Math93.com

# TD 1 - Quatrième
# Pythagore

## Partie I. Racine carrée (*square root*)

**Définition 1** (racine carrée (*square root*))

Soit $a$ un nombre positif ou nul.
La **racine carré de *a*** est l'unique nombre positif dont la carré vaut $a$.
On note ce nombre : $\sqrt{a}$

### Exercice 1. Carrés et racine carrée (c)

1. Puisque $0^2 = 0$ on a alors $\sqrt{0} = 0$.
2. Puisque $1^2 = 1$ on a alors $\sqrt{1} = 1$.
3. Puisque $2^2 = 4$ on a alors $\sqrt{4} = 2$.
4. Puisque $3^2 = 9$ on a alors $\sqrt{9} = 3$.
5. Puisque $4^2 = 16$ on a alors ......................
6. Puisque $5^2 = \cdots\cdots$ on a alors ..................
7. Puisque $6^2 = \cdots\cdots$ on a alors ..................
8. Puisque $7^2 = \cdots\cdots$ on a alors ..................
9. Puisque $8^2 = \cdots\cdots$ on a alors ..................
10. Puisque $9^2 = \cdots\cdots$ on a alors ................
11. Puisque $10^2 = \cdots\cdots$ on a alors ...............
12. Puisque $11^2 = \cdots\cdots$ on a alors ...............
13. Puisque $12^2 = \cdots\cdots$ on a alors ...............
14. Puisque $13^2 = \cdots\cdots$ on a alors ...............
15. Puisque $14^2 = \cdots\cdots$ on a alors ................
16. Puisque $15^2 = \cdots\cdots$ on a alors ...............

### Exercice 2. Encadrer une racine carrée entre deux entiers consécutifs (c)

**Exemple**

Par exemple si on cherche à encadrer $\sqrt{60}$ entre deux entiers consécutifs :

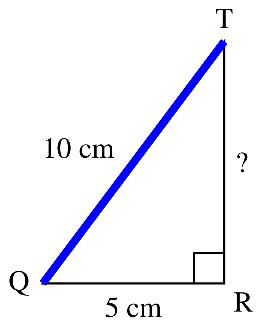
1. On encadre 60 entre deux carrés consécutifs :
$$49 = 7^2 < 60 < 64 = 8^2$$
2. On en déduit que :
$$\boxed{7 < \sqrt{60} < 8}$$
3. Vérification : la calculatrice donne :
$$\sqrt{60} \approx 7,7$$

Donner un encadrement des racines carrées suivantes entre deux entiers consécutifs :

1. $a = \sqrt{50}$
2. $b = \sqrt{101}$
3. $c = \sqrt{10}$
4. $d = \sqrt{24}$
5. $e = \sqrt{80}$
6. $f = \sqrt{150}$
7. $g = \sqrt{200}$

# Partie II. Calculer des longueur avec le théorème de Pythagore

## Exercice 3. Application directe du théorème (c)



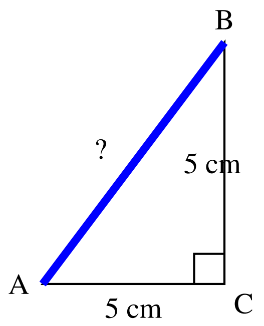

On considère le triangle QRT rectangle en R tel que :

$$QT = 10 \text{ cm} \text{ et } QR = 5 \text{ cm}$$

**1.** Calculer la valeur exacte de RT.
(*Laissez la racine carrée dans le résultat*).

**2.** Puis donner une valeur approchée de RT au mm près (soit à 0,1 cm près).

## Exercice 4. Application directe du théorème (c)




On considère le triangle ABC rectangle et isocèle en C tel que :

$$AC = 5 \text{ cm}$$

**1.** Calculer la valeur exacte de AB.
(*Laissez la racine carrée dans le résultat*).

**2.** Puis donner une valeur approchée de AB au mm près (soit à 0,1 cm près).

## Exercice 5. Une construction (c)

**1.** Construire le triangle MNP rectangle en M et tel que :

$$MN = 5 \text{ cm} \text{ et } NP = 7cm$$

*Conseil : faire tout d'abord une figure à main levée au brouillon.*

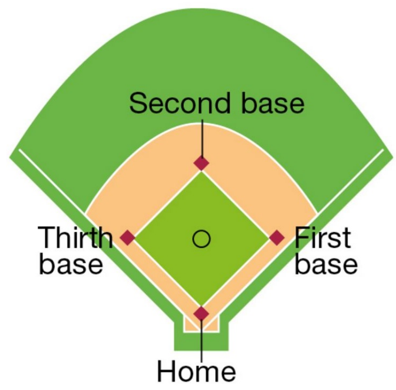
**2.** Calculer la valeur exacte de $MP$ puis en donner une valeur approchée au mm près.

