Math93.com

TD 2 - Quatrième
Calcul littéral (Partie 2) et Factorisation

Les exercices suivants dont l'intitulé est suivi du symbole (c) sont corrigés intégralement en fin du présent TD.

Partie I. Factorisations : comme dans le cours

Exercice 1. Comme dans le cours : Factorisation de type 1 classique

$$\boxed{A \times B + A \times C = A \times (B + C)}$$

1.1 Comme en 5e

$W(x) = 2x^2 + 8x$

$W(x) = \boxed{2x \times x} + \boxed{2x \times 4}$

$\boxed{W(x) = 2x \times (x+4)}$

$M(x) = 15x^2 + 30x$

$M(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$M(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Donnez directement les factorisations des expressions suivantes :

- $G(x) = 4x + 12 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- $H(x) = 3x^2 + 6x = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- $I(x) = x^2 + x = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- $J(x) = -5x + 5 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

1.2 Plus délicat

$A(x) = (x+1)(5-3x) - 2(x+1)(1-7x)$

$A(x) = \boxed{\underline{(x+1)} \times (5-3x)} - \boxed{\underline{(x+1)} \times 2(1-7x)}$

$A(x) = \underline{(x+1)} \times \Big[(5-3x) \; -2 \; (1-7x)\Big]$

$A(x) = \underline{(x+1)} \times \Big[5 - 3x - 2 + 14x\Big]$

$\boxed{A(x) = \underline{(x+1)} \times (11x+3)}$

$B(x) = (5x+1)(2x+7) - 3(3-x)(5x+1)$

$B(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$B(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$B(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$B(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Exercice 2. Exemples : Factorisation de type 1 - Variante 1

L'idée ici est de faire apparaitre la multiplication dans un des termes :

$$\boxed{A \times B - A = \underline{A} \times B - \underline{A} \times 1}$$

$C(x) = (x+1)(2-3x) - (x+1)$

$C(x) = \boxed{\underline{(x+1)} \times (2-3x)} - \boxed{\underline{(x+1)} \times 1}$

$C(x) = \underline{(x+1)} \times \Big[(2-3x) - 1\Big]$

$C(x) = \underline{(x+1)} \times \Big[2 - 3x - 1\Big]$

$\boxed{C(x) = \underline{(x+1)} \times (-3x+1)}$

$D(x) = (2x+1) - (1-4x)(2x+1)$

$D(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$D(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$D(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$D(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Exercice 3. Exemples : Factorisation de type 1 - Variante 2

L'idée ici est de faire apparaitre la multiplication dans un des termes à partir du carré :

$$\boxed{A \times B - A^2 = \underline{A} \times B - \underline{A} \times A}$$

$E(x) = 3(x+1)(2-3x) - (x+1)^2$

$E(x) = \boxed{\underline{(x+1)} \times 3(2-3x)} - \boxed{\underline{(x+1)} \times (x+1)}$

$E(x) = \underline{(x+1)} \times \left[3(2-3x) - (x+1)\right]$

$E(x) = \underline{(x+1)} \times \left[6 - 9x - x - 1\right]$

$\boxed{E(x) = \underline{(x+1)} \times (-10x+5)}$

On pourrait même ici encore factoriser puisque

$$(-10x+5) = 5(-2x+1)$$

donc

$$E(x) = (x+1) \times 5(-2x+1)$$

ou

$$\boxed{E(x) = 5(x+1)(-2x+1)}$$

$F(x) = (2x-5)^2 - 2(2x-5)(x-1)$

$F(x) =$ ....

$F(x) =$ ....

$F(x) =$ ....

$F(x) =$ ....

Partie II. La factorisation ... c'est ma passion !

Exercice 4. Un peu de gammes

Factoriser les expressions suivantes :

- $K(x) = (x+1)(2-x) - (x+1)$.
- $L(x) = (x+1)(2-x) - (x+1)^2$.
- $M(x) = x(2-x) - (2-x)(2-3x)$.
- $N(x) = (x+1)(1-2x) - 2(x+1)(2-3x)$.

Réponses

- $K(x) = (x+1)(1-x)$.
- $L(x) = (x+1)(1-2x)$.
- $M(x) = (2-x)(4x-2)$.
- $N(x) = (x+1)(4x-3)$.

Exercice 5. Avec une expression (c)

On considère l'expression :

$$A(x) = (2x+1)(1-3x) - 2(2x+1)$$

1. Développer et réduire $A(x)$.
2. Factoriser $A(x)$.
3. Calculer $A(-1)$,
   c'est à dire $A(x)$ en remplaçant x par -1.

Partie III. Un Bilan

Exercice 6. Choisir une forme adaptée 1 (c)

On considère l'expression

$$A(x) = (x+1)(2-x) - 2(x+1)(2x+3)$$

1. Montrer en développant l'expression ci-dessus que :

$$A(x) = -5x^2 - 9x - 4$$

2. En factorisant l'expression initiale, montrer que :

$$A(x) = (x+1)(-5x-4)$$

Pour la suite, vous pourrez utiliser la forme de $A(x)$ la plus adaptée.

3. Calculer $A(2)$, c'est à dire $A(x)$ en remplaçant x par 2.

4. Calculer $A(-1)$ et $A(0)$.

Exercice 7. Choisir une forme adaptée 2 (c)

On considère l'expression

$$A(x) = (2x+3)^2 - (2x+3)(1-4x)$$

1. Montrer que $A(x) = 12x^2 + 22x + 6$.

2. En factorisant, montrer que $A(x) = (2x+3)(6x+2)$.

Pour la suite, vous pourrez utiliser la forme de $A(x)$ la plus adaptée.

