ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CONCOURS D'ADMISSION 2014 FILIÈRE MP

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES – B – (X)

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

Toute affirmation doit être justifiée. On prendra soin à la clarté et à la précision de la rédaction.

Notations

Soit d un entier strictement positif. On note $\mathcal{M}_d(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées réelles de taille d et I_d désigne la matrice identité. Le produit de deux matrices A et B de $\mathcal{M}_d(\mathbf{R})$ est noté $A \times B$ ou simplement AB. On appelle commutateur de A et B la matrice

$$[A, B] = AB - BA.$$

On rappelle que l'exponentielle d'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_d(\mathbf{R})$ est définie par

$$\exp(A) = I_d + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

On munit $\mathcal{M}_d(\mathbf{R})$ d'une norme d'algèbre $\|\cdot\|$, c'est-à-dire que pour toutes matrices A, B de $\mathcal{M}_d(\mathbf{R})$,

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|.$$

On note $\mathrm{GL}_d(\mathbf{R})$ le groupe linéaire des matrices de $\mathcal{M}_d(\mathbf{R})$ qui sont inversibles, et $\mathrm{SL}_d(\mathbf{R})$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}_d(\mathbf{R})$ formé des matrices de déterminant 1.

La première et la troisième parties sont consacrées à l'étude de matrices carrées de taille $d = 3$. La deuxième partie est largement indépendante des autres parties.

Première partie

On considère l'ensemble des matrices carrées de taille 3 triangulaires supérieures strictes :

$$\mathbf{L} = \left\{M_{p,q,r} \mid (p, q, r) \in \mathbf{R}^3\right\} \qquad \text{où} \qquad M_{p,q,r} = \begin{pmatrix} 0 & p & r \\ 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On définit $\mathbf{H} = \{I_3 + M \mid M \in \mathbf{L}\}$.

1. Calculer l'exponentielle de la matrice $M_{p,q,r}$.

2a. Montrer que l'on définit une loi de groupe $*$ sur $\mathbf{L}$ en posant pour $M, N \in \mathbf{L}$:

$$M * N = M + N + \frac{1}{2}[M, N].$$

On explicitera l'inverse de $M_{p,q,r}$.

2b. Déterminer les matrices $M_{p,q,r} \in \mathbf{L}$ qui commutent avec tous les éléments de $\mathbf{L}$ pour la loi $*$. $(\mathbf{L}, *)$ est-il commutatif ?

3. Montrer que pour toutes matrices $M, N \in \mathbf{L}$, on a :

$$(\exp M) \times (\exp N) = \exp(M * N).$$

4. Soient M et N deux éléments de $\mathbf{L}$. Montrer que

$$\exp([M, N]) = \exp(M) \exp(N) \exp(-M) \exp(-N).$$

5. Montrer que $\mathbf{H}$ muni du produit usuel des matrices est un sous-groupe de $\mathrm{SL}_3(\mathbf{R})$ et que

$$\exp : (\mathbf{L}, *) \to (\mathbf{H}, \times)$$

est un isomorphisme de groupes.

Deuxième partie

On considère dans cette partie deux matrices A et B de $\mathcal{M}_d(\mathbf{R})$.
Dans les questions **6** et **7**, on suppose de plus que A et B commutent avec $[A, B]$.

6a. Montrer que $[A, \exp(B)] = \exp(B)[A, B]$.

6b. Déterminer une équation différentielle vérifiée par $t \mapsto \exp(tA)\exp(tB)$.

6c. En déduire la formule :

$$\exp(A) \exp(B) = \exp\left(A + B + \frac{1}{2}[A, B]\right).$$

7. On note $\mathcal{L} = \mathrm{Vect}(A, B, [A, B])$.

7a. Si $M, N \in \mathcal{L}$, montrer que $[M, N]$ commute avec M et N.

7b. Soit $G = \{\exp(M) \mid M \in \mathcal{L}\}$. Montrer que $(G, \times)$ est un groupe et que l'application

$$\Phi : \mathbf{H} \to G, \quad \exp(M_{p,q,r}) \mapsto \exp(pA + qB + r[A, B]),$$

est un morphisme de groupes.

Dans toute la suite de cette partie, A et B sont à nouveau deux matrices quelconques de $\mathcal{M}_d(\mathbf{R})$.

8. Soit $(D_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de $\mathcal{M}_d(\mathbf{R})$ qui converge vers $D \in \mathcal{M}_d(\mathbf{R})$. Elle est donc bornée : soit $\lambda > 0$ tel que pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $\|D_n\| \leq \lambda$.

8a. Soit $k \in \mathbf{N}$. Justifier que $\dfrac{n!}{(n-k)!n^k} \to 1$ quand $n \to +\infty$ et que si $n \geq k$ (et $n \geq 1$),

$$0 \leq 1 - \frac{n!}{(n-k)!n^k} \leq 1.$$

En déduire que

$$\left(I_d + \frac{D_n}{n}\right)^n - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(D_n)^k \to 0 \quad \text{quand } n \to +\infty.$$

8b. Montrer que pour tous entiers $k \geq 1$ et $n \geq 0$,

$$\|(D_n)^k - D^k\| \leq k\lambda^{k-1}\|D_n - D\|.$$

8c. Conclure que $\left(I_d + \dfrac{D_n}{n}\right)^n \to \exp(D)$ quand $n \to +\infty$.