**3.** Vérifier la cohérence du résultat avec votre règle graduée.

## Exercice 6. I like baseball (c)

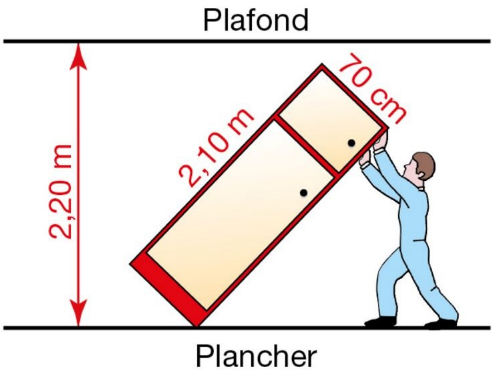
**1.** A baseball diamond is a square that is 127 feet diagonally.
What is the distance, to the nearest tenth of foot, between home and first base ?

**2.** Convert this distance in metres, to the nearest tenth of meter.
*Need help ? : 1 meter* $\approx 3.28084$ *feet*



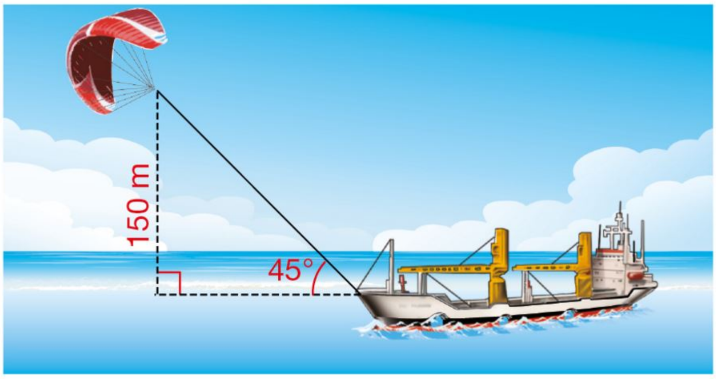
### Exercice 7. Une armoire (c)

Cette personne pourra-t-elle relever cette armoire dans une pièce de 2,20 m de hauteur ?
*Remarque : on suppose que l'armoire est rectangulaire.*




### Exercice 8. Un cerf-volant ... kite cool (c)

Pour réduire la consommation, des ingénieurs ont fixé un cerf-volant (kite) géant à la proue (bow) d'un cargo, pour pouvoir le tirer selon un angle de $45°$, depuis une hauteur verticale de 150 m.
Calculer une valeur approchée à l'unité près de la longueur, en m, de la corde du cerf-volant.




## Partie III. Réciproque et contraposée

### Exercice 9. Triangle rectangle ou pas ... that is the question ! (c)

Soit MNP un triangle tel que (en cm) :

$$MN = 2,5\ ;\ NP = 2 \text{ et } MP = 1,5$$

Le triangle MNP est-il rectangle ?

### Exercice 10. Triangle rectangle ou pas ... that is the question ! (c)

Soit DEF un triangle tel que :

$$DE = 8 \text{ m}\ ;\ EF = 6 \text{ m} \text{ et } DF = 5 \text{ m}$$

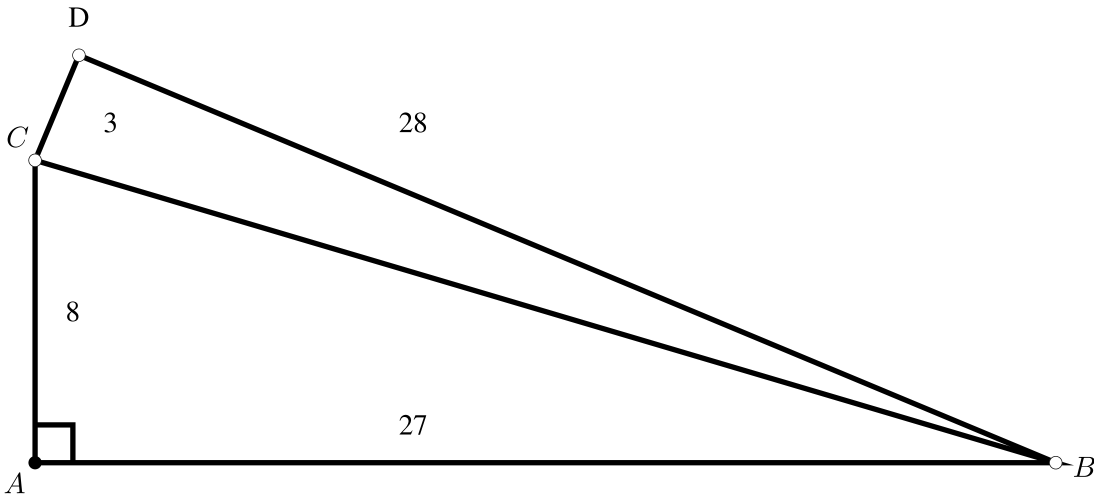
Le triangle DEF est-il rectangle ?

## Exercice 11. Attention aux valeurs approchées ( I am fond of this one !) (c)

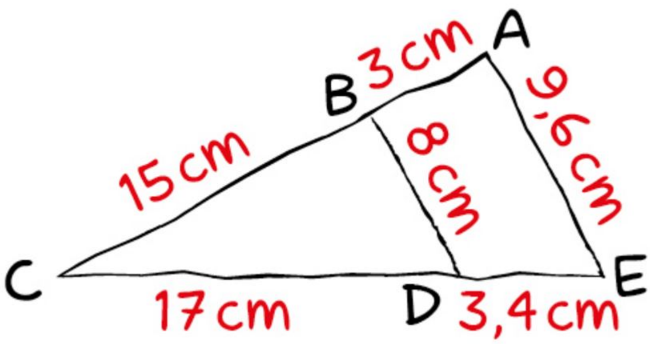
On considère les triangles ABC et BCD ci-dessous, avec ABC rectangle en A et en cm :

$$AC = 8 \ ; \ B = 27 \ ; \ CD = 3 \ ; \ BD = 28$$

Le triangle BCD est-il rectangle ?