3. Calculer $A(2)$, c'est à dire $A(x)$ en remplaçant x par 2.

Exercice 8. Kwyk

Effectuez le TD de validation des compétences sur Kwyk.
Si vous obtenez plus de 16/20 vous pouvez passer à la suite, sinon il faut refaire les premiers exercices ainsi que ceux du cours.

Exercice 9. Avec une factorisation intermédiaire (c)

On considère l'expression : $B(x) = 5x + 10 - (x+2)^2$.

1. Factoriser $5x + 10$.

2. En déduire une factorisation de $B(x)$.

3. Développer $B(x)$.

4. Calculer $B(-1)$,
c'est à dire $B(x)$ en remplaçant x par -1.

Exercice 10. Un peu de Scratch (c)

Un professeur propose à ses élèves deux programmes de calculs réalisés avec un logiciel de programmation.

Programme A

```
quand [drapeau] est cliqué
demander (choisir un nombre) et attendre
mettre [nombre choisi] à (réponse)
mettre [Valeur 1] à ((1) + (nombre choisi))
mettre [Valeur 2] à ((3) * (Valeur 1))
mettre [résultat] à ((Valeur 2) - (3))
dire (regrouper (On obtient) et (résultat))
```

Programme B

```
quand [drapeau] est cliqué
demander (choisir un nombre) et attendre
mettre [nombre choisi] à (réponse)
mettre [Valeur 1] à ((nombre choisi) + (3))
mettre [Valeur 2] à ((nombre choisi) - (5))
mettre [résultat] à ((Valeur 1) * (Valeur 2))
dire (regrouper (On obtient) et (résultat))
```

1.

1. a. Montrer que si on choisit 1 comme nombre de départ alors le **programme A** affiche « On obtient 3 ».

1. b. Montrer que si on choisit 2 comme nombre de départ alors le **programme B** affiche « On obtient -15 ».

2. Avec le programme A

2. a. Soit x le nombre de départ, quelle expression littérale obtient-on à la fin de l'exécution du programme A ?
Montrer que l'on obtient le triple du nombre de départ.

2. b. Ferris affirme que si le nombre de départ est un entier naturel pair, alors on obtiendra toujours un multiple de 6. Qu'en pensez-vous ? Justifier votre réponse.

3. Avec le programme B

Soit x le nombre de départ, montrer que l'expression littérale obtenue à la fin de l'exécution du programme B est :

$$x^2 - 2x - 15$$

Exercice 11. Dans un triangle rectangle (c)

Soit ABC un triangle rectangle en A. On désigne par x un nombre positif et on a :

$$BC = x + 10\ ;\ AB = x + 3$$

1. Prouver que :

$$AC^2 = 14x + 91$$

2. Si $x = 7,5$, calculer l'aire du triangle rectangle ABC. On suppose les mesures données en cm.

Exercice 12. Programme, tableur (c)

Voici un programme de calcul :

- Choisir un nombre
- Multiplier ce nombre par 5
- Ajouter 10
- Multiplier le résultat par 2

1. Vérifier que si on choisit le nombre -1, ce programme donne 10 comme résultat final.

2. Le programme donne 30 comme résultat final, quel est le nombre choisi au départ ?

Dans la suite de l'exercice, on nomme x le nombre choisi au départ.

3. Montrer que l'expression :

$$A = 2(5x + 10)$$

donne le résultat du programme précédent pour un nombre x donné.

4. Lina souhaite regrouper le résultat du programme à l'aide d'un tableur. Elle crée la feuille de calcul ci-dessous.
Quelle formule a-t-elle saisie dans la cellule B2 puis copiée ensuite à droite dans les cellules C2 à H2 ?

B2 ✗ ✔ f_x = ?

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Nombre de départ	-3	-2	-1	0	1	2	3
2	Résultat du programme	-10	0	10	20	30	40	50

5. Si on choisit x comme nombre de départ, le résultat d'un autre programme de calcul B donne :

$$B = (2x - 3)^2 - (4x^2 - 22x - 11)$$

Prouver que les expressions A et B sont égales pour toutes les valeurs de x et donc que les deux programmes donnent toujours les mêmes résultats.

6. Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant.

Affirmation 1

Ce programme donne un résultat positif pour toutes les valeurs de x.

Affirmation 2

Si le nombre x choisi est un nombre entier naturel, le résultat obtenu est un multiple de 10.

Exercice 13. Programme de calcul et tableur (c)

Programme A	Programme B
• Choisir un nombre • Soustraire 3 • Calculer le carré du résultat obtenu	• Choisir un nombre • Calculer le carré de ce nombre • Ajouter le triple du nombre de départ • Ajouter 7

1. Corinne choisit le nombre 1 et applique le programme A. Expliquer en détaillant les calculs que le résultat du programme de calcul est 4.

2. Lina souhaite regrouper le résultat de chaque programme à l'aide d'un tableur. Elle crée la feuille de calcul ci-dessous. Quelle formule, copiée ensuite à droite dans les cellules C3 à H3, a-t-elle saisie dans la cellule B3 ?

