



Math93.com

Devoir Surveillé n°8

Correction

Quatrième

Arithmétique

Durée 50 min - Coeff. 1

Noté sur 23 points

L'utilisation de la calculatrice est autorisée.

On rappelle que sauf indication contraire, TOUTES les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1. En voyage

3 points

Pour un voyage scolaire, 13 professeurs doivent accompagner 154 élèves d'un collège. Le déplacement doit s'effectuer dans des bus de 24 places maximum.

Combien de bus seront nécessaires ?



Corrigé

Le nombre total de personnes à transporter est $154 + 13 = 167$.

Par division euclidienne on obtient :

$$\begin{array}{r|l} 167 & 24 \\ 23 & 6 \end{array} \quad \text{soit} \quad 167 = 24 \times 6 + 23$$

Il faudra donc 7 bus. Avec 6 bus de 24 complets et 1 bus de 23 personnes.

Exercice 2. Un programme de calculs

5 points



Programme de calcul

Programme A

- Choisir un nombre
- Ajouter 3
- Multiplier le résultat par 2
- Ajouter 5 fois le nombre de départ
- Ajouter 1

1. Montrer que si on choisit 2 comme nombre de départ on obtient 21 avec le programme A.



Corrigé

Programme A
2
$2 + 3 = 5$
$5 \times 2 = 10$
$10 + 5 \times 2 = 20$
$20 + 1 = 21$

2. Que pensez-vous de l'affirmation de Nathan ? Justifier.

Affirmation 1

Si on prend un entier naturel comme nombre de départ avec le programme A, on obtient toujours un multiple de 7.

**Corrigé**

En partant d'un nombre quelconque x , entier naturel on obtient :

Programme A
x
$x + 3$
$(x + 3) \times 2 = 2x + 6$
$2x + 6 + 5 \times x = 7x + 6$
$7x + 6 + 1 = 7x + 7$

Alors en factorisant l'expression obtenue :

$$7x + 7 = 7 \times (x + 1)$$

On obtient bien un multiple de 7 car le résultat est de la forme 7 fois un entier naturel.

←p Tournez la page ...

Exercice 3. A partir d'une décomposition

10 points

1. Décomposer les nombres 56 et 140 en produits de facteurs premiers.



Corrigé

$$\begin{aligned} 56 &= 2 \times 28 \\ &= 2 \times 4 \times 7 \\ 56 &= \underline{2^3 \times 7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 140 &= 2 \times 70 \\ &= 2 \times 7 \times 10 \\ 140 &= \underline{2^2 \times 5 \times 7} \end{aligned}$$

2. Quels sont les nombres premiers qui divisent à la fois 56 et 140 ?



Corrigé

Les décompositions de 56 et 140 sont :

$$\begin{cases} 56 = \boxed{2} \times \boxed{2} \times 2 \times \boxed{7} \\ 140 = \boxed{2} \times \boxed{2} \times 5 \times \boxed{7} \end{cases}$$

Les nombres premiers qui divisent à la fois 56 et 140 sont :

$$\boxed{2 \text{ et } 7}$$

3. Quel est le plus grand nombre entier qui divise à la fois 56 et 140 ?

On nomme ce nombre le Plus Grand commun Diviseur (PGCD) de 56 et 140 (*greatest common divisor or GCD in english*)



Corrigé

Les décompositions de 56 et 140 sont :

$$\begin{cases} 56 = \boxed{2} \times \boxed{2} \times 2 \times \boxed{7} = 28 \times 2 \\ 140 = \boxed{2} \times \boxed{2} \times 5 \times \boxed{7} = 28 \times 5 \end{cases}$$

Le plus grand nombre entier qui divise à la fois 56 et 140 est donc :

$$\boxed{2 \times 2 \times 7 = 28}$$

4. Application 1 : vous pourrez utiliser les résultats des questions précédentes.

Écrire la fraction suivante sous forme de fraction irréductible en détaillant vos calculs :

$$A = \frac{56}{140}$$

**Corrigé**

On utilise les décompositions obtenues lors de la questions 1 :

$$A = \frac{56}{140} = \frac{\boxed{2} \times \boxed{2} \times 2 \times \boxed{7}}{\boxed{2} \times \boxed{2} \times 5 \times \boxed{7}} = \frac{2}{5}$$

5. Application 2 : vous pourrez utiliser les résultats des questions précédentes.

Un panneau mural a pour dimensions 56 cm et 140 cm. On souhaite le recouvrir avec des carreaux de forme carrée, tous de même taille, posés bord à bord sans jointure.