## Exercice 12. Déduire des conséquences

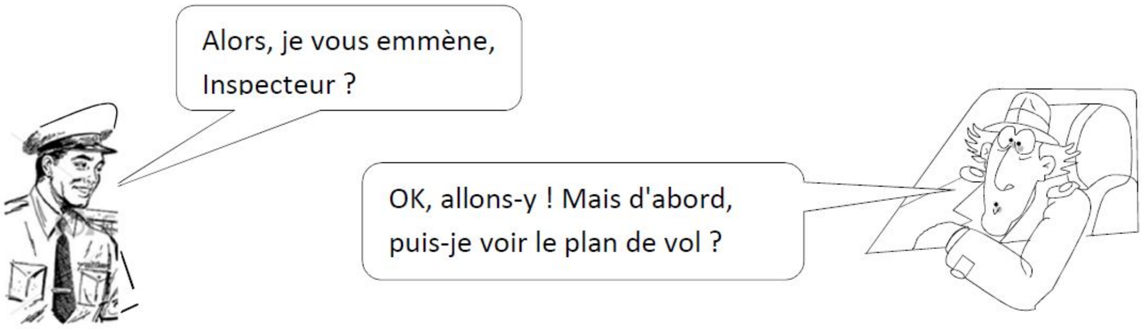



Voici une figure faire à main levée.
Les droites (BD) et (AE) sont-elles parallèles ?

# Partie IV. Exercices Bilan

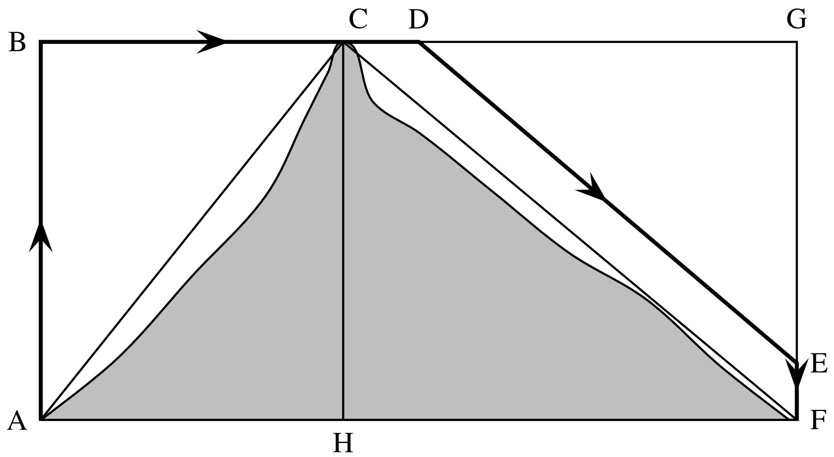
## Exercice 13. D'après brevet (c)

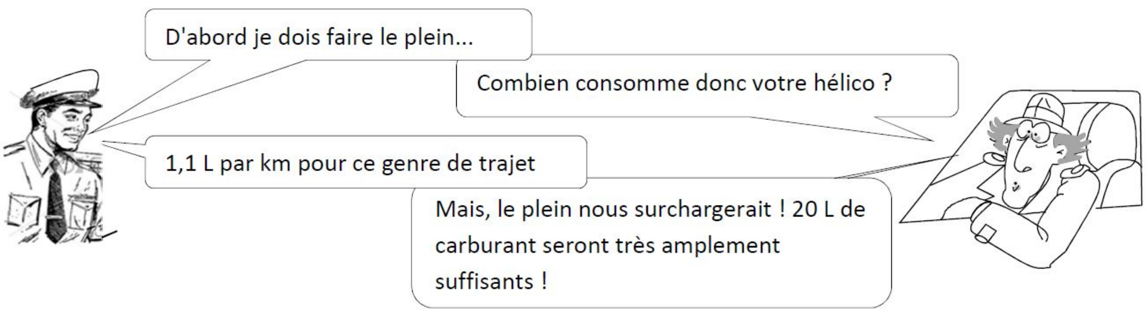
L'inspecteur G. est en mission dans l'Himalaya. Un hélicoptère est chargé de le transporter en haut d'une montagne puis de l'amener vers son quartier général.