B2 | ✗ ✔ f_x | =(B1-3)^2

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Nombre de départ	-3	-2	-1	0	1	2	3
2	Résultat du programme A	36	25	16	9	4	1	0
3	Résultat du programme B	7	5	5	7	11	17	25

3. Zoé cherche à trouver un nombre de départ pour lequel les deux programmes donnent le même résultat. Pour cela, elle appelle x le nombre choisi au départ et exprime le résultat de chaque programme de calcul en fonction de x.

3. a. Montrer que le résultat du programme A en fonction de x peut s'écrire sous forme développée et réduite : x^2-6x+9.

3. b. Écrire le résultat du programme B.

Exercice 14. Avec scratch 1(c)

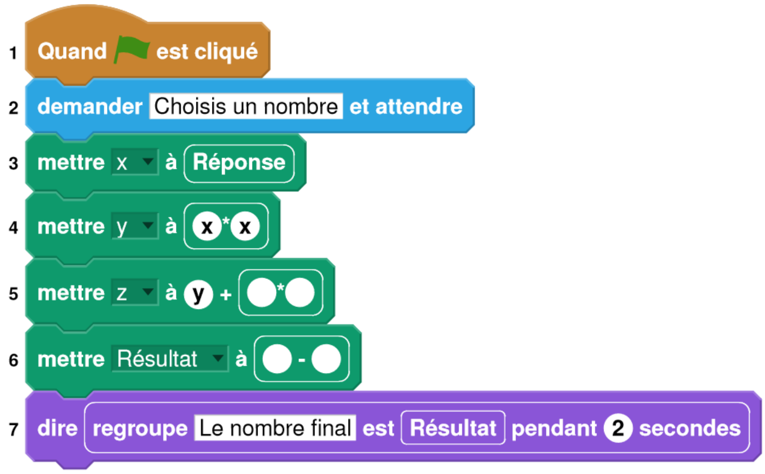
Voici un programme de calcul :

Choisir un nombre.
Prendre le carré du nombre de départ.
Ajouter le triple du nombre de départ.
Soustraire 10 au résultat.

1. Vérifier que si on choisit 4 comme nombre de départ, on obtient 18.

2. Appliquer ce programme de calcul au nombre -3.

3. Vous trouverez ci-dessous un script, écrit avec scratch.



Compléter sur votre copie les lignes 5 et 6 pour que ce script corresponde au programme de calcul.

4. On veut déterminer le nombre à choisir au départ pour obtenir zéro comme résultat.

4. a. On appelle x le nombre de départ. Exprimer en fonction de x le résultat final.

4. b. Vérifier que ce résultat peut aussi s'écrire sous la forme $(x+5)(x-2)$.

4. c. Quel(s) nombre(s) doit-on choisir au départ pour obtenir le nombre 0 à l'arrivée ?

Exercice 15. Programme de calcul et des affirmations (c)

On considère le programme de calcul suivant :

Programme 1

- Choisir un nombre entier positif.
- Ajouter 1.
- Calculer le carré du résultat obtenu.
- Enlever le carré du nombre de départ.
- Écrire le résultat.

1. On applique ce programme de calcul au nombre 3. Montrer qu'on obtient 7.

2. Voici deux affirmations :

Affirmation 3

« Le chiffre des unités du résultat obtenu est 7 ».

Affirmation 4

« Chaque résultat peut s'obtenir en ajoutant le nombre entier de départ et le nombre entier qui le suit ».

2. a. Vérifier que ces deux affirmations sont vraies pour les nombres 8 et 13.

2. b. Pour chacune de ces deux affirmations, expliquer si elle est vraie ou fausse quel que soit le nombre choisi au départ.

Partie IV. Correction des exercices

Correction de l'exercice 5 page 2 : expression littérale et calculs

On considère l'expression : $A(x) = (2x+1)(1-3x) - 2(2x+1)$.

1. **Développer et réduire $A(x)$.**

Corrigé

$$A(x) = (2x+1)(1-3x) - 2(2x+1)$$
$$A(x) = 2x - 6x^2 + 1 - 3x - 4x - 2$$
$$A(x) = \underline{-6x^2 - 5x - 1}$$

2. **Factoriser $A(x)$.**

Corrigé

$$A(x) = \boxed{\underline{(2x+1)} \times (1-3x)} - \boxed{2 \times \underline{(2x+1)}}$$
$$A(x) = (2x+1) \times \Big[(1-3x) - 2\Big]$$
$$A(x) = \underline{(2x+1)(-3x-1)}$$

3. **Calculer $A(-1)$, c'est à dire $A(x)$ en remplaçant x par -1.**

Corrigé

Avec par exemple la forme développée on obtient :

$$A(x) = -6x^2 - 5x - 1$$
$$A(-1) = -6 \times (-1)^2 - 5 \times (-1) - 1$$
$$A(-1) = -6 \times 1 + 5 - 1$$
$$A(-1) = -6 + 5 - 1$$
$$\boxed{A(-1) = -2}$$

Ou avec par exemple la forme factorisée on obtient :

$$A(x) = (2x+1)(-3x-1)$$
$$A(-1) = \Big(2 \times (-1) + 1\Big)\Big(-3 \times (-1) - 1\Big)$$
$$A(-1) = \Big(-2+1\Big)\Big(3-1\Big)$$
$$A(-1) = (-1) \times (2)$$
$$\boxed{A(-1) = -2}$$