9a. Soit $D \in \mathcal{M}_d(\mathbf{R})$ telle que $\|D\| \leq 1$. Montrer qu'il existe une constante $\mu > 0$ indépendante de D telle que

$$\|\exp(D) - I_d - D\| \leq \mu\|D\|^2.$$

9b. Montrer qu'il existe une constante $\nu > 0$, et pour tout $n \geq 1$ une matrice $C_n \in \mathcal{M}_d(\mathbf{R})$, tels que

$$\exp\left(\frac{A}{n}\right)\exp\left(\frac{B}{n}\right) = I_d + \frac{A}{n} + \frac{B}{n} + C_n \quad \text{et} \quad \|C_n\| \leq \frac{\nu}{n^2}.$$

10. Déduire de ce qui précède que

$$\exp(A+B) = \lim_{n\to+\infty}\left(\exp\left(\frac{A}{n}\right)\exp\left(\frac{B}{n}\right)\right)^n.$$

Troisième partie

Soit T un réel strictement positif. On note $E(T)$ l'ensemble constitué des couples (u,v) de fonctions continues sur $[0,T]$ à valeurs réelles.

Un *chemin de Carnot contrôlé par* $(u,v) \in E(T)$ est une application $\gamma : [0,T] \to \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ de classe C^1 solution de l'équation différentielle matricielle :

$$\begin{cases} \gamma'(t) = u(t)\gamma(t)M_{1,0,0} + v(t)\gamma(t)M_{0,1,0}, \\ \gamma(0) = I_3, \end{cases}$$

où les matrices $M_{1,0,0}$ et $M_{0,1,0}$ ont été introduites dans la première partie.

11a. Pour tout $(u,v) \in E(T)$, justifier l'existence d'un unique chemin de Carnot controlé par (u,v).

11b. Montrer que γ vérifie
$$\forall t \in [0,T], \qquad \gamma(t) \in \mathbf{H},$$
et calculer explicitement, en fonction de t, u et v les fonctions $p(t)$, $q(t)$ et $r(t)$ telles que
$$\gamma(t) = \exp(M_{p(t),q(t),r(t)}).$$

12. Pour tout $(\theta,\varphi) \in \mathbf{R}^2$ et $t \in \mathbf{R}$, on définit les contrôles
$$u_{\theta,\varphi}(t) = \sin(\theta - \varphi t) \qquad \text{et} \qquad v_{\theta,\varphi}(t) = \cos(\theta - \varphi t),$$
et on note $\gamma_{\theta,\varphi}(t) = \exp(M_{p(t),q(t),r(t)})$ le chemin de Carnot controlé par $(u_{\theta,\varphi}, v_{\theta,\varphi})$.

12a. On suppose $\varphi \neq 0$. Calculer $p(t)$ et $q(t)$ et vérifier que
$$r(t) = \frac{t\varphi - \sin(t\varphi)}{2\varphi^2}.$$

12b. Calculer de même $\gamma_{\theta,0}(t)$.

La *sphère de Carnot* est l'ensemble :
$$B(1) = \left\{(p,q,r) \in \mathbf{R}^3 \mid \exists(\theta,\varphi) \in [-\pi,\pi] \times [-2\pi,2\pi],\ \gamma_{\theta,\varphi}(1) = \exp(M_{p,q,r})\right\}.$$

13. On définit les fonctions f et g sur $]0,2\pi]$ par :
$$f(s) = \frac{2(1-\cos s)}{s^2} \qquad \text{et} \qquad g(s) = \frac{s - \sin s}{2s^2}.$$
Montrer que f et g se prolongent par continuité sur $[0,2\pi]$; que f est alors une bijection continue de $[0,2\pi]$ sur un ensemble qu'on précisera ; et que g atteint son maximum en π.

14. Montrer que si $(p,q,r) \in B(1)$ avec $r \geq 0$ alors $r = g \circ f^{-1}(p^2+q^2)$.
Énoncer et établir une réciproque.

On pourra donner l'allure de la fonction $s \mapsto g \circ f^{-1}(s^2)$ pour $s \in [0,1]$ et notamment les tangentes en $s=0$ et $s=1$.

15. Montrer l'existence d'une constante $c_1 > 0$ telle que pour tout $(p,q,r) \in B(1)$, on ait
$$c_1^{-1} \leq p^2 + q^2 + |r| \leq c_1.$$

16a. Montrer que pour tout $(p,q,r) \in \mathbf{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\}$, il existe un unique $\lambda > 0$ tel que :
$$(\lambda p, \lambda q, \lambda^2 r) \in B(1).$$

16b. En déduire que pour tout point $A \in \mathbf{H}$, il existe un réel positif $T(A)$ et des paramètres (θ,φ) (dépendants également de A) tels que A soit l'extrémité du chemin de Carnot contrôlé par $(u_{\theta,\varphi}, v_{\theta,\varphi}) \in E(T(A))$.

16c. Montrer l'existence d'une constante $c_2 > 0$ telle que pour tout $(p,q,r) \in \mathbf{R}^3$,
$$c_2^{-1}\sqrt{p^2+q^2+|r|} \leq T(\exp(M_{p,q,r})) \leq c_2\sqrt{p^2+q^2+|r|}.$$

* *
*