Le trajet ABCDEF modélise le plan de vol. Il est constitué de déplacements rectilignes. On a de plus les informations suivantes :

- AF= 12,5 km ; AC = 7,5 km ; CF = 10 km ; AB = 6 km ; DG = 7 km et EF = 750 m.
- (DE) est parallèle à (CF).
- ABCH et ABGF sont des rectangles

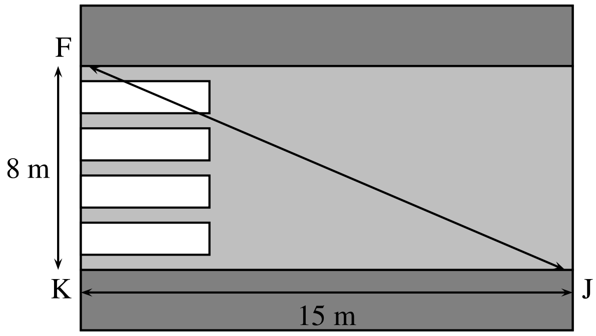



1. Vérifier que la longueur du parcours est de 21 kilomètres.
   Dans cette question, toute trace de recherche sera valorisée.
2. Le pilote doit-il avoir confiance en l'inspecteur G ? Justifier votre réponse.

## Exercice 14. D'après Brevet (c)

Julien est en retard pour aller rejoindre ses amis au terrain de basket.
Il décide alors de traverser imprudemment la route du point J au point F sans utiliser les passages piétons.
Le passage piéton est supposé perpendiculaire au trottoir.




En moyenne, un piéton met 9 secondes pour parcourir 10 mètres.
Combien de temps Julien a-t-il gagné en traversant sans utiliser le passage piéton ?

**Fin du TD**

# Partie V. Correction des exercices sur la racine carrées

## Exercice 15. Correction de l'exercice 1 page 1

1. Puisque $0^2 = 0$ on a alors $\sqrt{0} = 0$.
2. Puisque $1^2 = 1$ on a alors $\sqrt{1} = 1$.
3. Puisque $2^2 = 4$ on a alors $\sqrt{4} = 2$.
4. Puisque $3^2 = 9$ on a alors $\sqrt{9} = 3$.
5. Puisque $4^2 = 16$ on a alors $\sqrt{16} = 4$.
6. Puisque $5^2 = 25$ on a alors $\sqrt{25} = 5$.
7. Puisque $6^2 = 36$ on a alors $\sqrt{36} = 6$.
8. Puisque $7^2 = 49$ on a alors $\sqrt{49} = 7$.
9. Puisque $8^2 = 64$ on a alors $\sqrt{64} = 8$.
10. Puisque $9^2 = 81$ on a alors $\sqrt{81} = 9$.
11. Puisque $10^2 = 100$ on a alors $\sqrt{100} = 10$.
12. Puisque $11^2 = 121$ on a alors $\sqrt{121} = 11$.
13. Puisque $12^2 = 144$ on a alors $\sqrt{144} = 12$.
14. Puisque $13^2 = 169$ on a alors $\sqrt{169} = 13$.
15. Puisque $14^2 = 196$ on a alors $\sqrt{196} = 14$.
16. Puisque $15^2 = 225$ on a alors $\sqrt{225} = 15$.

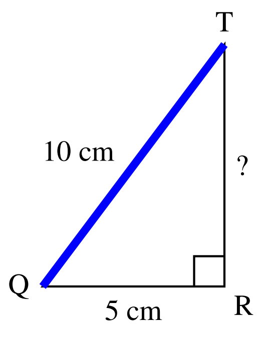
## Exercice 16. Correction de l'exercice 2 page 1

Donner un encadrement des racines carrées suivantes entre deux entiers consécutifs :

1. $7 < a = \sqrt{50} < 8$
2. $10 < b = \sqrt{101} < 11$
3. $3 < c = \sqrt{10} < 4$
4. $4 < d = \sqrt{24} < 5$
5. $8 < e = \sqrt{80} < 9$
6. $12 < f = \sqrt{150} < 13$
7. $14 < g = \sqrt{200} < 15$

# Partie VI. Correction des exercices sur le calcul de longueurs

## Correction de l'exercice 3 page 2



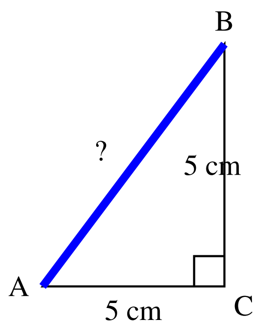

Dans le triangle $RTQ$ rectangle en $R$, d'après le théorème de Pythagore on a :

$$\begin{aligned}
TQ^2 &= RT^2 + RQ^2 \\
10^2 &= RT^2 + 5^2 \\
RT^2 &= 10^2 - 5^2 \\
RT^2 &= 100 - 25 \\
RT^2 &= 75
\end{aligned}$$

Or RT est positif puisque c'est une longueur, l'unique solution possible est donc :

$$\begin{aligned}
RT &= \sqrt{75} \\
RT &\approx \underline{8{,}7 \text{ cm}}
\end{aligned}$$

## Correction de l'exercice 4 page 2




Dans le triangle $CBA$ rectangle en $C$, d'après le théorème de Pythagore on a :

$$BA^2 = CB^2 + CA^2$$
$$BA^2 = 5^2 + 5^2$$
$$BA^2 = 25 + 25$$
$$BA^2 = 50$$

Or BA est positif puisque c'est une longueur, l'unique solution possible est donc :

