t}\, S\!\left(r\, e^{i\,t}\right)\right| \mathrm{d}t \le 2\pi\, K.$$

On en déduit donc $|a_n| \le K / r^n$ après division par r^n, puis en faisant tendre r vers $+\infty$, on obtient $a_n = 0$ pour $n \ge 1$, et donc $S = a_0$, d'où $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = a_0$ avec $|a_0| \le K < 1$. Finalement, on retrouve les fonctions $g(x) = a_0\, x + b$ de la partie I avec $|a_0| < 1$.

7°) *Etude de l'ensemble $\mathcal{E}(g)$ lorsque $|g'| \ge k > 1$*
a) La fonction g' ne change pas de signe sur $\mathbb{R}$, car dans le cas contraire, elle s'annulerait d'après le théorème des valeurs intermédiaires, et c'est impossible puisque $|g'(x)| \ge K > 1$.
Comme $|g'(x)| \ge K$, on a $g'(x) \ge +K$ ou $g'(x) \le -K$ pour tout réel x. Et on a en fait :
- ou bien $g'(x) \ge +K$ pour tout réel x.
- ou bien $g'(x) \le -K$ pour tout réel x.

Dans tout autre cas, g' changerait en effet de signe sur $\mathbb{R}$, ce qui est impossible.

- Si $g'(x) \ge +K$ pour tout réel x, on a pour tout réel $x \ge 0$:

$$\forall\, x \ge 0, \quad g(x) - g(0) = \int_0^x g'(t)\,\mathrm{d}t \;\ge\; K\,x.$$

On a donc $g(x) \ge g(0) + K\,x$ et $g(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.
De même, on a pour tout réel $x \ge 0$:

$$\forall\, x \ge 0, \quad g(0) - g(-x) = \int_{-x}^0 g'(t)\,\mathrm{d}t \;\ge\; K\,x.$$

On a donc $g(-x) \le g(0) - K\,x$ et $g(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$.
Ainsi, dans ce cas, g est strictement croissante de $-\infty$ à $+\infty$ lorsque x décrit $\mathbb{R}$.

- Si $g'(x) \le -K$ pour tout réel x, on a $-g'(x) \ge K$ et on applique ce qui précède à $-g$.
Il en résulte que g est strictement décroissante de $+\infty$ à $-\infty$ lorsque x décrit $\mathbb{R}$.

b) D'après la question précédente, la fonction g est continue et strictement monotone de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et elle a une réciproque également continue et strictement monotone de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Comme de plus elle est de classe C^1 et que sa dérivée ne s'annule pas car $|g'(x)| \geq K > 1$, on en déduit que g^{-1} est aussi de classe C^1 et on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \left|\left(g^{-1}\right)'(x)\right| = \left|\frac{1}{g'\left(g^{-1}(x)\right)}\right| \leq \frac{1}{K} < 1.$$

c) Il est clair que la relation $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(g(x)) = f(x)$ équivaut à $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = f\left(g^{-1}(x)\right)$. Autrement dit, $f \in \mathcal{E}(g)$ si et seulement si $f \in \mathcal{E}\left(g^{-1}\right)$.
Or on vient d'établir que g^{-1} est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est bornée par $\frac{1}{K} < 1$.
Les résultats du 5° démontrent alors que l'ensemble $\mathcal{E}\left(g^{-1}\right)$, et donc l'ensemble $\mathcal{E}(g)$, sont l'ensemble des fonctions constantes.

8°) *Recherche des fonctions continues telles que* $f(x) = f\left(x^2\right)$
a) Comme $x_{n+1} = \sqrt{x_n}$, un raisonnement par récurrence simple donne $x_n = x^{1/2^n}$.
Il en résulte que $\lim x_n = \lim \exp\left(\frac{1}{2^n}\ln(x)\right) = 1$ pour tout réel $x > 0$.

b) Comme $f(x) = f\left(x^2\right)$, on a $f\left(\sqrt{x}\right) = f(x)$ pour tout réel positif x.
Il en résulte que $f(x_{n+1}) = f(x_n)$ pour tout entier naturel n.
La suite $(f(x_n))$ est donc constante et égale à $f(x_0) = f(x)$, et elle converge vers $f(1)$.
Par unicité de la limite, on a donc $f(x) = f(1)$ pour tout $x > 0$, et par continuité pour $x \geq 0$.
Enfin, si $x \leq 0$, on a $f(x) = f\left(x^2\right) = f(1)$ puisque $x^2 \geq 0$.
Finalement, on voit que f est nécessairement constante, et réciproquement, toute fonction constante est continue et vérifie $f(x) = f\left(x^2\right)$ pour tout nombre réel x.

c) On a ainsi un nouveau cas où les éléments de $\mathcal{E}(g)$ sont les seules fonctions constantes, et comme $g'(x) = 2\,x$ puisque $g(x) = x^2$, on voit que g ne vérifie aucune des hypothèses $(\mathcal{H})$ ou $(\mathcal{H}')$ des questions 5 et 7 : ces hypothèses sont suffisantes, mais pas nécessaires pour que l'ensemble $\mathcal{E}(g)$ se réduise aux fonctions constantes.

