

X-ENS PSI - 2014 un corrigé

Partie 1. Un premier exemple d'opérateur.

- a) Il est immédiat que pour $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\forall x \in [0, 1], \quad T(f + \lambda g)(x) = T(f)(x) + \lambda T(g)(x)$$

et T est donc linéaire. Par ailleurs, si $f \in E$,

$$\forall x \in [0, 1], \quad |T(f)(x)| \leq |f(x/2)| \leq \|f\|_\infty$$

et, en passant au maximum

$$\|T(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$$

ce qui montre que T est un opérateur (on peut choisir $M = 1$).

- b) Pour $f : x \mapsto 1$, qui est dans E , on a $T(f) : x \mapsto x$ et donc $\|T(f)\|_\infty = \|f\|_\infty = 1$. Une constante M vérifiant (1) est donc plus grande que 1. Avec la question précédente, $M = 1$ est donc la plus petite constante possible. Avec les notations classiques du cours, on a

$$\|T\| = 1$$

- c) Soit $f \in \ker(T)$. On a alors $\forall x \in [0, 1]$, $xf(x/2) = 0$ et f est donc nulle sur $]0, 1/2]$. Par continuité, elle l'est aussi sur $[0, 1/2]$. Réciproquement, toute fonction continue sur $[0, 1]$ et nulle sur $[0, 1/2]$ est dans le noyau de T . Ainsi

$$\ker(T) = \{f \in E / \forall x \in [0, 1/2], f(x) = 0\}$$

Soit $g \in \text{Im}(T)$. g est continue sur $[0, 1]$ (dans E) et il existe une fonction continue f telle que $\forall x \in [0, 1]$, $g(x) = xf(x/2)$. Ainsi, $g(0) = 0$ et $\frac{g(x)-g(0)}{x} = f(x/2) \rightarrow f(0)$ quand $x \rightarrow 0$ ce qui montre que g est dérivable en 0. L'image de T est incluse dans l'ensemble des éléments de E s'annulant en 0 et dérivables en 0.

Réciproquement, supposons $g \in E$ nulle et dérivable en 0. Considérons la fonction définie sur $[0, 1]$ par

$$f(0) = g'(0), \quad \forall x \in]0, 1/2] : f(x) = \frac{g(2x)}{2x} ; \quad \forall x \in]1/2, 1] : f(x) = g(1)$$

- f est continue sur $]0, 1/2[\cup]1/2, 1]$ de façon immédiate.
- f est continue en 0 par définition de $g'(0)$ (et car $g(0) = 0$).
- f est continue en $1/2$ (immédiat à gauche et vrai par construction à droite).
- Par construction, $\forall x \in]0, 1]$, $xf(x/2) = g(x)$ et cela reste vrai en 0 par continuité des fonctions dans les deux membres.

On a ainsi $f \in E$ et $T(f) = g$ ce qui montre que $g \in \text{Im}(T)$.

$$\text{Im}(T) = \{g \in E / g(0) = 0 \text{ et } g \text{ dérivable en } 0\}$$

- d) On a encore la linéarité. De plus (on pose $u = x/2$)

$$\int_0^1 |T(f)(x)|^2 dx = \int_0^1 x^2 f\left(\frac{x}{2}\right)^2 dx = 8 \int_0^{1/2} u^2 f^2(u) du \leq 2 \int_0^{1/2} f^2(u) du \leq 2 \int_0^1 |f(u)|^2 du$$

On a donc la propriété (1) avec $M = \sqrt{2}$.

- e) Soit $n \geq 2$ et f_n la fonction proposée par l'énoncé. f_n est nulle hors de $[1/2 - 1/n, 1/2 + 1/n^2]$ et on a

$$\forall x \in [1/2 - 1/n, 1/2], f_n(x) = n(x - 1/2 + 1/n); \forall x \in [1/2, 1/2 + 1/n^2], f_n(x) = -n^2(x - 1/2 - 1/n^2)$$

Un calcul élémentaire mais un peu fastidieux donne alors

$$\int_0^1 f_n(x)^2 dx = \int_{1/2-1/n}^{1/2+1/n^2} f_n(x)^2 dx = \frac{n+1}{3n^2}$$

$$\int_0^1 T(f_n)(x)^2 dx = \int_{1-2/n}^{1+2/n^2} x^2 f_n(x/2)^2 dx = \frac{10n^5 + 4n^3 + 10n^2 + 4}{15n^6}$$

et on a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\|T(f_n)\|_2^2}{\|f_n\|_2^2} = 2$$

Une constante M vérifiant (1) est donc plus grande que $\sqrt{2}$. Avec la question précédente, cette constante convient et

$$\|T\| = \sqrt{2}$$

Partie 2. Un premier exemple de calcul de spectres.