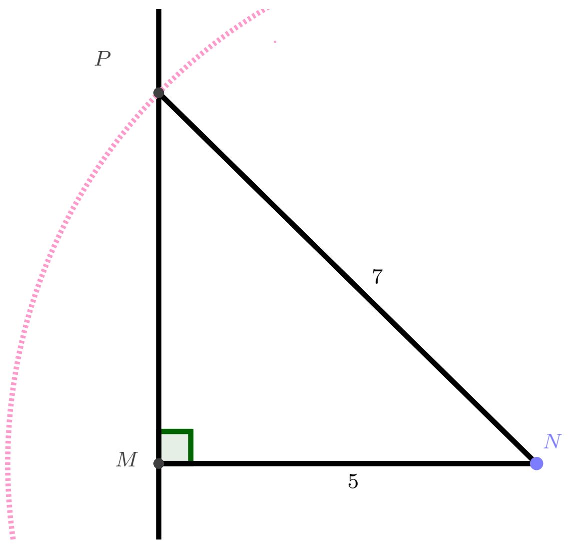
$$BA = \sqrt{50}$$
$$BA \approx \underline{7{,}1 \text{ cm}}$$

## Correction de l'exercice 5 page 2

**1.** Construire le triangle MNP rectangle en M et tel que :

$$MN = 5 \text{ cm} \;\text{ et }\; NP = 7cm$$

*Conseil : faire tout d'abord une figure à main levée au brouillon.*




**2.** Calculer la valeur exacte de $MP$ puis en donner une valeur approchée au mm près.
Dans le triangle $MNP$ rectangle en $M$, d'après le théorème de Pythagore on a :

$$NP^2 = MN^2 + MP^2$$
$$7^2 = MN^2 + 5^2$$
$$MN^2 = 7^2 - 5^2$$
$$MN^2 = 49 - 25$$
$$MN^2 = 24$$

Or MN est positif puisque c'est une longueur, l'unique solution possible est donc :

$$MN = \sqrt{24}$$
$$MN \approx \underline{4{,}9 \text{ cm}}$$

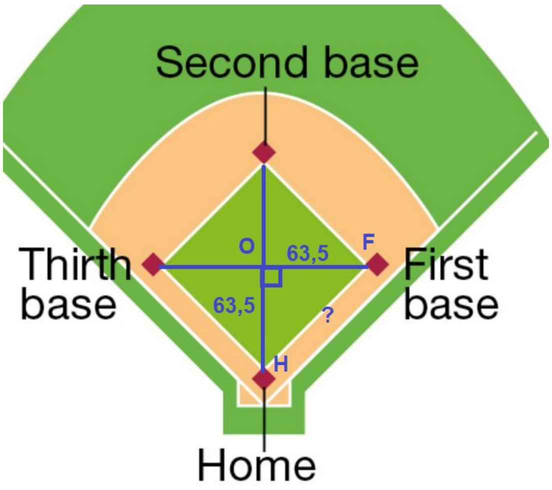
**3.** Vérifier la cohérence du résultat avec votre règle graduée.

## Correction de l'exercice 6 page 2

**1.** On peut nommer HFST le carré qui compose le 'baseball diamond'.

Dans ce carré de centre O, les diagonales de 127 feet se coupent en leur milieu et donc le triangle OHF est rectangle et isocèle en O avec :

$$OH = OF = 127/2 = 63,5$$




Dans le triangle $OHF$ rectangle en $O$, d'après le théorème de Pythagore on a :

$$HF^2 = OH^2 + OF^2$$
$$HF^2 = 63{,}5^2 + 63{,}5^2$$
$$HF^2 = 4032{,}25 + 4032{,}25$$
$$HF^2 = 8064{,}5$$

Or HF est positif puisque c'est une longueur, l'unique solution possible est donc :

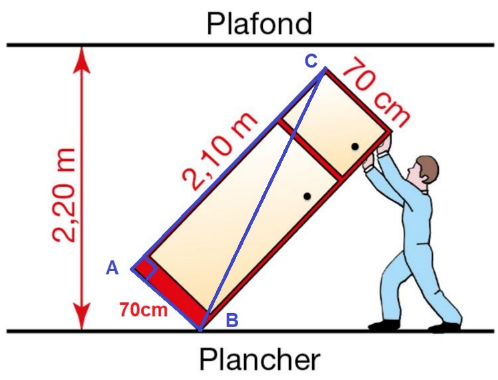
$$HF = \sqrt{8064{,}5}$$
$$HF \approx \underline{89{,}8 \text{ feet}}$$

**2.** Since 1 meter $\approx$ 3.28084 feet :

| | |
|---|---|
| 1 meter | ? |
| 3.28084 feet | 89.8 feet |

$$\frac{1 \times 89.8}{3.28084} \approx \underline{27.4 \text{ m}}$$

## Correction de l'exercice 7 page 3




On peut nommer ABC le triangle rectangle composé à partir de l'armoire de forme rectangulaire.
Dans le triangle $ABC$ rectangle en $A$, d'après le théorème de Pythagore on a :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$
$$BC^2 = 70^2 + 210^2$$
$$BC^2 = 4900 + 44100$$
$$BC^2 = 49000$$

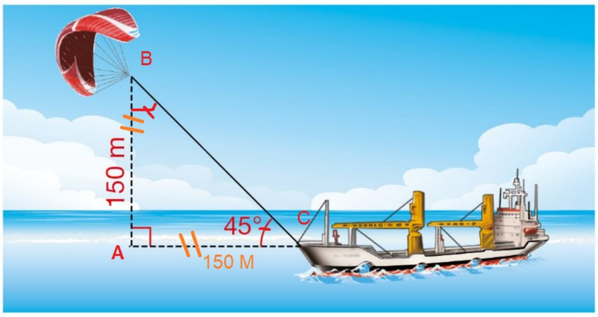
Or BC est positif puisque c'est une longueur, l'unique solution possible est donc :

$$BC = \sqrt{49000}$$
$$BC = \underline{221{,}36 \text{ cm}}$$

La diagonale dépasse les 220 cm de hauteur de la pièce donc il ne pourra pas relever l'armoire.