Correction de l'exercice 6 page 3

On considère l'expression

$$A(x) = (x+1)(2-x) - 2(x+1)(2x+3)$$

1. Montrer que $A(x) = -5x^2 - 9x - 4$.

Corrigé

$$\begin{aligned} A(x) &= (x+1)(2-x) - 2(x+1)(2x+3) \\ &= 2x - x^2 + 2 - x - 2 \times \left(2x^2 + 3x + 2x + 3\right) \\ &= 2x - x^2 + 2 - x - 4x^2 - 6x - 4x - 6 \end{aligned}$$

$$\boxed{A(x) = -5x^2 - 9x - 4}$$

2. En factorisant, montrer que $A(x) = (x+1)(-5x-4)$.

Corrigé

$$\begin{aligned} A(x) &= \boxed{\underline{(x+1)}\times(2-x)} - \boxed{2 \times \underline{(x+1)}\times(2x+3)} \\ &= \underline{(x+1)}\times\Big[(2-x) - 2(2x+3)\Big] \\ &= \underline{(x+1)}\times\Big[2 - x - 4x - 6\Big] \end{aligned}$$

$$\boxed{A(x) = (x+1)(-5x-4)}$$

Pour la suite, vous pourrez utiliser la forme de $A(x)$ la plus adaptée.

3. Calculer $A(2)$, c'est à dire $A(x)$ en remplaçant x par 2.

Corrigé

Par exemple en utilisant la forme factorisée :

$$A(2) = (2+1)(-5\times 2 - 4) = 3 \times (-14) = \underline{-42}$$

4.

5. Calculer $A(-1)$ et $A\,(0)$.

Corrigé

La forme factorisée est :

$$A(x) = (x+1)(-5x-4)$$

$$\begin{aligned} A(-1) &= (-1+1)(-5\times(-1) - 4) \\ &= 0 \times (5-4) \end{aligned}$$

$$\boxed{A(-1) = 0}$$

$$\begin{aligned} A\,(0) &= (0+1)\,(-5\times 0 - 4) \\ &= 1 \times (-4) \end{aligned}$$

$$\boxed{A\,(0) = -4}$$

Correction de l'exercice 7 page 3

On considère l'expression

$$A(x) = (2x+3)^2 - (2x+3)(1-4x)$$

1. Montrer que $A(x) = 12x^2 + 22x + 6$.

Corrigé

$$\begin{aligned} A(x) &= (2x+3)(2x+3) - (2x+3)(1-4x) \\ &= 4x^2 + 6x + 6x + 9 - \times \left(2x - 8x^2 + 3 - 12x\right) \\ &= 4x^2 + 6x + 6x + 9 - 2x + 8x^2 - 3 + 12x \\ \end{aligned}$$

$$\boxed{A(x) = 12x^2 + 22x + 6}$$

2. En factorisant, montrer que $A(x) = (2x+3)(6x+2)$.

Corrigé

$$\begin{aligned} A(x) &= \boxed{\underline{(2x+3)}\times(2x+3)} - \boxed{\underline{(2x+3)}\times(1-4x)} \\ &= \underline{(2x+3)\times}\left[(2x+3) - (1-4x)\right] \\ &= \underline{(x+1)\times}\left[2x+3-1+4x\right] \end{aligned}$$

$$\boxed{A(x) = (2x+3)(6x+2)} = 2(2x+3)(3x+1)$$

Pour la suite, vous pourrez utiliser la forme de $A(x)$ la plus adaptée.

3. Calculer $A(2)$, c'est à dire $A(x)$ en remplaçant x par 2.

Corrigé

Par exemple en utilisant la forme factorisée :

$$\begin{aligned} A(2) &= (2\times 2+3)(6\times 2+2) \\ A(2) &= (4+3)(12+2) \\ A(2) &= 7\times 14 \end{aligned}$$

$$\boxed{A(2) = 98}$$

Correction de l'exercice 9 page 3 : Avec une factorisation intermédiaire

On considère l'expression : $B(x) = 5x + 10 - (x+2)^2$.

1. Factoriser $5x + 10$.

Corrigé

$$5x + 10 = 5(x+2)$$

2. En déduire une factorisation de $B(x)$.

Corrigé

$$\begin{aligned} B(x) &= \boxed{\underline{(x+2)}\times 5} - \boxed{\underline{(x+2)}\times(x+2)} \\ &= \underline{(x+2)}\times\Big[5 - (x+2)\Big] \\ &= \underline{(x+2)}\times\Big[5 - x - 2\Big] \\ &\boxed{B(x) = (x+2)(-x+3)} \end{aligned}$$

3. Développer $B(x)$.

Corrigé

$$\begin{aligned} B(x) &= 5x + 10 - (x+2)^2 \\ &= 5x + 10 - (x+2)(x+2) \\ &= 5x + 10 - \left(x^2 + 2x + 2x + 4\right) \\ &= 5x + 10 - x^2 - 2x - 2x - 4 \\ &\boxed{B(x) = -x^2 + x + 6} \end{aligned}$$

