Math93.com

Devoir Surveillé n°5
Correction

Quatrième

Bilan 1

Durée 100 min - Coeff. 2

Noté sur 29 points

Avertissement : tous les résultats doivent être dûment justifiés. La rédaction doit être à la fois précise, claire et concise.

L'utilisation des ***fiches de cours*** *est exceptionnellement autorisé pour ce devoir de Noël sous réserve qu'elles soient MANUSCRITES.*

L'utilisation de la calculatrice est autorisée.

Exercice 1. Développement et factorisation — 2 points

Corrigé

A compléter sur cette feuille

a) Développer et réduire en utilisant la double distributivité :

$$F(x) = (x+1)(x+2)$$
$$F(x) = x^2 + 2x + x + 2$$
$$F(x) = \underline{x^2 + 3x + 2}$$

b) Factoriser le plus possible

$$G(x) = x^2 - 3x$$
$$G(x) = \underline{x(x-3)}$$

Le reste du devoir est à faire sur votre copie

Exercice 2. Quelques calculs — 4 points

Effectuez les calculs suivants proposés par Noah :

1. $A = -2 \times (2-5) - 10 \times (-3)$

2. $B = \dfrac{2 - 3 \times 4}{10 - 2 \times 4}$

3. $C = A - B$

4. $D = \dfrac{3}{4} - \dfrac{4}{3}$

Corrigé

1. $A = -2 \times (2-5) - 10 \times (-3)$

$$A = -2 \times \underbrace{(2-5)} \underbrace{-10 \times (-3)}$$
$$A = \underbrace{-2 \times (-3)} \quad +30$$
$$A = \quad 6 \quad + 30$$
$$\boxed{A = 36}$$

$B = \dfrac{2-3\times 4}{10-2\times 4}$

$$B = \frac{2-3\times 4}{10-2\times 4}$$
$$B = \frac{2-12}{10-8}$$
$$B = \frac{-10}{2}$$
$$\boxed{B = -5}$$

$C = A - B = 36 - (-5) = 36 + 5 = \underline{41}$

$$D = \frac{3}{4} - \frac{4}{3}$$
$$D = \frac{9}{12} - \frac{16}{12}$$
$$\boxed{D = -\frac{7}{12}}$$

Exercice 3. Développement et calcul de valeur — 5 points

On considère l'expression suivante proposée par Justine :

$$E(x) = (2x-3)(1-4x) - (2-x) + 5$$

1. Avec un développement et une réduction, Simon obtient l'expression suivante. Montrez qu'il a raison :

$$E(x) = -8x^2 + 15x$$

Corrigé

$$E(x) = (2x-3)(1-4x) - (2-x) + 5$$
$$E(x) = 2x - 8x^2 - 3 + 12x - 2 + x + 5$$
$$\boxed{E(x) = -8x^2 + 15x}$$

2. Factoriser le plus possible l'expression $E(x)$.

Corrigé

On va factoriser la forme développée obtenue lors de la question précédente :

$$\boxed{E(x) = -8x^2 + 15x = \underline{x(-8x+15)}}$$

3. Giorgiana affirme que si elle remplace x par 2 dans l'expression $E(x)$, elle obtiendra (-12). A-t-elle raison ? Justifier

Corrigé

On remplace x par 2 donc en utilisant la forme développée :

$$E(2) = -8 \times 2^2 + 15 \times 2$$
$$E(2) = -8 \times 4 + 30$$
$$E(2) = -32 + 30$$
$$\boxed{E(2) = -2}$$

Donc Giorgiana a tort.

4. Mathilde souhaite regrouper les résultats obtenu en remplaçant x par des valeurs à l'aide d'un tableur. Elle crée la feuille de calcul ci-dessous.
Quelle formule a-t-elle saisie dans la cellule B2, puis copiée ensuite à droite dans les cellules C2 à H2 ?

B2 | ✗ ✔ f_x | = ?