- a) La linéarité de S et V est à nouveau immédiate. On a pour tout $u \in H$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^n (Su)_k^2 = \sum_{k=0}^{n-1} u_k^2 \leq \|u\|_2^2 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n (Vu)_k^2 = \sum_{k=1}^{n+1} u_k^2 \leq \|u\|_2^2$$

ce qui montre que $S(u), V(u) \in H$ avec

$$\|Su\|_2 \leq \|u\|_2 \quad \text{et} \quad \|Vu\|_2 \leq \|u\|_2$$

S et V sont ainsi des opérateurs de H .

- b) Soit $\lambda \in \sigma_p(S)$. Il existe donc $u \in H$ non nulle telle que $S(u) = \lambda u$. On a donc

$$0 = \lambda u_0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n-1} = \lambda u_n$$

Si $\lambda \neq 0$ alors $u_0 = 0$ puis, par récurrence, tous les u_n sont nuls. Ceci contredit $u \neq 0$.

Sinon, les relations précédentes donnent $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n-1} = 0$ et donc u est encore nulle, ce qui est toujours exclus. Aucun λ ne convient et donc

$$\sigma_p(S) = \emptyset$$

Soit $\lambda \in \sigma_p(V)$. Il existe donc $u \in H$ non nulle telle que $V(u) = \lambda u$. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \lambda u_n$$

et ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda^n u_0$. u étant non nulle, $u_0 \neq 0$ et $u \in H$ indique que $\sum |\lambda^2|^n$ converge c'est à dire que $\lambda \in]-1, 1[$.

Réciproquement, si $\lambda \in]-1, 1[$, $u = (\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}} \in H$ et $V(u) = \lambda u$. Comme $u \neq 0$ ($u_0 = 1$), on a donc $\lambda \in \sigma_p(V)$. Finalement

$$\sigma_p(V) =]-1, 1[$$

c) Il est cette fois immédiat que si $u \in F$ alors $S(u), V(u) \in F$ avec

$$\|S(u)\|_\infty \leq \|u\|_\infty \quad \text{et} \quad \|V(u)\|_\infty \leq \|u\|_\infty$$

ce qui montre que S et V sont des opérateurs de F .

d) Le même raisonnement qu'en b) (l'espace H n'a pas servi) montre que l'on a toujours

$$\sigma_p(S) = \emptyset$$

De même, si $\lambda \in \sigma_p(V)$, il existe $u \in F$ non nulle telle que $V(u) = \lambda u$. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \lambda u_n$$

et ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda^n u_0$. u étant non nulle, $u_0 \neq 0$ et $u \in F$ indique que $\lambda \in [-1, 1]$. Réciproquement, si $\lambda \in [-1, 1]$, $u = (\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}} \in F$ et $V(u) = \lambda u$. Comme $u \neq 0$ ($u_0 = 1$), on a donc $\lambda \in \sigma_p(V)$. Finalement

$$\sigma_p(V) = [-1, 1]$$

e) S n'est pas bijective puisque tout élément de l'image de S a un premier terme nul et la suite constante égale à 1 (qui est bien dans F) n'a pas d'antécédent. Ainsi $0 \in \sigma(S)$.

Soit maintenant $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Soit $u \in F$ et $v = (S - \lambda Id_F)(u)$; on a $u_0 = -v_0/\lambda$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = u_{n-1} - \lambda u_n$$

ce qui donne aussi

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \lambda^{n-1} v_n = \lambda^{n-1} u_{n-1} - \lambda^n u_n$$

En sommant, les termes se télescopent et on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^n \lambda^{k-1} v_k = u_0 - \lambda^n u_n$$

et avec $u_0 = -v_0/\lambda$ on a finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -\frac{1}{\lambda^n} \sum_{k=0}^n \lambda^{k-1} v_k \quad (*)$$

- Supposons que $S - \lambda Id_F$ soit bijective de F dans F . La suite constante égale à 1 admet donc un antécédent donné par le calcul précédent. Cet antécédent étant dans F ,

$$u_n = -\frac{1}{\lambda^n} \sum_{k=0}^n \lambda^{k-1}$$

est le terme général d'une suite bornée. Ceci implique que $\lambda \neq 1$ (sinon $u_n = -n$) et que (on calcule la somme géométrique de raison $\lambda \neq 1$)

$$u_n = \frac{1}{1-\lambda} \left(1 - \frac{1}{\lambda^{n+1}} \right)$$

est le terme général d'une suite bornée c'est à dire $|\lambda| \geq 1$.

