Math93.com

TD 1 - Quatrième/Troisième

Diviseurs, multiples et nombres premiers (version élève à compléter sans les corrigés)

Les exercices suivants dont l'intitulé est suivi du symbole (c) sont corrigés intégralement en fin du présent TD. Les autres présentent des éléments de réponses et un lien vers une correction détaillée sur www.math93.com

Partie I. Diviseurs et multiples

Exercice 1. Vrai ou Faux : D'après Brevet (c)

Des affirmations sont données ci-dessous. Pour chacune des affirmations, indiquer si elle est vraie ou fausse. On rappelle que toutes les réponses doivent être justifiées.

1. **Affirmation 1** : Les diviseurs communs à 12 et 18 sont les mêmes que les diviseurs de 6.
2. **Affirmation 2** : 4 n'admet que deux diviseurs.
3. **Affirmation 3** : Deux nombres impairs n'ont que 1 comme diviseur commun.

Exercice 2. Multiple de 10 : D'après Brevet 2014 Pondichéry. (c)

« *Je prends un nombre entier. Je lui ajoute 3 et je multiplie le résultat par 7. J'ajoute le triple du nombre de départ au résultat et j'enlève 21. J'obtiens toujours un multiple de 10.* » Est-ce vrai ? Justifier.

Exercice 3. D'après Brevet (c)

Un panneau mural a pour dimensions 240 cm et 360 cm. On souhaite le recouvrir avec des carreaux de forme carrée, tous de même taille, posés bord à bord sans jointure.

1. Peut-on utiliser des carreaux de : 10 cm de côté ? 14 cm de côté ? 18 cm de côté ?
2. Quelles sont toutes les tailles possibles de carreaux comprises entre 10 et 20 cm ?
3. On choisit des carreaux de 15 cm de côté. On pose une rangée de carreaux bleus sur le pourtour et des carreaux blancs ailleurs. Combien de carreaux bleus va-t-on utiliser ?

Exercice 4. Un voyage (c)

Pour un voyage scolaire, 13 professeurs doivent accompagner 154 élèves d'un collège. Le déplacement doit s'effectuer dans des bus de 24 places maximum. Combien de bus seront nécessaires ?

Exercice 5. Multiple de 3 ? (c)

Affirmation 1

Nory affirme « *Je prends un nombre entier naturel. Je lui ajoute 3 et je multiplie le résultat par 5. J'enlève le double du nombre de départ au résultat. J'obtiens toujours un multiple de 3.* »

Est-ce vrai ? Justifier.

Exercice 6. Programme de calcul et multiples de 4

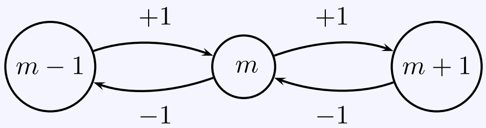
► ***Prérequis** : développement*

On rappelle les résultats suivants étudiés en cours.

Propriété 1

Soit m un entier relatif et n un entier naturel.

1. L'entier qui suit m est $(m+1)$.
2. L'entier qui précède m est $(m-1)$.



3. Un entier pair s'écrit sous la forme $2n$.
4. Un entier impair s'écrit sous la forme $(2n+1)$.
5. Un entier multiple de 3 s'écrit sous la forme $3n$.
6. Un entier multiple de 4 s'écrit sous la forme $4n$.

On considère le programme suivant :

Programme 1

- Choisir un nombre premier différent de 2.
- Le multiplier par lui-même.
- Soustraire 1

1. Faire fonctionner ce programme avec trois nombres premiers de votre choix.

2. Vérifier qu'avec les nombres choisis, les résultats sont des multiples de 4.

3. Démonstration.

3. a. Faire fonctionner le programme avec p un nombre premier quelconque différent de 2.

3. b. Prouver à l'aide d'un développement que le résultat obtenu (qui est fonction de p) peut s'écrire sous la forme :

$$(p+1)(p-1)$$

3. c. Expliquer pourquoi les entiers $(p+1)$ et $(p-1)$ sont pairs.