## Correction de l'exercice 8 page 3

Calculer une valeur approchée à l'unité près de la longueur, en m, de la corde du cerf-volant.




- Tout d'abord puisque l'angle $\widehat{C}$ du triangle ABC rectangle en A mesure $45°$, l'angle complémentaire $\widehat{B}$ mesure aussi $45°$. De ce fait le rectangle ABC est aussi isocèle en A et l'on connait donc la mesure de 2 côtés du triangle rectangle, on peut appliquer Pythagore.
- Dans le triangle $ABC$ rectangle en $A$, d'après le théorème de Pythagore on a :

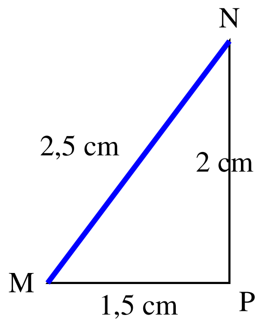
$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$
$$BC^2 = 150^2 + 150^2$$
$$BC^2 = 22500 + 22500$$
$$BC^2 = 45000$$

Or BC est positif puisque c'est une longueur, l'unique solution possible est donc :

$$BC = \sqrt{45000}$$
$$BC \approx \underline{212 \text{ m}}$$

# Partie VII. Correction des exercices sur la réciproque (converse) et contraposée (contraposition)

## Correction de l'exercice 9 page 3

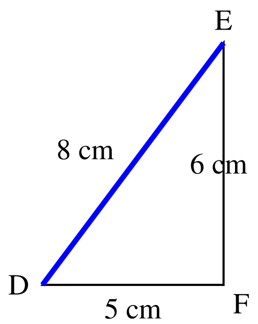



Si le triangle $MNP$ est rectangle, c'est forcément en $P$ car $[MN]$ est le plus grand côté. On a:

| D'une part : | et | D'autre part : |
|---|---|---|
| $MN^2 = 2,5^2$ | | $MP^2 + NP^2 = 1,5^2 + 2^2$ |
| $MN^2 = 6,25$ | | $MP^2 + NP^2 = 2,25 + 4$ |
| | | $MP^2 + NP^2 = 6,25$ |

Conclusion : $MN^2 = MP^2 + NP^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle $MNP$ est rectangle en $P$.

## Correction de l'exercice 10 page 3

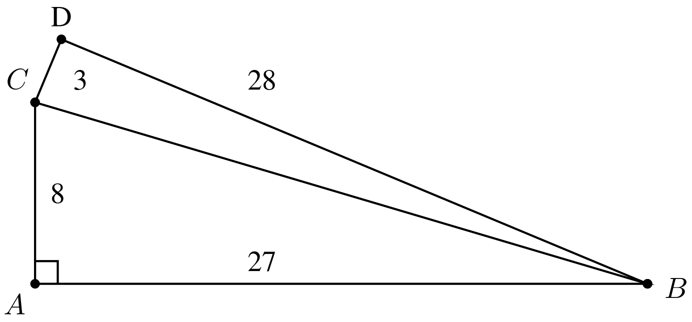



Si le triangle $EDF$ est rectangle, c'est forcément en $F$ car $[ED]$ est le plus grand côté. On a:

| D'une part : | et | D'autre part : |
|---|---|---|
| $ED^2 = 8^2$ | | $EF^2 + DF^2 = 6^2 + 5^2$ |
| $ED^2 = 64$ | | $EF^2 + DF^2 = 36 + 25$ |
| | | $EF^2 + DF^2 = 61$ |

Conclusion: $ED^2 \neq EF^2 + DF^2$, d'après s la contraposée du théorème de Pythagore, le triangle $EDF$ n'est pas rectangle.

## Correction de l'exercice 11 page 4




On a :

- $AC = 8$ cm ;
- $AB = 27$ cm ;
- $CD = 3$ cm ;
- $BD = 28$ cm.

Le triangle BCD est-il rectangle ?

1. **Calculons $CB$ - Attention : en fait on a besoin que de $CB^2$ pour le test.**

   - **Données.**
     Le triangle $ABC$ est rectangle en $A$. L'hypoténuse est donc le côté $[CB]$.
   - **Le théorème.**
     Donc d'après le *théorème de Pythagore* :

$$CB^2 = CA^2 + AB^2$$
$$CB^2 = 8^2 + 27^2$$
$$\boxed{CB^2 = 793}$$

   - **Conclusion.**
     Et puisque $CB$ est une longueur, on a

$$BC = \sqrt{793} \approx 28,2 \text{ cm à } 0,1 \text{ cm près.}$$

2. **Le triangle BCD est-il rectangle** ?