En utilisant de même la suite $v = ((-1)^k)$, on voit qu'il faut que $\lambda \neq -1$.

La bijectivité de $S - \lambda Id_F$ entraîne donc $|\lambda| > 1$.

- Réciproquement, supposons $|\lambda| > 1$. Soit $v \in F$ et u définie par les relations (*). On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n| \leq \frac{\|v\|_\infty}{|\lambda|^n} \sum_{k=0}^n |\lambda|^{k-1} = \frac{\|v\|_\infty}{|\lambda| - 1} \left(1 - \frac{1}{|\lambda|^{n+1}} \right) \leq \frac{\|v\|_\infty}{|\lambda| - 1}$$

u est bornée et $(S - \lambda Id_F)(u) = v$ ce qui montre que $S - \lambda Id_F$ est surjective de F dans F .

Comme elle est aussi injective (question b)), elle est donc bijective.

On a finalement montré que $S - \lambda Id_F$ est bijective ssi $|\lambda| \geq 1$ ou encore que

$$\sigma(S) = [-1, 1]$$

Si $|\lambda| \leq 1$ alors $S - \lambda Id_F$ n'est pas injective et donc non bijective. Réciproquement, supposons $|\lambda| > 1$ et considérons $v \in F$. Un calcul similaire à celui mené plus haut montre que si $V(u) = v$ alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda^n \left(u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{v_k}{\lambda^{k+1}} \right)$$

Comme v est bornée et $|\lambda| > 1$, on a $\frac{v_k}{\lambda^{k+1}}$ qui est le terme général d'une série convergente. On est alors amenés à considérer la suite u définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda^n \left(- \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{v_k}{\lambda^{k+1}} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{v_k}{\lambda^{k+1}} \right) = -\lambda^n \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{v_k}{\lambda^{k+1}}$$

On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq |\lambda|^n \|v\|_\infty \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{|\lambda|^{k+1}} = \frac{\|v\|_\infty}{|\lambda| - 1}$$

ce qui montre que u est bornée. On vérifie immédiatement que $V(u) = v$ et V est donc surjective de F dans F . Etant injective (question b)) elle est donc bijective. On a ainsi prouvé que

$$\sigma(V) = [-1, 1]$$

Partie 3. Un second exemple de calcul de spectre ponctuel.

- a) La linéarité de T est conséquence directe de la linéarité du passage à l'intégrale. Soit $f \in E$.
On a

$$\forall s \in [0, 1], T(f)(s) = (1-s) \int_0^s t f(t) dt + s \int_s^1 (1-t) f(t) dt \quad (**)$$

L'intégrale d'une fonction continue (par morceaux) étant une fonction continue des bornes de cette intégrales, les fonctions $s \mapsto \int_0^s t f(t) dt$ et $s \mapsto \int_s^1 (1-t) f(t) dt$ sont continues et, par théorèmes d'opérations, $T(f)$ l'est aussi. T est donc un endomorphisme de E . Enfin $|K(s, t)| \leq 1$ et donc

$$\forall s \in [0, 1], |T(f)(s)| \leq \int_0^1 |f(t)| dt \leq \|f\|_2 \quad \text{Cauchy-Schwarz avec } f \text{ et } 1$$

En élevant au carré et en intégrant entre 0 et 1, on a donc

$$\|T(f)\|_2^2 \leq \|f\|_2^2$$

ce qui montre que T est un opérateur de E (on peut choisir $M = 1$ dans (1)).

