

Mines PSI 1

Somme de projecteurs orthogonaux

Notations.

On note \mathbb{N} l'ensemble des entiers naturels, \mathbb{R} celui des réels et \mathcal{M}_n celui des matrices $n \times n$ à coefficients réels.

Dans tout le problème, X est un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ sur le corps de réels et T est un endomorphisme de X .

Si \mathcal{B} est une base de X , on note $T_{\mathcal{B}}$ la matrice représentant T dans cette base.

On note $N(T)$ le noyau de T , $R(T)$ son image, $\text{rg}(T)$ son rang et $\sigma(T)$ son spectre.

On appelle projecteur un endomorphisme P de X idempotent c'est à dire tel que $P^2 = P$.

On note I l'endomorphisme identité de X , I_n la matrice identité de \mathcal{M}_n et O la matrice nulle.

1 Trace.

Si $A \in \mathcal{M}_n$, on appelle trace de A le nombre réel suivant :

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$$

Q.1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n$. Montrer que $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.

Q.2. Soit T un endomorphisme de X . Montrer que la trace de la matrice $T_{\mathcal{B}}$ associée à T est indépendante de la base \mathcal{B} .

On appelle trace de T , notée $\text{Tr}(T)$, la valeur commune des traces des matrices représentant T . On dit que la trace est un invariant de similitude.

2 Projecteurs.

Q.3. Soit P un projecteur de X . Montrer que $X = N(P) \oplus R(P)$.

Q.4. En déduire que $\text{rg}(P) = \text{Tr}(P)$.

Q.5. Démontrer que la dimension de la somme de deux sous-espaces F et G de X est inférieure ou égale à la somme de leurs dimensions.

Q.6. Soit S un endomorphisme de X . Montrer que si S est une somme finie de projecteurs P_i , $i = 1, \dots, m$, alors $\text{Tr}(S) \in \mathbb{N}$ et $\text{Tr}(S) \geq \text{rg}(S)$.

3 Décomposition en somme de projecteurs orthogonaux.

On considère maintenant le cas où X est un espace (pré)hilbertien. On dit que T est **symétrique positif** s'il est **symétrique** et si

$$\forall x \in X, (T(x)|x) \geq 0$$

Q.7. Montrer que T , supposé symétrique, est positif si et seulement si $\sigma(T) \subset \mathbb{R}^+$.

Q.8. Montrer qu'un projecteur P est un projecteur orthogonal si et seulement si il vérifie

$$\forall x \in X, \forall y \in R(P), (x - P(x)|y) = 0$$

Q.9. Montrer qu'un projecteur est un projecteur orthogonal si et seulement si il est symétrique. Montrer également qu'un projecteur orthogonal est positif.

On suppose désormais sur T est symétrique positif et vérifie $\text{Tr}(T) \in \mathbb{N}$ et $\text{Tr}(T) \geq \text{rg}(T)$.
On note r le nombre de valeurs propres strictement positives de T , comptées avec leur multiplicité. On note e_i les vecteurs d'une base propre de \mathcal{B} de T orthonormée, ordonnés de telle façon que les valeurs propres associées soient strictement positives si et seulement si $i \leq r$. On note Y l'espace engendré par les $e_i, i = 1, \dots, r$ et Z celui engendré par les $e_i, i = r + 1, \dots, n$.

Q.10. Montrer que $Y = R(T), Z = N(T)$ ainsi que $\text{rg}(T) = r$.

Q.11. Montrer que Q_i est un projecteur orthogonal de rang 1.

Q.12. On se place dans le cas particulier où $\text{Tr}(T) > \text{rg}(T)$. Montrer qu'on peut choisir i tel que $T - Q_i$ soit symétrique positif et vérifie $\text{rg}(T - Q_i) = \text{rg}(T)$. Quelle est la valeur de $\text{Tr}(T - Q_i)$?

Q.13. On se place maintenant dans le cas général où $\text{Tr}(T) \geq \text{rg}(T)$. Dédurre de la question **12** qu'il existe S symétrique positif tel que Y soit stable par $S, \text{Tr}(S) = \text{rg}(S) = \text{rg}(T)$ et que $T - S$ soit la somme de $k = \text{Tr}(T) - r$ projecteurs orthogonaux de rang 1.

On note $\mu_i, i = 1, \dots, r$, les valeurs propres strictement positives de S .

Q.14. Montrer que $S|_Y$ est inversible.

On pose $U = S|_Y$ et pour $x, y \in Y, \xi(x, y) = (U^{-1}(x)|y)$. On note $\varepsilon_i, i = 1, \dots, r$ une base de vecteurs propres de U associés aux valeurs propres μ_i .

Q.15. Démontrer que ξ constitue un produit scalaire sur Y .

Q.16. Déterminer $w \in Y$ tel que $\|w\| = 1$ et $\xi(w, w) = 1$. On pourra, si nécessaire, chercher w dans le sous-espace de dimension 2 engendré par deux vecteurs propres ε_i et ε_j bien choisis.

Q.17. Montrer que P est un projecteur orthogonal de rang 1 sur X si et seulement si il existe un vecteur z unitaire dans X tel que pour tout $x \in X, P(x) = (x|z)z$.

On considère maintenant un w tel que défini à la question **16** et l'endomorphisme P_w défini sur X par la formule suivante :

$$P_w(x) = (x|w)w$$

Q.18. Démontrer que $S - P_w$ est symétrique et positif.

Q.19. Démontrer que $N(S - P_w) = N(S) \oplus \text{Vect}(U^{-1}w)$, où $\text{Vect}(U^{-1}w)$ note l'ensemble des vecteurs colinéaires à $U^{-1}w$. En déduire que $\text{rg}(S - P_w) = \text{rg}(S) - 1$.

Q.20. Dédurre des question **17, 18** et **19** que S est la somme d'un nombre fini de projecteurs orthogonaux de rang 1.

Q.21. En déduire qu'un endomorphisme symétrique positif T est une somme finie de projecteurs orthogonaux si et seulement si $\text{Tr}(T) \in \mathbb{N}$ et $\text{Tr}(T) \geq \text{rg}(T)$.