4. Calculer $B(-1)$,
c'est à dire $B(x)$ en remplaçant x par -1.

Corrigé

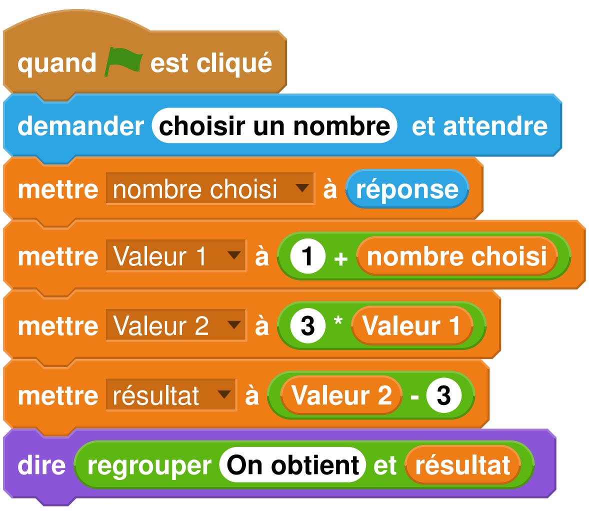
En utilisant par exemple la forme initiale $B(x) = 5x + 10 - (x+2)^2$ on obtient :

$$\begin{aligned} B(-1) &= 5 \times (-1) + 10 - (-1+2)^2 \\ &= -5 + 10 - (1)^2 \\ &= -5 + 10 - 1 \\ &\boxed{B(-1) = 4} \end{aligned}$$

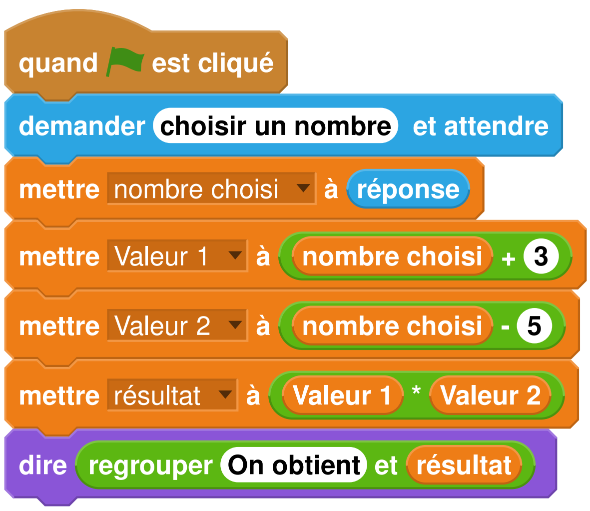
Correction de l'exercice 10 page 4

Un professeur propose à ses élèves deux programmes de calculs réalisés avec un logiciel de programmation.

Programme A



Programme B



1.

1. a. Montrer que si on choisit 1 comme nombre de départ alors le **programme A** affiche « On obtient 3 ».

Corrigé

Programme A

Nombre choisi	1
Valeur 1	$1+1=2$
Valeur 2	$3\times 2=6$
résultat	$6-3=3$
dire	on obtient 3

1. b. Montrer que si on choisit 2 comme nombre de départ alors le **programme B** affiche « On obtient -15 ».

Corrigé

Programme B

Nombre choisi	2
Valeur 1	$2+3=5$
Valeur 2	$2-5=-3$
résultat	$5\times(-3)=-15$
dire	on obtient -15

2. Avec le programme A

2. a. Soit x le nombre de départ, quelle expression littérale obtient-on à la fin de l'exécution du programme A ?

Corrigé

Programme A

Nombre choisi	x
Valeur 1	$1+x$
Valeur 2	$3\times(1+x)$
résultat	$3(1+x)-3$

Montrer que l'on obtient le triple du nombre de départ.

Corrigé

En développant le résultat obtenu on a :

$$3(1+x)-3=3+3x-3=\underline{3x}$$

C'est bien le triple du nombre de départ.

2. b. Ferris affirme que si le nombre de départ est un entier naturel pair, alors on obtiendra toujours un multiple de 6. Qu'en pensez-vous ? Justifier votre réponse.

Corrigé

Si le nombre de départ x est pair, il peu s'écrire sous la forme $x=2n$ avec n entier naturel.

De ce fait l'expression finale obtenue avec le programme A sera :

$$3\times 2n=6n$$

On obtient bien un multiple de 6 puisque n est entier.

- Ferris a raison.

3. Avec le programme B
Soit x le nombre de départ, montrer que l'expression littérale obtenue à la fin de l'exécution du programme B est :

$$x^2 - 2x - 15$$

Corrigé

Programme B

Nombre choisi	x
Valeur 1	$(x+3)$
Valeur 2	$(x-5)$
résultat	$(x+3)(x-5)$

En développant le résultat obtenu on a :

$$\begin{aligned}(x+3)(x-5) &= x^2 - 5x + 3x - 15 \\ &= \underline{x^2 - 2x - 15}\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 11 page 4

Soit ABC un triangle rectangle en A. On désigne par x un nombre positif et on a :

$$BC = x + 10\ ;\ AB = x + 3$$

1. Prouver que :

$$AC^2 = 14x + 91$$

Corrigé
Le triangle ABC est un triangle rectangle en A donc d'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned}AC^2 &= BC^2 - AB^2 \\ AC^2 &= (x+10)^2 - (x+3)^2 \\ AC^2 &= x^2 + 20x + 100 - \left(x^2 + 6x + 9\right) \\ AC^2 &= x^2 + 20x + 100 - x^2 - 6x - 9 \\ AC^2 &= \underline{14x + 91}\end{aligned}$$