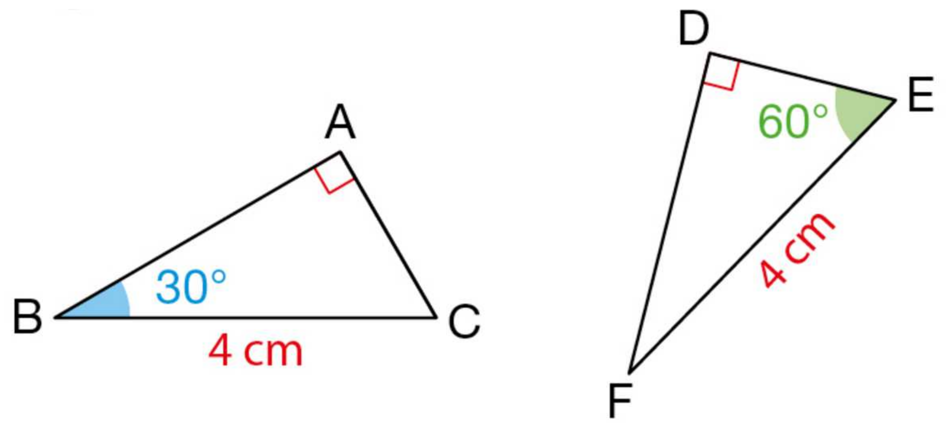
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Nombre de départ x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2	Résultat $E(x)$	-117	-62	-23	0	7	-2	-27

Corrigé

Il suffit d'écrire la formule :

$$\boxed{= -8 * B1 * B1 + 15 * B1}$$

Exercice 4. Those triangles look familiar to me — 5 points



1. Démontrer que ces deux triangles sont égaux.

Corrigé

- Dans le triangle rectangle ABC, les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont complémentaires donc :

$$\widehat{C} = 90° - \widehat{B} = 60°$$

- Dans le triangle rectangle DEF, les angles $\widehat{E}$ et $\widehat{F}$ sont complémentaires donc :

$$\widehat{F} = 90° - \widehat{E} = 30°$$

- Les deux triangles ont donc 1 côté de même longueur et deux angles adjacents de même mesure, donc ils sont égaux. En effet on a :

1 côté et 2 angles adjacents	[BC]	$\widehat{CBA} = 30°$	$\widehat{BCA} = 60°$
Homologues	[EF]	$\widehat{EFD} = 30°$	$\widehat{FED} = 60°$

Remarque : attention, il faut obligatoirement donner les côtés et angles homologues, sous forme de tableau ou par une phrase.

2. Donner alors les sommets homologues (sans justification).

Corrigé

Sommets	A	B	C
Homologues	D	F	E

3. On sait que $DE = 2$ cm et que $DF = \sqrt{12}$ cm.
En déduire les longueurs des côtés du triangle ABC.

Corrigé
On a donc :

$$\begin{cases} Distances \\ AB = DF = \sqrt{12}\text{ cm} \\ AC = DE = 2\text{ cm} \\ BC = FE = 4\text{ cm} \end{cases}$$

4. Donner un encadrement de $DF = \sqrt{12}$ entre deux entiers consécutifs en expliquant votre méthode.
Attention, l'encadrement seul ne rapportera que peu de points.

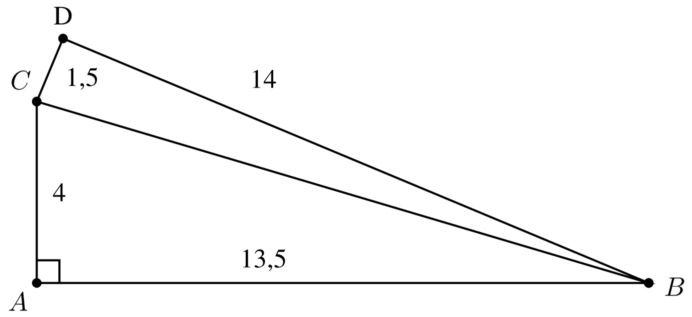
Corrigé
On a :

$$3^2 = 9 < 12 < 16 = 4^2$$

Donc

$$\boxed{3 < \sqrt{12} < 4}$$

Exercice 5. Pythagore de Samos is my best friend 5 points



On a :

- $AC = 4$ cm ;
- $AB = 13,5$ cm ;
- $CD = 1,5$ cm ;
- $BD = 14$ cm.