9°) *Recherche des fonctions continues telles que* $f(x) = f(e^x)$
a) Si $f \in \mathcal{E}(\exp)$, on a $f(x) = f(e^x)$ pour tout réel x, et donc $f(0) = f(1)$ pour $x = 0$.

b) Si $f \in \mathcal{E}(\exp)$, on a $f(x) = f(e^x)$ pour tout réel x, et si $x < 0$, alors $e^x \in [0,\ 1]$.
La donnée de f sur $[0,\ 1]$ détermine donc f sur $\mathbb{R}_-$.

c) On connaît (ou on vérifie) l'inégalité de convexité $e^x \geq x + 1$.
Comme $x_{n+1} = e^{x_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x_{n+1} \geq x_n + 1$, et (x_n) est strictement croissante.
Comme $x_0 = 0$, on obtient par récurrence facile que $x_n \geq n$, et (x_n) diverge vers $+\infty$.

• Comme la fonction exponentielle est continue et strictement croissante, elle induit donc une bijection de $]\, x_n,\, x_{n+1}]$ sur son image $]\, e^{x_n},\, e^{x_{n+1}}\big] = \big]\, x_{n+1},\, x_{n+2}\big]$.
Le logarithme induit sa réciproque de $]\, x_{n+1},\, x_{n+2}] =]\, e^{x_n},\, e^{x_{n+1}}\big]$ sur $]\, x_n,\, x_{n+1}]$.

• Comme $f(x) = f(e^x)$, on a $f(\ln(x)) = f(x)$ et si $x \in]\, x_{n+1},\, x_{n+2}]$, alors $\ln(x) \in]\, x_n,\, x_{n+1}]$, et la donnée de f sur $]\, x_n,\, x_{n+1}]$ détermine donc f sur $]\, x_{n+1},\, x_{n+2}]$.
De proche en proche, la donnée de f sur $[0, 1]$ détermine ainsi f sur $]\, x_1,\, x_2]$, sur $]\, x_2,\, x_3]$, ... , sur $]\, x_n,\, x_{n+1}]$, ... , et finalement sur leur réunion $\mathbb{R}_+$.

d) Si $f \in \mathcal{E}(\exp)$, sa restriction à $[0, 1]$ est une fonction continue φ vérifiant $\varphi(0) = \varphi(1)$.
Inversement, si φ désigne une fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\varphi(0) = \varphi(1)$, et s'il existe $f \in \mathcal{E}(\exp)$ coïncidant avec φ sur $[0, 1]$, on a nécessairement :
- $\forall\, x < 0,\ f(x) = f(e^x) = \varphi(e^x)$ où $e^x \in [0, 1]$.
  Ainsi prolongée, f est continue sur $]-\infty, 0[$ et $[0, 1]$, et aussi en 0 puisque :
  $$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} \varphi(e^x) = \varphi(1) = \varphi(0) = f(0).$$
  On a ainsi obtenu f continue sur $]-\infty, x_1]$ et vérifiant $f(e^x) = f(x)$ pour $x \le 0$.
  (La relation $f(x) = f(e^x)$ est en effet vérifiée si $x < 0$ et reste vraie en 0 car $f(0) = f(1)$).
- $\forall\, x \in]\, x_1,\, x_2],\ f(x) = f(\ln(x)) = \varphi(\ln(x))$ où $\ln(x) \in]\, 0,\, 1]$.
  Ainsi prolongée, f est continue sur $]-\infty, 1]$ et $]1, x_2]$, et aussi en $x_1 = 1$ puisque :
  $$\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1+} \varphi(\ln(x)) = \varphi(0) = \varphi(1) = f(1).$$
  On a ainsi obtenu f continue sur $]-\infty, x_2]$ et vérifiant $f(e^x) = f(x)$ pour $x \le x_1$.

- Supposons avoir obtenu f continue sur $]-\infty, x_n]$ et vérifiant $f(x) = f(e^x)$ pour $x \le x_{n-1}$.
  Poursuivons alors la construction par récurrence :
- $\forall\, x \in]\, x_n,\, x_{n+1}],\ f(x) = f(\ln(x)) = \varphi(\ln(x))$ où $\ln(x) \in]\, x_{n-1},\, x_n]$.
  Ainsi prolongée, f est continue sur $]-\infty, x_n]$ et $]x_n, x_{n+1}]$, et aussi en x_n puisque :
  $$\lim_{x \to x_n^+} f(x) = \lim_{x \to x_n^+} f(\ln(x)) = f(x_{n-1}) = f\left(e^{x_{n-1}}\right) = f(x_n).$$
  On a ainsi obtenu f continue sur $]-\infty, x_{n+1}]$ et vérifiant $f(e^x) = f(x)$ pour $x \le x_n$.

A partir de la donnée de $\varphi : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et vérifiant $\varphi(0) = \varphi(1)$, on obtient ainsi par récurrence une fonction continue f et une seule vérifiant $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(e^x)$.
On en déduit ainsi la méthode d'obtention de toutes les fonctions appartenant à $\mathcal{E}(\exp)$.
