

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES (XEULC)

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

Ce sujet est consacré à l'étude de propriétés asymptotiques de certaines intégrales à paramètre.

NOTATIONS, DÉFINITIONS, RAPPELS.

Nombres. On note $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ l'ensemble des entiers naturels, \mathbb{N}^* l'ensemble des entiers naturels non nuls, \mathbb{Z} l'ensemble des entiers relatifs et \mathbb{Z}^* l'ensemble des entiers relatifs non nuls.

Fonctions numériques. Si I est un intervalle de \mathbb{R} , on note $\mathcal{C}^0(I)$ (respectivement $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$) l'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs réelles (respectivement à valeurs complexes). Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{C}^k(I)$ (respectivement $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{C})$) l'ensemble des fonctions de classe C^k sur I à valeurs réelles (respectivement à valeurs complexes). on note $\mathcal{C}^\infty(I)$ (respectivement $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{C})$) l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur I à valeurs réelles (respectivement à valeurs complexes).

Si g est une fonction bornée sur I , on note $\|g\|_{\infty, I}$ (ou simplement $\|g\|_\infty$) la valeur

$$\|g\|_{\infty, I} = \sup_{x \in I} |g(x)|$$

Si I est un intervalle ouvert, on dit qu'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est à support compact dans I s'il existe $\alpha, \beta \in I$, $\alpha < \beta$, tels que pour tout $x \in I \setminus [\alpha, \beta]$, $f(x) = 0$.

Séries indexées par \mathbb{Z} . Pour une famille de nombres réels ou complexes $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, on dit que la série $\sum a_n$ converge si les deux séries

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}$$

sont convergentes, et on pose alors

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}$$

Coefficients de Fourier. Si $\phi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est périodique de période 2π , et si $n \in \mathbb{Z}$, le n -ème coefficient de Fourier de ϕ est

$$c_n(\phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-inx} \phi(x) dx$$

Dans tout le problème a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$.

Les trois parties du problème sont indépendantes.

I. INTÉGRALES À PHASE RÉELLE.

1. *Deux cas particuliers.* Soit $d > 0$. Soit $g \in \mathcal{C}^0([0, d])$ telle que $g(0) \neq 0$.

(a) Montrer que

$$\int_0^d e^{-tx} g(x) dx \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{g(0)}{t}$$

Indication. Pour $t > 0$, on pourra construire une fonction g continue par morceaux sur $[0, +\infty[$, bornée, telle que :

$$\int_0^d e^{-tx} g(x) dx = \frac{1}{t} \int_0^{+\infty} e^{-x} g_t(x) dx.$$

(b) Montrer de même que

$$\int_0^d e^{-tx^2} g(x) dx \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi} g(0)}{2 \sqrt{t}}.$$

Indication. On rappelle l'égalité $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$ telle que $f(a) \neq 0$ et $\varphi \in \mathcal{C}^1([a, b])$. Pour tout paramètre $t \in \mathbb{R}$, on note

$$F(t) = \int_a^b e^{-t\varphi(x)} f(x) dx.$$

Les deux cas étudiés à la question 1) correspondent à $\varphi(x) = x$ et $\varphi(x) = x^2$, respectivement lorsque $a = 0$ et $b = d$.

2. *Cas où la phase φ n'a pas de point critique dans $[a, b]$.* On suppose que $\varphi'(x) > 0$ pour tout $x \in [a, b]$.

- (a) Montrer que $\Phi : x \mapsto \varphi(x) - \varphi(a)$ réalise une bijection de $[a, b]$ sur un intervalle de la forme $[0, \beta]$, et qu'elle est de classe C^1 .

- (b) Montrer que

$$F(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-t\varphi(a)} f(a)}{\varphi'(a)t}$$

Indication. On se raménera au cas traité à la question 1)(a) à l'aide d'un changement de variable.

3. Cas où la phase φ a un point critique en a . On suppose maintenant que $\varphi \in C^2([a, b])$. $\varphi'(a) = 0$, $\varphi''(a) > 0$ et $\varphi'(x) > 0$ pour tout $x \in]a, b]$.

- (a) Montrer que la formule $\psi(x) = \sqrt{\varphi(x) - \varphi(a)}$ définit une fonction de classe C^1 sur $[a, b]$. Calculer $\psi'(a)$.