1. Reproduire la figure en vraie grandeur sur votre copie.
2. Calculer la valeur exacte de BC puis en donner une valeur approchée au dixième.
3. Le triangle BCD est-il rectangle ?

Corrigé

1. Construction de la figure.
2. **Calculons CB - Attention : en fait on a besoin que de CB^2 pour le test.**
   - **Données**.
     Le triangle ABC est rectangle en A. L'hypoténuse est donc le côté $[CB]$.
   - **Le théorème**.
     Donc d'après le *théorème de Pythagore* :
     $$CB^2 = CA^2 + AB^2$$
     $$CB^2 = 4^2 + 13,5^2$$
     $$\boxed{CB^2 = 198,25}$$
   - **Conclusion**.
     Et puisque CB est une longueur, on a
     $$BC = \sqrt{198,25} \approx 14,1 \text{ cm à } 0,1 \text{ cm près.}$$
3. **Le triangle BCD est-il rectangle** ?
   - **Données**.
     Si le triangle BCD est rectangle, c'est en D car [BC] est le plus grand côté.
   - **Le test**. $\begin{cases} BC^2 & = & 198,25 \\ BD^2 + DC^2 & = & 14^2 + 1,5^2 & = & 198,25 \end{cases}$
   - **Conclusion**.
     On a donc égalité, $BD^2 + DC^2 = BC^2$.
     De ce fait, d'après la *réciproque du théorème de Pythagore*, le triangle BCD est rectangle en D.

Remarque

Si on utilise une valeur approchée de CB soit par exemple 28,2, le test est négatif puisque :

- d'une part :
$$BC^2 \approx 28,2^2 = 795,24$$
- d'autre part :
$$BD^2 + DC^2 = 28^2 + 3^2 = 793$$

Alors attention, il faut utiliser une valeur exacte (avec la racine carrée) ou plus simplement le carré de BC soit BC^2 et pas une valeur approchée.

Exercice 6. Un programme de calcul — 5 points

Sasha donne le programme de calcul suivant :

Programme de calcul

1. Choisir un nombre
2. Lui ajouter $\frac{1}{3}$
3. Enlever $\frac{1}{4}$ au résultat
4. Enlever $\frac{1}{12}$ au résultat
5. Écrire le résultat obtenu

1. Manon choisit au départ le nombre rationnel $\frac{4}{3}$, quel nombre obtient-elle à la fin du programme ?
2. Victor choisit au départ le nombre rationnel $\left(-\frac{5}{6}\right)$, quel nombre obtient-il à la fin du programme ?
3. Que peut-on émettre comme conjecture ?
4. Prouver cette conjecture.

1. Quel nombre obtient-on quand on choisit au départ le nombre rationnel $\frac{4}{3}$?

Corrigé

Choisir un nombre	$\frac{4}{3}$
Lui ajouter $\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3} + \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$
Enlever $\frac{1}{4}$ au résultat	$\frac{5}{3} - \frac{1}{4} = \frac{20}{12} - \frac{3}{12} = \frac{17}{12}$
Enlever $\frac{1}{12}$ au résultat	$\frac{17}{12} - \frac{1}{12} = \frac{16}{12} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$
Écrire le résultat obtenu	$\frac{4}{3}$