   - **Données.**
     Si le triangle BCD est rectangle, c'est en D car [BC] est le plus grand côté.
   - **Le test.** $\begin{cases} BC^2 & = & 793 \\ BD^2 + DC^2 & = & 28^2 + 3^2 & = & 793 \end{cases}$
   - **Conclusion.**
     On a donc égalité, $BD^2 + DC^2 = BC^2$.
     De ce fait, d'après la *réciproque du théorème de Pythagore*, le triangle BCD est rectangle en D.

**Remarque**

Si on utilise une valeur approchée de $CB$ soit par exemple 28,2, le test est négatif puisque :

- d'une part :

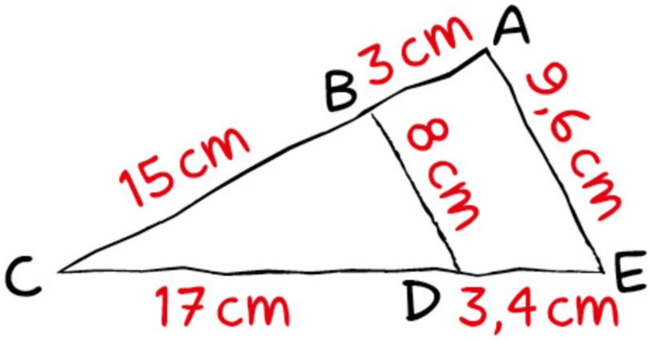
$$BC^2 \approx 28,2^2 = 795,24$$

- d'autre part :

$$BD^2 + DC^2 = 28^2 + 3^2 = 793$$

Alors attention, il faut utiliser une valeur exacte (avec la racine carrée) ou plus simplement le carré de $BC$ soit $BC^2$ et pas une valeur approchée.

## Correction de l'exercice 12 page 4




**1.** Si le triangle $CDB$ est rectangle, c'est forcément en $B$ car $[CD]$ est le plus grand côté. On a:

| D'une part : | | D'autre part : |
|---|---|---|
| $CD^2 = 17^2$ | et | $CB^2 + DB^2 = 15^2 + 8^2$ |
| $CD^2 = 289$ | | $CB^2 + DB^2 = 225 + 64$ |
| | | $CB^2 + DB^2 = 289$ |

Conclusion : $CD^2 = CB^2 + DB^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle $CDB$ est rectangle en $B$.

**2.** Si le triangle $CEA$ est rectangle, c'est forcément en $A$ car $[CE]$ est le plus grand côté. On a:

| D'une part : | | D'autre part : |
|---|---|---|
| $CE^2 = 20,4^2$ | et | $CA^2 + EA^2 = 18^2 + 9,6^2$ |
| $CE^2 = 416,16$ | | $CA^2 + EA^2 = 324 + 92{,}16$ |
| | | $CA^2 + EA^2 = 416,16$ |

Conclusion : $CE^2 = CA^2 + EA^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle $CEA$ est rectangle en $A$.

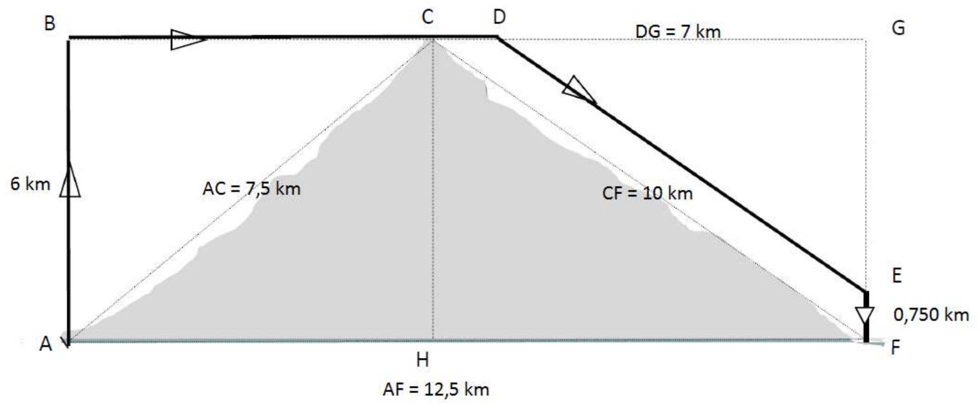
**3.** Les droites (BD) et (AE) sont perpendiculaires à la droite (AC), donc ces droites sont parallèles.

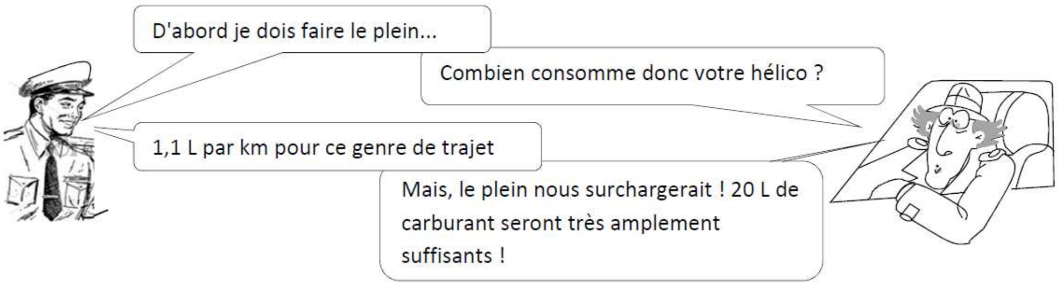
# Partie VIII. Correction des exercices Bilan