- (b) Montrer que ψ réalise une bijection de $[a, b]$ sur un intervalle de la forme $[0, \beta]$.

- (c) Montrer que

$$F(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2\varphi''(a)}} \frac{e^{-t\varphi(a)} f(a)}{\sqrt{t}}$$

Indication. On se raménera au cas traité à la question 1(b) à l'aide d'un changement de variable.

On admettra que la résultat se généralise de la façon suivante :

Résultat 1. Soit $f \in C^0(]0, +\infty[)$ et $\varphi \in C^2(]0, +\infty[)$. On suppose qu'il existe un unique $c > 0$ tel que $\varphi'(c) = 0$. On suppose de plus que $f(c) \neq 0$ et $\varphi''(c) > 0$. On suppose finalement que $\int_0^{+\infty} e^{-\varphi(x)} |f(x)| dx$ converge. Alors,

$$\int_0^{+\infty} e^{-t\varphi(x)} f(x) dx \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{\varphi''(c)}} \frac{e^{-t\varphi(c)} f(c)}{\sqrt{t}}$$

4. *Application.* Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$.

- (a) Calculer $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On utilisera une récurrence.

- (b) En déduire l'équivalent suivant

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi} n^{n+1/2} e^{-n}$$

Indication. On réécrira d'abord $\Gamma(n+1)$ sous la forme

$$\Gamma(n+1) = n^{n+1} \int_0^{+\infty} e^{-n(x-\ln x)} dx.$$

II. FONCTIONS PÉRIODIQUES.

5. *Séries de Fourier.* Soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction périodique de période 2π , de classe C^1 .

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, $c_n(\phi) = \frac{c_n(\phi')}{in}$.

(b) Montrer que la série $\sum |c_n(\phi)|$ converge. *Indication : utiliser la formule de Parseval pour la fonction ϕ' .*

(c) Montrer que

$$\|\phi\|_\infty \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(\phi)|.$$

Soit $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, périodique de période 2π . Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur $[a, b]$. Pour tout paramètre $\varepsilon > 0$ on pose

$$J_\varepsilon = \int_a^b \psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) f(x) dx.$$

6 *Premier cas.* Dans ce cas, on suppose de plus que ψ est de classe C^1 sur \mathbb{R} et que f est à support compact dans $[a, b]$.

(a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\left| J_\varepsilon - c_0(\psi) \left(\int_a^b f(x) dx \right) \right| \leq \varepsilon(b-a) \|f'\|_\infty \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{|c_n(\psi)|}{|n|}$$

Indication. On pourra se ramener au cas où $\int_0^{2\pi} \psi(y) dy = 0$.

(b) En déduire la limite de J_ε quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

7. *Deuxième cas.* On suppose maintenant seulement que $\psi \in C^0(\mathbb{R})$ est périodique de période 2π , et $f \in C^1([a, b])$. Soit $\varepsilon > 0$. On définit une subdivision de de l'intervalle $[a, b]$ de la façon suivante. On note N_ε la partie entière de $\frac{b-a}{2\pi\varepsilon}$. On définit alors

$$x_k^\varepsilon = a + 2k\pi\varepsilon, \quad \text{pour tout entier } k \text{ tel que } 0 \leq k \leq N_\varepsilon$$

(a) Montrer que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_{N_\varepsilon}^\varepsilon = b$.

(b) En déduire que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{x_{N_\varepsilon}^\varepsilon}^b \psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) f(x) dx = 0.$$

(c) Montrer que pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq N_\varepsilon - 1$, pour tout $x \in [x_k^\varepsilon, x_{k+1}^\varepsilon]$,

$$|f(x) - f(x_k^\varepsilon)| \leq 2\pi\varepsilon \|f'\|_\infty$$

(d) Montrer que

$$\sum_{k=0}^{N_\varepsilon-1} \int_{x_k^\varepsilon}^{x_{k+1}^\varepsilon} \psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) f(x_k^\varepsilon) dx = \left(\int_0^{2\pi} \psi(y) dy \right) \left(\varepsilon \sum_{k=0}^{N_\varepsilon-1} f(x_k^\varepsilon) \right)$$

(e) Montrer que

$$\left| \sum_{k=0}^{N_\varepsilon-1} \int_{x_k^\varepsilon}^{x_{k+1}^\varepsilon} \psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) (f(x) - f(x_k^\varepsilon)) dx \right| \leq \varepsilon(b-a) \|f'\|_\infty \left(\int_0^{2\pi} |\psi(y)| dy \right)$$

(f) En déduire que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(y) dy \right) \left(\int_a^b f(x) dx \right)$.