2. Quel nombre obtient-on quand on choisit au départ le nombre rationnel $-\frac{5}{6}$?

Corrigé

Choisir un nombre	$-\dfrac{5}{6}$
Lui ajouter $\dfrac{1}{3}$	$-\dfrac{5}{6}+\dfrac{1}{3}=-\dfrac{5}{6}+\dfrac{2}{6}=-\dfrac{3}{6}=-\dfrac{1}{2}$
Enlever $\dfrac{1}{4}$ au résultat	$-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}=-\dfrac{2}{4}-\dfrac{1}{4}=-\dfrac{3}{4}$
Enlever $\dfrac{1}{12}$ au résultat	$-\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{12}=-\dfrac{9}{12}-\dfrac{1}{12}=-\dfrac{10}{12}=-\dfrac{5}{6}$
Écrire le résultat obtenu	$-\dfrac{5}{6}$

3. Que peut-on émettre comme conjecture ?

Corrigé

Quelque soit le nombre choisi au départ, on obtiendra la même nombre à l'arrivée.

4. Prouver cette conjecture.

Corrigé

Soit x le nombre choisi au départ.

Choisir un nombre	x
Lui ajouter $\dfrac{1}{3}$	$x+\dfrac{1}{3}$
Enlever $\dfrac{1}{4}$ au résultat	$x+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}=x+\dfrac{4}{12}-\dfrac{3}{12}=x+\dfrac{1}{12}$
Enlever $\dfrac{1}{12}$ au résultat	$x+\dfrac{1}{12}-\dfrac{1}{12}=x$
Écrire le résultat obtenu	x

Exercice 7. J'ai gagné ! ... Fake news ... — 3 points

Lors du dernier tour de l'élection des délégués de classe, il restait trois candidats :

- Léo qui a obtenu $\dfrac{6}{15}$ des voix ; Eowyn qui a obtenu $\dfrac{1}{5}$ des voix et Zaid qui a obtenu le reste des voix.

Qui sera élu délégué de la classe ?

Corrigé

- Léo a obtenu $\dfrac{6}{15}$ des voix ;
- Eowyn qui a obtenu $\dfrac{1}{5}$ des voix soit $\dfrac{3}{15}$

- On sait que Léo et Eowyn ont obtenu ensemble :

$$\frac{6}{15}+\frac{3}{15}=\frac{9}{15}$$

Donc Zaid qui a obtenu le reste des voix a obtenu :

$$\frac{15}{15}-\frac{9}{15}=\frac{6}{15}$$

- Conclusion : Zaid et Léo ont obtenu le même nombre de voix (la même proportion) et cette proportion est supérieure à celle d'Eowyn :

$$\frac{6}{15}>\frac{3}{15}$$

Il y a deux vainqueurs !

Fin du devoir

Corrigé

Question Bonus

1. Développer l'expression : $A(x)=-2x(3x-5)-(2x-1)(1-4x)$

$$A(x)=-2x(3x-5)-(2x-1)(1-4x)$$
$$A(x)=-6x^2+10x-\left(2x-8x^2-1+4x\right)$$
$$A(x)=-6x^2+10x-2x+8x^2+1-4x$$
$$\boxed{A(x)=2x^2+4x+1}$$

2. Calculer $A(-1)$, c'est à dite la valeur de $A(x)$ lorsque $x=-1$.

- Méthode 1 : En utilisant la forme initiale on obtient :

$$A(-1)=-2\times(-1)(3\times(-1)-5)-(2\times(-1)-1)(1-4\times(-1))$$
$$A(-1)=2\times(-8)-(-2-1)(1+4)$$
$$A(-1)=-16-(-3)\times 5$$
$$A(-1)=-16+15$$
$$\boxed{A(-1)=-1}$$

- Méthode 2 : En utilisant la forme développée on obtient :

$$A(-1)=2\times(-1)^2+4\times(-1)+1$$
$$A(-1)=2\times 1-4+1$$
$$A(-1)=2-4+1$$
$$\boxed{A(-1)=-1}$$