2. Si $x = 7,5$, calculer l'aire du triangle rectangle ABC. On suppose les mesures données en cm.

Corrigé
Si $x = 7,5$ on a :

$$\begin{cases} AB = x + 3 = 10,5 \text{ cm} \\ BC = x + 10 = 17,5 \text{ cm} \\ AC = \sqrt{14 \times 7,5 + 91} = \sqrt{196} = 14 \text{ cm} \end{cases} \implies \mathcal{A}_{ABC} = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{10,5 \times 14}{2} = \underline{73,5 \text{ cm}^2}$$

Correction de l'exercice 12 page 5

Voici un programme de calcul :

- Choisir un nombre
- Multiplier ce nombre par 5
- Ajouter 10
- Multiplier le résultat par 2

1. Vérifier que si on choisit le nombre -1, ce programme donne 10 comme résultat final.

Corrigé

- Choisir un nombre	:	-1
- Multiplier ce nombre par 5	:	$(-1) \times 5 = -5$
- Ajouter 10	:	$-5 + 10 = 5$
- Multiplier le résultat par 2	:	$5 \times 2 = 10$
Résultat	:	10

2. Le programme donne 30 comme résultat final, quel est le nombre choisi au départ ?

Corrigé

On va effectuer le programme à l'envers :

- Résultat	:	30
- On divise par 2	:	$30 \div 2 = 15$
- Enlever 10	:	$15 - 10 = 5$
- Diviser par 5	:	$5 \div 5 = 1$
Nombre de départ	:	1

Dans la suite de l'exercice, on nomme x le nombre choisi au départ.

3. Montrer que l'expression :

$$A = 2(5x + 10)$$

donne le résultat du programme précédent pour un nombre x donné.

Corrigé

- Choisir un nombre	:	x
- Multiplier ce nombre par 5	:	$x \times 5 = 5x$
- Ajouter 10	:	$5x + 10$
- Multiplier le résultat par 2	:	$(5x + 10) \times 2$
Résultat	:	$2(5x + 10)$

4. Lina souhaite regrouper le résultat du programme à l'aide d'un tableur. Elle crée la feuille de calcul ci-dessous. Quelle formule a-t-elle saisie dans la cellule B2 puis copiée ensuite à droite dans les cellules C2 à H2 ?

B2 | ✗ ✔ f_x | = ?

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Nombre de départ	-3	-2	-1	0	1	2	3
2	Résultat du programme	-10	0	10	20	30	40	50

Corrigé

Il suffit d'écrire dans la cellule B2 :

$$\boxed{=10*B1+20} \text{ ou } \boxed{=2*(5*B1+10)}$$

5. Si on choisit x comme nombre de départ, le résultat d'un autre programme de calcul B donne :

$$B=(2x-3)^2-(4x^2-22x-11)$$

Prouver que les expressions A et B sont égales pour toutes les valeurs de x et donc que les deux programmes donnent toujours les mêmes résultats.

Corrigé

On peut développer les deux expressions et montrer qu'elle sont égales.

- D'une part :

$$A=2(5x+10)=\underline{10x+20}$$

- D'autre part :

$$\begin{aligned} B &= (2x-3)^2-(4x^2-22x-11)\\ &= 4x^2-12x+9-4x^2+22x+11\\ &= \underline{10x+20} \end{aligned}$$

- Les deux expressions sont donc identiques.

6. Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant.

Affirmation 5

Ce programme donne un résultat positif pour toutes les valeurs de x.

Corrigé

Donc par exemple par $x=-3$, le résultat du programme est :

$$10x+20=10\times(-3)+20=\underline{-10<0}$$

L'affirmation est fausse.

Affirmation 6

Si le nombre x choisi est un nombre entier naturel, le résultat obtenu est un multiple de 10.

Corrigé

On a vu que le résultat s'exprime sous la forme $10x + 20$ soit en factorisant, on obtient pour x entier naturel :

$$10x + 20 = 10 \times \underbrace{(x + 2)}_{\in \mathbb{N}}$$

Le résultat obtenu est un multiple de 10 puisqu'il s'exprime sous la forme $10 \times (x + 2)$ avec $(x + 2)$ un nombre entier puisque x est un entier naturel.

Correction de l'exercice 13 page 6 : programme et tableur

Programme A	Programme B
• Choisir un nombre • Soustraire 3 • Calculer le carré du résultat obtenu	• Choisir un nombre • Calculer le carré de ce nombre • Ajouter le triple du nombre de départ • Ajouter 7

1. Corinne choisit le nombre 1 et applique le programme A. Expliquer en détaillant les calculs que le résultat du programme de calcul est 4.

Corrigé

Programme A	
Choix	1
Soustraire 3	$1 - 3 = -2$
Carré du résultat	$(-2)^2 = 4$

2. Tidjane choisit le nombre -5 et applique le programme B. Quel résultat obtient-il ?

Corrigé

Programme B	
Choix	-5
Carré	$(-5)^2 = 25$
Ajouter le triple du nombre de départ	$25 + 3 \times (-5) = 25 - 15 = 10$
Ajouter 7	$10 + 7 = 17$

Tidjane va donc obtenir 17 en partant de (-5) avec le programme B.

3. Lina souhaite regrouper le résultat de chaque programme à l'aide d'un tableur. Elle crée la feuille de calcul ci-dessous. Quelle formule, copiée ensuite à droite dans les cellules C3 à H3, a-t-elle saisie dans la cellule B3 ?