- b) Soit $f \in E$. D'après le théorème fondamental, $s \mapsto \int_0^s tf(t) dt$ et $s \mapsto \int_1^s (1-t)f(t) dt$ sont des primitives sur $[0, 1]$ de $s \mapsto sf(s)$ et $s \mapsto (1-s)f(s)$. Avec (**), $T(f) \in C^1$ et

$$\forall s \in [0, 1], (T(f))'(s) = - \int_0^s tf(t) dt + \int_s^1 (1-t)f(t) dt$$

puis $T(f) \in C^2$ avec

$$\forall s \in [0, 1], (T(f))''(s) = -f(s)$$

- c) Supposons que $f \in \ker(T)$. $f \in E$ et $T(f) = 0$. La question précédente donne $-f = (T(f))'' = 0$. Ainsi, $\ker(T) = \{0\}$ et f est injective.
- d) Soit $\lambda \sigma_p(T)$ et $f \in E$ telle que $T(f) = \lambda f$. Avec la question b) (et en dérivant deux fois) on a

$$-f = (T(f))'' = \lambda f''$$

De plus $0 = T(f)(0) = \lambda f(0)$ et $0 = T(f)(1) = \lambda f(1)$ et comme $\lambda \neq 0$ (car T est injective et $0 \notin \sigma_p(T)$), $f(0) = f(1) = 0$.

- e) Soit $\lambda \sigma_p(T)$. $\lambda \neq 0$ et il existe $f \neq 0$ telle que $T(f) = \lambda f$. On obtient une équation différentielle avec condition au bord que l'on résout en distinguant deux cas (on rappelle que $\lambda \neq 0$).
- Si $\lambda > 0$ on pose $\omega = 1/\sqrt{\lambda}$. Il existe des constantes a et b telles que $\forall s, f(s) = a \cos(\omega s) + b \sin(\omega s)$. $f(0) = 0$ donne $a = 0$ puis $f(1) = 0$ donne $b \sin(\omega) = 0$. Comme $f \neq 0$, $\omega = 0[\pi]$ et il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\lambda = \frac{1}{k^2\pi^2}$ et $f \in \text{Vect}(s \mapsto \sin(k\pi s))$.
 - Si $\lambda < 0$ on pose $\omega = 1/\sqrt{-\lambda}$. Il existe des constantes a et b telles que $\forall s, f(s) = a \cosh(\omega s) + b \sinh(\omega s)$. $f(0) = 0$ donne $a = 0$ puis $f(1) = 0$ donne $b = 0$. On a donc $f = 0$ ce qui est exclus.

A ce niveau, on a montré que

$$\sigma_p(T) \subset \left\{ \frac{1}{k^2\pi^2} / k \in \mathbb{N}^* \right\}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, E_{\frac{1}{k^2\pi^2}}(T) \subset \text{Vect}(s \mapsto \sin(k\pi s))$$

Réciproquement, soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $f : s \mapsto \sin(k\pi s)$. On a $f'' = -k^2\pi^2 f$ et donc $f'' = (k^2\pi^2 T(f))''$. $f - k^2\pi^2 T(f)$ est affine et, de plus, nulle en 0 et 1. C'est la fonction nulle et $T(f) = \frac{1}{k^2\pi^2} f$. Ceci prouve les inclusions réciproques.

Partie 4. Une classe particulière d'opérateurs.

- a) Soit $x \in H$. Comme $|||u|| - ||v||| \leq ||u - v||$ (seconde forme de l'inégalité triangulaire), on a

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left| \sum_{i=0}^N \langle x, b_i \rangle b_i \right| = \|x\|$$

En élevant au carré (le carré de la limite est la limite des carrés) et en utilisant le caractère orthonormé de $(b_i)_{i \in [0, N]}$ on obtient

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^N |\langle x, b_i \rangle|^2 = \|x\|^2$$

ce qui prouve que $\sum (|\langle x, b_i \rangle|^2)$ converge et que

$$\|x\|^2 = \sum_{i=0}^{+\infty} |\langle x, b_i \rangle|^2$$

- b) Soient $u, v \in H$; l'inégalité de Young indique que $|u_n v_n| \leq \frac{1}{2}(|u_n|^2 + |v_n|^2)$ et que $\sum (u_n v_n)$ converge (absolument). L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de l'énoncé est donc bien définie sur $H = \ell^2(\mathbb{N})$. Elle est immédiatement symétrique, linéaire par rapport à la seconde variable et positive. Enfin, si $\langle u, u \rangle = 0$ alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n|^2 = 0$ et les u_n sont donc tous nuls (une somme, même infinie, de quantités positive n'est nulle que si chaque terme est nul) et notre application est définie positive. C'est ainsi un produit scalaire sur H et $\|\cdot\|_2$ est la norme associée. Notons b_i la suite dont tous les termes sont nuls sauf celui d'indice i qui vaut 1. Il est immédiat que les b_i sont dans H et forment une famille orthonormale. Soit $u \in H$ et $N \in \mathbb{N}$; $v_N = u - \sum_{i=0}^N \langle u, b_i \rangle b_i$ est la suite $(0, \dots, 0, u_{N+1}, u_{N+2}, \dots)$ et on a donc

$$\left\| u - \sum_{i=0}^N \langle u, b_i \rangle b_i \right\|^2 = \sum_{k \geq N+1} |u_k|^2$$

qui tend vers 0 quand $N \rightarrow +\infty$ (reste d'une série convergente). La famille $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est donc une base hilbertienne de H .