8. *Application.* Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On considère l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} u''(t) + u(t) = g\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \\ u(0) = \alpha, u'(0) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

- (a) Justifier l'existence et l'unicité d'une solution de (1) définie pour $t \in \mathbb{R}$.
- (b) Calculer cette solution au moyen de la méthode de la variation des constantes. On notera cette solution u_ε .
- (c) On suppose que g est 2π -périodique. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u_\varepsilon(t)$ admet une limite quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$, limite que l'on calculera.

III. INTÉGRALES OSCILLANTES.

Dans cette partie $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions de classe C^∞ . On s'intéresse maintenant à des intégrales de la forme

$$I(\lambda) = \int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)} f(x) dx.$$

où λ est un paramètre réel strictement positif.

Dans toute la suite on fixe $\lambda > 0$.

9. *Cas d'une phase non stationnaire.* On suppose dans cette question que $\varphi'(x) \neq 0$ pour tout $x \in [a, b]$.

(a) On définit $L : \mathcal{C}^\infty([a, b], \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty([a, b], \mathbb{C})$ et $M : \mathcal{C}^\infty([a, b], \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty([a, b], \mathbb{C})$ par : pour tout $g \in \mathcal{C}^\infty([a, b], \mathbb{C})$, tout $x \in [a, b]$,

$$Lg(x) = \frac{1}{i\lambda\varphi'(x)} g'(x), \quad Mg(x) = - \left(\frac{g}{i\varphi'} \right)'(x).$$

i. Déterminer les fonctions $g \in \mathcal{C}^\infty([a, b], \mathbb{C})$ telles que $Lg = g$.

- ii. Soit $g, h \in \mathcal{C}^\infty([a, b], \mathbb{C})$. On suppose que h est à support compact dans $]a, b[$.
Montrer que :

$$\int_a^b h(x)Lg(x)dx = \frac{1}{\lambda} \int_a^b g(x)Mh(x)dx.$$

- (b) Montrer que si f est à support compact dans $]a, b[$, alors pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, il existe une constante γ_N indépendante de λ telle que

$$|I(\lambda)| \leq \gamma_N \lambda^{-N}.$$

10. (a) On suppose que $|\varphi'(x)| \geq 1$ pour tout $x \in [a, b]$ et que φ' est monotone sur $[a, b]$.
Montrer qu'il existe une constante $c_1 > 0$, indépendante de λ , φ et de a, b telle que

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)} dx \right| \leq c_1 \lambda^{-1}$$

Indication. On pourra écrire

$$\int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)} dx = \int_a^b i\lambda\varphi'(x)e^{i\lambda\varphi(x)} \frac{1}{i\lambda\varphi'(x)} dx.$$

et intégrer par parties.

- (b) Soit $\delta > 0$. On suppose que $|\varphi'(x)| \geq \delta$ pour tout $x \in [a, b]$ et que φ' est monotone sur $[a, b]$. Montrer que :

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)} dx \right| \leq c_1 (\lambda\delta)^{-1}.$$

11. *Cas où la phase peut être stationnaire.* Dans toute cette question on suppose que $|\varphi''(x)| \geq 1$ pour tout $x \in [a, b]$.

- (a) Montrer que φ' est strictement monotone sur $[a, b]$ et qu'il existe un unique point $c \in [a, b]$ tel que $|\varphi'(c)| = \inf_{x \in [a, b]} |\varphi'(x)|$.

- (b) Si $x \in [a, b]$, montrer que $|\varphi'(x)| \geq |x - c|$.

- (c) Montrer que pour tout $\delta > 0$,

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)} dx \right| \leq 2c_1 (\lambda\delta)^{-1} + 2\delta.$$

- (d) En déduire qu'il existe une constante c_2 , indépendante de λ, φ, a et b telle que

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)} dx \right| \leq c_2 \lambda^{-1/2}.$$

- (e) Montrer que

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)} f(x) dx \right| \leq c_2 \lambda^{-1/2} \left(|f(b)| + \int_a^b |f'(x)| dx \right).$$

* *
*

*N.B. : version TEX reconstituée à partir de la version PDF du sujet original.
Avril 2014. HD*