5. a. Peut-on utiliser des carreaux de : 10 cm de côté (expliquez) ?

**Corrigé**

- La taille du carreau doit être un diviseur commun de 56 et 140.
- Or 10 divise bien 140 puisque $140 = 10 \times 14$ mais 10 ne divise pas 56 puisque $56 = 10 \times 5 + 6$.
- Conclusion : il est impossible d'utiliser des carreaux de 10 cm de côté.

5. b. Quelle est la taille maximale des carreaux que l'on peut utiliser (expliquez) ?

Dans ce cas, combien de carreaux seront nécessaire pour recouvrir tout le panneau (expliquez).

**Corrigé**

- La taille du carreau doit être un diviseur commun de 56 et 140, et puisque l'on cherche la plus grande, elle correspond au plus grand entier divisant les 2 soit 28 d'après la question 3.
- Or on a :

$$\begin{cases} 56 = \boxed{2} \times \boxed{2} \times 2 \times \boxed{7} = 28 \times 2 \\ 140 = \boxed{2} \times \boxed{2} \times 5 \times \boxed{7} = 28 \times 5 \end{cases}$$

- Donc on peut utiliser 5 carreaux en longueur et 2 en largeur soit $5 \times 2 = 10$ au total.

Exercice 4. Choisir une forme adaptée**5 points**

On considère l'expression

$$A(x) = (x + 1)(x + 3) - (x + 1)(2x + 5)$$

1. Développer et réduire $A(x)$.

**Corrigé**

$$\begin{aligned} A(x) &= (x + 1)(x + 3) - (x + 1)(2x + 5) \\ &= x^2 + 3x + x + 3 - (2x^2 + 5x + 2x + 5) \\ &= x^2 + 3x + x + 3 - 2x^2 - 5x - 2x - 5 \end{aligned}$$

$$\boxed{A(x) = -x^2 - 3x - 2}$$

2. Factoriser $A(x)$.

**Corrigé**

$$\begin{aligned}
 A(x) &= \boxed{(x+1) \times (x+3)} - \boxed{(x+1) \times (2x+5)} \\
 &= (x+1) \times [(x+3) - (2x+5)] \\
 &= (x+1) \times [x+3-2x-5] \\
 \boxed{A(x) &= (x+1)(-x-2)}
 \end{aligned}$$

3. Montrer que lorsqu'on remplace x par (-2) dans l'expression $A(x)$ on obtient 0.

**Corrigé**

La forme factorisée est :

$$A(x) = (x+1)(-x-2)$$

$$\begin{aligned}
 A(-2) &= (-2+1)(-(-2)-2) \\
 &= (-1) \times 0
 \end{aligned}$$

$$\boxed{A(-2) = 0}$$

↩ **Fin du devoir** ↪

**Question Bonus**

🔗 Démontrer que le produit de deux nombre impairs est toujours un nombre impair.

**Corrigé**

Soit n et p deux entiers naturels.

Un nombre impair s'écrit sous la forme $2n+1$ ou $2p+1$ donc le produit de deux nombres impairs quelconques s'écrit :

$$(2n+1)(2p+1)$$

En développant on obtient :

$$(2n+1)(2p+1) = 4np + 2n + 2p + 1$$

On factorise alors les 3 premiers termes par 2 pour obtenir un entier de la forme $2 \times Q + 1$:

$$(2n+1)(2p+1) = 4np + 2n + 2p + 1 = 2 \times \underbrace{(2np + n + p)}_Q + 1$$

Ce qui est bien un nombre impair, puisque de la forme 2 fois un entier + 1.