3. d. En déduire alors que le nombre obtenu avec ce programme est toujours un multiple de 4.

Exercice 7. Conjecture et Vrai/Faux

Conjecture

In mathematics, a conjecture is a conclusion or a proposition which is suspected to be true due to preliminary supporting evidence, but for which no proof or disproof has yet been found.

- ***Prérequis*** *: factorisation*

On cherche à savoir si les propositions suivantes sont vraies ou fausses. Tout d'abord, écrivez quelques exemple afin de conjecturer la réponse. Après ces exemples, si une affirmation vous semble vraie, la prouver à l'aide d'une expression algébrique, sinon exhiber un contre-exemple.

Affirmation 2

La somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est toujours un nombre impair.

Affirmation 3

Le produit d'un nombre pair et d'un nombre impair est toujours un nombre pair.

Affirmation 4

La somme de trois entiers consécutifs est toujours un multiple de 3.

Affirmation 5

La somme de deux multiples de 3 est toujours un multiple de 3.

Partie II. Nombres premiers et fractions irréductibles

Exercice 8. Vrai ou faux

Conjecture

In mathematics, a conjecture is a conclusion or a proposition which is suspected to be true due to preliminary supporting evidence, but for which no proof or disproof has yet been found.

- ***Prérequis** : factorisation*

On cherche à savoir si les propositions suivantes sont vraies ou fausses. Tout d'abord, écrivez quelques exemple afin de conjecturer la réponse. Après ces exemples, si une affirmation vous semble vraie, la prouver à l'aide d'une expression algébrique, sinon exhiber un contre-exemple.

Affirmation 6

La somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est toujours un nombre impair.

Affirmation 7

Tous les nombres premiers sont impairs.

Affirmation 8

La somme de deux nombres premiers peut être un nombre premier.

Affirmation 9

Tous les nombres impairs sont des nombres premiers.

Affirmation 10

Un nombre premier ne peut pas avoir 0 comme chiffre des unités.

Exercice 9. Décomposition (d'après Brevet) (c)

1. Décomposez les entiers 756 et 441 en produit de facteurs premiers (détaillez les calculs).

2. Rendre alors irréductible la fraction $\frac{756}{441}$.

Exercice 10. Un commun diviseur (c)

1. Décomposer les nombres 56 et 98 en produits de facteurs premiers.
2. Quel est le seul nombre premier qui divise à la fois 56 et 98 ?
3. Quel est le plus grand nombre entier qui divise à la fois 56 et 98 ?
   On nomme ce nombre le Plus Grand commun Diviseur (PGCD) de 56 et 98 (*greateast common divisor or GCD in english*)

Exercice 11. Les fractions irréductibles ... c'est ma passion ! (c)

Définition 1 (Fractions irréductibles / Irreducible fraction)

Un fraction irréductible se traduit en anglais par : Irreducible fraction (or fraction in lowest terms, simplest form or reduced fraction).

An irreducible fraction is a fraction in which the numerator and denominator are integers that have no other common divisors than 1.

1. Rendre irréductible la fraction $A = \frac{125}{75}$ et détaillant vos calculs.

2. En déduire maintenant rapidement la valeur de :

$$B = A + \frac{1}{3}$$

3. En utilisant l'astuce précédente, calculer l'expression C en donnant le résultat sous la forme d'une fraction irréductible :

$$C = \frac{8}{12} + \frac{16}{30}$$

Exercice 12. Avec des proportions

Une boite de bonbons contient 150 bonbons en forme de crocodiles, et 120 en forme de bouteilles.
Calculer la proportion de bonbons en forme de crocodiles dans la boite en donnant le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

Exercice 13. Avec un Tableur

Affirmation 11

Soit n un nombre entier.
Mia affirme que tous les nombres de la forme $2n + 3$ sont des nombres premiers.

Utiliser un tableur pour invalider cette affirmation.

Partie III. Corrections

Les corrections sont sur le document de la page www.math93.com