- c) On notera que le résultat admis par l'énoncé correspond en dimension finie à l'existence d'un opérateur adjoint.

D'après la question a),

$$\forall i \in \mathbb{N}, \|\tilde{T}(c_i)\|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \langle \tilde{T}(c_i) | b_k \rangle^2$$

Par définition de $\tilde{T}$, on a donc

$$\forall i \in \mathbb{N}, \|\tilde{T}(c_i)\|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \langle c_i | T(b_k) \rangle^2$$

On en déduit que (pas de problème d'interversion car on a une somme finie)

$$\forall N \in \mathbb{N}, \sum_{i=0}^N \|\tilde{T}(c_i)\|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^N \langle c_i | T(b_k) \rangle^2 \right) \quad (***)$$

On veut faire tendre N vers $+\infty$ dans cette relation. A droite, on a une interversion. Posons

$$\alpha_k(N) = \sum_{i=0}^N \langle c_i | T(b_k) \rangle^2$$

On remarque que

$$\forall N \in \mathbb{N}, |\alpha_k(N)| \leq \sum_{i=0}^{+\infty} \langle c_i | T(b_k) \rangle^2 = \|T(b_k)\|^2$$

Le majorant est indépendant de N et est le terme général d'une série convergente. Ainsi, $\sum (\alpha_k)$ converge normalement (et donc uniformément) sur $\mathbb{N}$. De plus

$$\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{N \rightarrow +\infty} \alpha_k(N) = \sum_{i=0}^{+\infty} \langle c_i | T(b_k) \rangle^2 = \|T(b_k)\|^2$$

Le théorème de double limite indique alors que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^N \langle c_i | T(b_k) \rangle^2 \right) \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \|T(b_k)\|^2$$

Avec $(***)$, on obtient que $\sum_{i=0}^{+\infty} \|\tilde{T}(c_i)\|^2 < +\infty$ et que

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \|T(b_i)\|^2 = \sum_{i=0}^{+\infty} \|\tilde{T}(c_i)\|^2$$

- d) Soient (b_i) et (c_i) deux bases hilbertiennes.
- Supposons $\sum_{i=0}^{+\infty} \|T(b_i)\|^2 < +\infty$. La question précédente utilisée avec $c_i = b_i$ donne

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \|T(b_i)\|^2 = \sum_{i=0}^{+\infty} \|\tilde{T}(b_i)\|^2$$

Mais comme $\tilde{T} = T$, la question précédente donne aussi

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \|\tilde{T}(b_i)\|^2 = \sum_{i=0}^{+\infty} \|T(c_i)\|^2$$

On en déduit ainsi que

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \|T(b_i)\|^2 = \sum_{i=0}^{+\infty} \|T(c_i)\|^2$$

- Supposons $\sum_{i=0}^{+\infty} \|T(b_i)\|^2 = +\infty$. Alors avec la question précédente (et par l'absurde), ceci restera vrai pour toute autre base hilbertienne.
e) Notons (b_i) la base hilbertienne décrite en question b). On a

$$\forall i \in \mathbb{N}, S(b_i) = b_{i+1} \text{ et } V(b_i) = \begin{cases} b_{i-1} & \text{si } i \geq 1 \\ 0 & \text{si } i = 0 \end{cases}$$

On a ainsi $\forall i \in \mathbb{N}, \|S(b_i)\|^2 = 1$ qui est le terme général d'une série divergente. Il en est de même pour $\|V(b_i)\|^2$ qui vaut 1 à partir du rang 1. On a donc

$$S \notin \mathcal{L}^2(H) \text{ et } V \notin \mathcal{L}^2(H)$$

Soit $T : u \mapsto v$ avec $\forall n, v_n = \frac{u_n}{2^n}$.