B2 | f_x | =(B1-3)^2

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Nombre de départ	-3	-2	-1	0	1	2	3
2	Résultat du programme A	36	25	16	9	4	1	0
3	Résultat du programme B	7	5	5	7	11	17	25

Corrigé

La formule, copiée à droite dans les cellules C3 à H3, saisie dans la cellule B3 est :

$$= B1 \wedge 2 + 3 * B1 + 7 \qquad \text{ou} \qquad B1 * B1 + 3 * B1 + 7$$

4. Zoé cherche à trouver un nombre de départ pour lequel les deux programmes donnent le même résultat. Pour cela, elle appelle x le nombre choisi au départ et exprime le résultat de chaque programme de calcul en fonction de x.

4. a. Montrer que le résultat du programme A en fonction de x peut s'écrire sous forme développée et réduite : $x^2 - 6x + 9$.

Corrigé

Programme A	
Choix	x
Soustraire 3	$x - 3$
Carré du résultat	$(x-3)^2 = (x-3)(x-3) = x^2 - 3x - 3x + 9 = \underline{x^2 - 6x + 9}$

4. b. Écrire le résultat du programme B.

Corrigé

Programme B	
Choix	x
Carré	x^2
Ajouter le triple du nombre de départ	$x^2 + 3x$
Ajouter 7	$x^2 + 3x + 7$

Correction de l'exercice 14 page 7

Voici un programme de calcul :

- Choisir un nombre.
- Prendre le carré du nombre de départ.
- Ajouter le triple du nombre de départ.
- Soustraire 10 au résultat.

1. Vérifier que si on choisit 4 comme nombre de départ, on obtient 18.

Corrigé

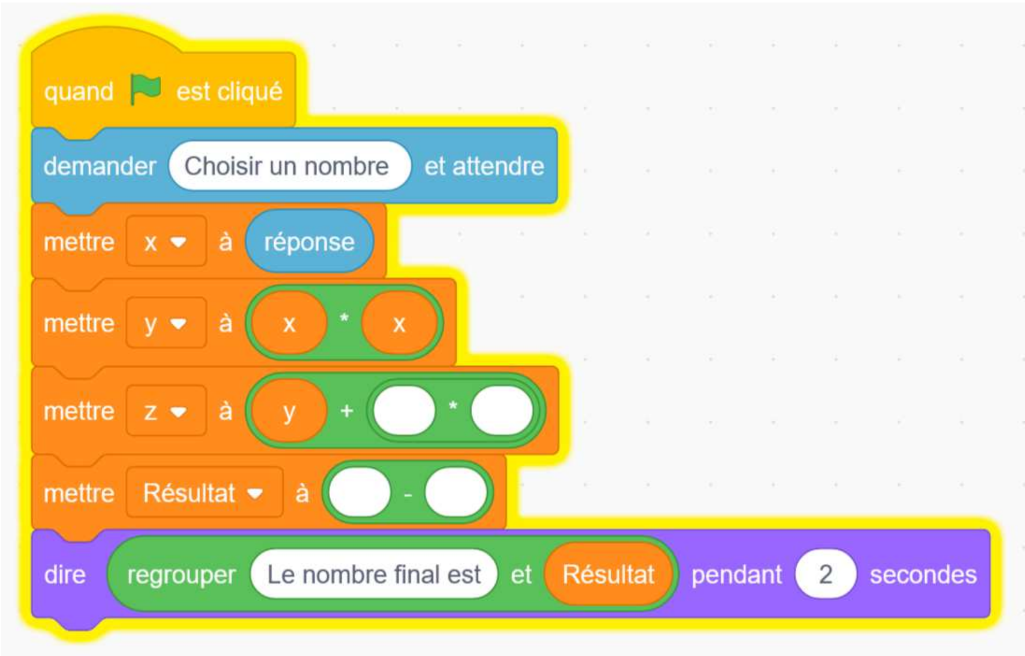
Choisir un nombre	4
Prendre le carré du nombre de départ	$4^2 = 16$
Ajouter le triple du nombre de départ	$16 + 3 \times 4 = 16 + 12 = 28$
Soustraire 10 au résultat	$28 - 10 = 18$

2. Appliquer ce programme de calcul au nombre -3.

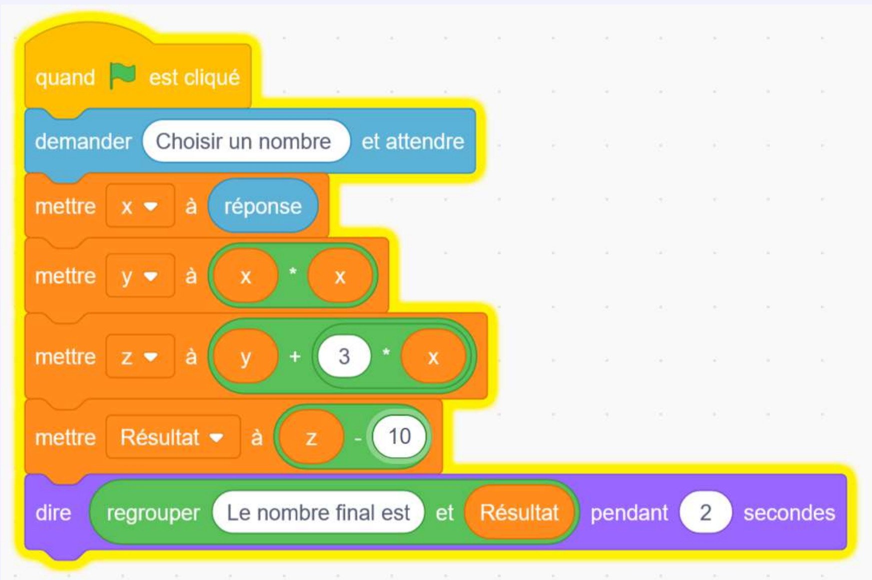
Corrigé

Choisir un nombre	-3
Prendre le carré du nombre de départ	$(-3)^2 = 9$
Ajouter le triple du nombre de départ	$9 + 3 \times (-3) = 9 - 9 = 0$
Soustraire 10 au résultat	$0 - 10 = -10$

3. Vous trouverez ci-dessous un script, écrit avec scratch. Compléter sur l'ANNEXE page 8 les lignes 5 et 6 pour que ce script corresponde au programme de calcul.