## Correction de l'exercice 13 page 5

*L'inspecteur G. est en mission dans l'Himalaya. Un hélicoptère est chargé de le transporter en haut d'une montagne puis de l'amener vers son quartier général. Le trajet ABCDEF modélise le plan de vol. Il est constitué de déplacements rectilignes. On a de plus les informations suivantes :*

- $AF = 12,5$ *km* ; $AC = 7,5$ *km* ; $CF = 10$ *km* ; $AB = 6$ *km* ; $DG = 7$ *km* *et* $EF = 750$ *m ;*
- $(DE)$ *est parallèle à* $(CF)$ ; *ABCH et ABGF sont des rectangles.*




1. **Vérifier que la longueur du parcours est de 21 kilomètres.**
   La longueur total du parcours est, avec les données présentes :

$$\mathcal{L} = AB + BD + DE + EF$$
$$\mathcal{L} = 6 \text{ km} + BD + DE + 0,750 \text{ km}$$
$$\mathcal{L} = 6,750 \text{ km} + BD + DE$$

- Calcul de $BD$.
  Le point $D$ appartient au segment $[DG]$ donc

$$BD = BG - DG = BG - 7$$

De plus ABCH et ABGF sont des rectangles donc ABGF est aussi un rectangle et de ce fait :

$$BG = AF = 12,5 \text{ km}$$

Soit

$$BD = 12,5 - 7 = \underline{5,5 \text{ km}}$$

- Calcul de $DE$.

– **Calculs préalables**.
Puisque le quadrilatère ABGF est un rectangle, on a :

$$GF = AB = \underline{6\text{ km}}$$

Puisque le point $E$ appartient au segment $[GF]$ on a :

$$GE = GF - EF = 6 - 0,750 = \underline{5,250\text{ km}}$$

– **Avec Pythagore**.
Dans le triangle $GDE$ rectangle en $G$, d'après le théorème de Pythagore on a :

$$DE^2 = GD^2 + GE^2$$
$$DE^2 = 7^2 + 5{,}250^2$$
$$DE^2 = 49 + 27{,}5625$$
$$DE^2 = 76{,}5625$$

Or DE est positif puisque c'est une longueur, l'unique solution possible est donc :

$$DE = \sqrt{76{,}5625}$$
$$DE = \underline{8{,}75\text{ km}}$$

La longueur total du parcours est donc :

$$\mathcal{L} = 6,750\text{ km} + BD + DE$$
$$\mathcal{L} = 6,750\text{ km} + 5,5\text{ km} + 8,75\text{ km}$$

$$\boxed{\mathcal{L} = 21\text{ km}}$$

2. **Le pilote doit-il avoir confiance en l'inspecteur G ? Justifier votre réponse**.
On va calculer le carburant nécessaire à l'aide d'une simple proportionnalité. Le pilote affirme que la consommation de l'hélicoptère est de 1,1 L par kilomètre, pour parcourir les 21 km il faudra alors :

$$21 \times 1,1\text{ L} = \underline{23,1\text{ L}}$$

Le pilote ne doit donc pas avoir confiance en l'inspecteur G qui suggérait de ne prendre que 20 L de carburant.

## Correction de l'exercice 14 page 6

**Réponses**

*Il gagne 5,4 secondes. Le corrigé détaillé sur www.math93.com*

**En moyenne un piéton met 9 secondes pour parcourir 10 mètre. Combien de temps Julien a-t-il gagné en traversant sans utiliser le passage piéton** ?

- **Calculons FJ**
Dans le triangle $KFJ$ rectangle en $K$, d'après le théorème de Pythagore on a :

$$FJ^2 = KF^2 + KJ^2$$
$$FJ^2 = 8^2 + 15^2$$
$$FJ^2 = 64 + 225$$
$$FJ^2 = 289$$

Or FJ est positif puisque c'est une longueur, l'unique solution possible est donc :

$$FJ = \sqrt{289}$$
$$FJ = \underline{17\text{ m}}$$

- **Calcul du temps pour parcourir FJ**.
  La quatrième proportionnelle peut ici être utilisée :

| Distance (m) | 10 m | 17 m |
|---|---|---|
| Temps (s) | 9 s | ? |

On a
$$\frac{17 \times 9}{10} = 15,3 \text{ s}$$
Donc le Julien va mettre <u>15,3 seconde</u> pour parcourir les 17 m de F à J.

- **Calcul du temps pour parcourir $\boldsymbol{FK + KF}$**.
  Si il utilise la passage piéton, la distance parcourue devient :
$$FK + KJ = 8 + 15 = 23 \text{ m}$$
Il va donc mettre : $\dfrac{23 \times 9}{10} = \underline{20,7 \text{ s}}$.

| Distance (m) | 10 m | 22 m |
|---|---|---|
| Temps (s) | 9 s | ? |

- **Calcul du temps gagné**.
  Julien a donc gagné $\underline{20,7 - 15,3 = 5,4 \text{ secondes}}$.