- T est clairement une application linéaire.
- Soit $u \in H$; notons $v = T(u)$. On a $\sum_{k=0}^n v_k^2 = \sum_{k=0}^n \frac{u_k^2}{4^k} \leq \sum_{k=0}^n u_k^2 \leq \|u\|_2^2$. Ainsi, $v \in H$ et $\|v\|_2 \leq \|u\|_2$ ce qui prouve que T est un opérateur de H .
- On a $T(b_i) = \frac{1}{2^i} b_i$ et donc $\|T(b_i)\|^2 = \frac{1}{4^i}$ est le terme général d'une série convergente. Ainsi, $T \in \mathcal{L}^2(H)$.
f) On fixe pour cette question une base hilbertienne $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Soient $L, U \in \mathcal{L}^2(H)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour $u, v \in H$, on a $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2 \langle u, v \rangle \leq 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$ (puisque $2 \langle u, v \rangle \leq 2\|u\|\|v\| \leq \|u\|^2 + \|v\|^2$) et ainsi

$$\forall i \in \mathbb{N}, \|(L + \lambda U)(b_i)\|^2 = 2\|L(b_i)\|^2 + 2\lambda^2\|U(b_i)\|^2$$

ce qui est le terme général d'une série convergente. Ainsi $L + \lambda U \in \mathcal{L}^2(H)$ et $\mathcal{L}^2(H)$ (qui est non vide) est un sous-espace de $\mathcal{L}(H)$.

- g) Soient $L, U \in \mathcal{L}^2(H)$ et $B = (b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une base hilbertienne. On a (inégalité de Schwarz dans $\ell^2(\mathbb{N})$)

$$\forall i \in \mathbb{N}, |\langle L(b_i), U(b_i) \rangle| \leq \|L(b_i)\| \|U(b_i)\|$$

et on a vu en question b) que c'est le terme général d'une série convergente puisque $(\|L(b_i)\|)$ et $(\|U(b_i)\|)$ sont dans $\ell^2(\mathbb{N})$. On peut donc considérer

$$\langle L, U \rangle_2 = \sum_{i=0}^{+\infty} \langle L(b_i), U(b_i) \rangle$$

D'après les formules de polarisation,

$$2 \langle L(b_i), U(b_i) \rangle = \|(L + U)(b_i)\|^2 - \|L(b_i)\|^2 - \|U(b_i)\|^2$$

Avec la question d), on en déduit que $\langle L, U \rangle_2$ ne dépend pas du choix de la base hilbertienne $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$.

On a défini une application clairement bilinéaire, symétrique et positive. Si $\langle U, U \rangle_2 = 0$ alors $\forall i, \|U(b_i)\|^2 = 0$; soit $x \in H$, on a alors (par définition d'une base hilbertienne)

$$x = \sum_{i=0}^{+\infty} \langle x, b_i \rangle b_i$$

Comme U est continue (puisque c'est un opérateur, la condition (1) donne le caractère lipschitzien de l'application linéaire U), on en déduit que

$$U(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \langle x, b_i \rangle U(b_i) = 0$$

et donc $U = 0$. Notre application est ainsi définie positive et c'est finalement un produit scalaire sur $\mathcal{L}^2(H)$.

h) On suppose que $L \in \mathcal{L}^2(H)$ et $U \in \mathcal{L}(H)$.

- UL est bien sûr un endomorphisme de H . On a l'existence de constantes a et b telles que

$$\forall x \in H, \|U(x)\| \leq a\|x\| \quad \text{et} \quad \|L(x)\| \leq b\|x\|$$

et on en déduit que

$$\forall x \in H, \|UL(x)\| \leq a\|L(x)\| \leq ab\|x\|$$

ce qui montre que $UL \in \mathcal{L}(H)$ (c'est bien un opérateur).

Si on sait que (1) équivaut à la continuité de l'application linéaire, on peut aussi conclure en disant qu'une composée d'applications linéaires continues est linéaire continue.

- Soit (b_i) une base hilbertienne. On a

$$\forall i \in \mathbb{N}, \|UL(b_i)\|^2 \leq a^2 \|L(b_i)\|^2$$

qui est le terme général d'une série convergente car $L \in \mathcal{L}^2(H)$. Ainsi, $UL \in \mathcal{L}^2(H)$.

i) On suppose cette fois que $L \in \mathcal{L}(H)$ et $U \in \mathcal{L}^2(H)$. La même preuve montre que $UL \in \mathcal{L}(H)$. On a facilement

$$\widetilde{UL} = \tilde{L}\tilde{U}$$

Avec la question c), $\tilde{U} \in \mathcal{L}^2(H)$ et donc $\widetilde{UL} \in \mathcal{L}^2(H)$ puis (encore c)) $UL \in \mathcal{L}^2(H)$.