Corrigé



4. On veut déterminer le nombre à choisir au départ pour obtenir zéro comme résultat.

4. a. On appelle x le nombre de départ. Exprimer en fonction de x le résultat final.

Corrigé

Choisir un nombre	x
Prendre le carré du nombre de départ	x^2
Ajouter le triple du nombre de départ	x^2+3x
Soustraire 10 au résultat	$x^2+3x-10$

4. b. Vérifier que ce résultat peut aussi s'écrire sous la forme $(x+5)(x-2)$.

Corrigé

On a en développant l'expression demandée :

$$(x+5)(x-2)=x^2-2x+5x-10=x^2+3x-10$$

On retrouve bien l'expression de la question précédente.

4. c. Quel(s) nombre(s) doit-on choisir au départ pour obtenir le nombre 0 à l'arrivée ?

Corrigé

On a une équation produit nul :

$$\begin{aligned}(x+5)(x-2)=0 &\iff \big(x+5=0\big) \text{ ou } \big(x-2=0\big)\\ &\iff \big(x=-5\big) \text{ ou } \big(x=2\big)\end{aligned}$$

On doit choisir au départ les nombres 2 ou (-5) pour obtenir le nombre 0 à l'arrivée.

Correction de l'exercice 15 page 8

Voici un programme de calcul :

Étape 1	Choisir un nombre entier positif
Étape 2	Ajouter 1
Étape 3	Calculer le carré du résultat
Étape 4	Enlever le carré du nombre de départ

1. On applique ce programme de calcul au nombre 3. Montrer que le résultat obtenu est 7.

Corrigé

Étape 1	Choisir un nombre entier positif	3
Étape 2	Ajouter 1	$3+1=4$
Étape 3	Calculer le carré du résultat	$4^2=16$
Étape 4	Enlever le carré du nombre de départ	$16-3^2=16-9=\underline{7}$

Le résultat obtenu avec 3 au départ est bien 7.

2. Voici deux affirmations :

Affirmation 7

Le chiffre des unités du résultat obtenu est 7.

Affirmation 8

Chaque résultat peut s'obtenir en ajoutant le nombre entier de départ et le nombre entier qui suit.

2. a. Vérifier que ces deux affirmations sont vraies pour les nombres 8 et 13.

Corrigé

Étape 1	Choisir un nombre entier positif	8	13
Étape 2	Ajouter 1	$8+1=9$	$13+1=14$
Étape 3	Calculer le carré du résultat	$9^2=81$	$14^2=196$
Étape 4	Enlever le carré du nombre de départ	$81-8^2=\underline{17}$	$196-13^2=\underline{27}$

- Donc avec 8 on obtient 17,
  17 est un nombre dont le chiffre des unité est 7 donc l'affirmation 1 est vraie.
  En outre on a :
  $$17=8+9$$
  Le résultat peut s'obtenir en ajoutant le nombre entier de départ et le nombre entier qui suit. L'affirmation 2 est vraie.

- Donc avec 13 on obtient 27,
  27 est un nombre dont le chiffre des unité est 7 donc l'affirmation 1 est vraie.
  En outre on a :
  $$27=13+14$$

Le résultat peut s'obtenir en ajoutant le nombre entier de départ et le nombre entier qui suit. L'affirmation 2 est vraie.

2. b. Pour chacune des affirmation, expliquez si elle est vraie ou fausse quelque soit le nombre choisi au départ.

Corrigé

- **Pour l'affirmation 1.**

Étape 1	Choisir un nombre entier positif	1
Étape 2	Ajouter 1	$1+1=2$
Étape 3	Calculer le carré du résultat	$2^2=4$
Étape 4	Enlever le carré du nombre de départ	$4-1^2=3$

En prenant 1 au départ on obtient 3 dont le chiffre des unités n'est pas 7, *l'affirmation 1 n'est donc pas toujours vraie.*

- **Pour l'affirmation 2.**

On va partir d'un nombre quelconque, entier positif que l'on peut noter n.

Étape 1	Choisir un nombre entier positif	n
Étape 2	Ajouter 1	$n+1$
Étape 3	Calculer le carré du résultat	$(n+1)^2$
Étape 4	Enlever le carré du nombre de départ	$(n+1)^2-n^2$

On obtient donc la différence de deux carrés $(n+1)^2-n^2$, terme que l'on peut développer :

$$(n+1)^2-n^2=n^2+2n+1-n^2=2n+1$$

Or $2n+1$ pour s'écrire sous la forme d'une somme de l'entier n et de son suivant $n+1$:

$$2n+1=n+(n+1)$$

<u>L'affirmation 2 est donc toujours vraie</u>.