Math93.com

TD 1 - Quatrième/Troisième
Diviseurs, multiples et nombres premiers

Les exercices suivants dont l'intitulé est suivi du symbole (c) sont corrigés intégralement en fin du présent TD. Les autres présentent des éléments de réponses et un lien vers une correction détaillée sur www.math93.com

Partie I. Diviseurs et multiples

Exercice 1. Vrai ou Faux : D'après Brevet (c)

Des affirmations sont données ci-dessous. Pour chacune des affirmations, indiquer si elle est vraie ou fausse. On rappelle que toutes les réponses doivent être justifiées.

1. **Affirmation 1** : Les diviseurs communs à 12 et 18 sont les mêmes que les diviseurs de 6.
2. **Affirmation 2** : 4 n'admet que deux diviseurs.
3. **Affirmation 3** : Deux nombres impairs n'ont que 1 comme diviseur commun.

Exercice 2. Multiple de 10 : D'après Brevet 2014 Pondichéry. (c)

« *Je prends un nombre entier. Je lui ajoute 3 et je multiplie le résultat par 7. J'ajoute le triple du nombre de départ au résultat et j'enlève 21. J'obtiens toujours un multiple de 10.* » Est-ce vrai ? Justifier.

Exercice 3. D'après Brevet (c)

Un panneau mural a pour dimensions 240 cm et 360 cm. On souhaite le recouvrir avec des carreaux de forme carrée, tous de même taille, posés bord à bord sans jointure.

1. Peut-on utiliser des carreaux de : 10 cm de côté ? 14 cm de côté ? 18 cm de côté ?
2. Quelles sont toutes les tailles possibles de carreaux comprises entre 10 et 20 cm ?
3. On choisit des carreaux de 15 cm de côté. On pose une rangée de carreaux bleus sur le pourtour et des carreaux blancs ailleurs. Combien de carreaux bleus va-t-on utiliser ?

Exercice 4. Un voyage (c)

Pour un voyage scolaire, 13 professeurs doivent accompagner 154 élèves d'un collège. Le déplacement doit s'effectuer dans des bus de 24 places maximum. Combien de bus seront nécessaires ?

Exercice 5. Multiple de 3 ? (c)

Affirmation 1

Nory affirme « *Je prends un nombre entier naturel. Je lui ajoute 3 et je multiplie le résultat par 5. J'enlève le double du nombre de départ au résultat. J'obtiens toujours un multiple de 3.* »

Est-ce vrai ? Justifier.

Exercice 6. Programme de calcul et multiples de 4

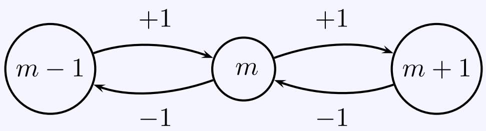
► ***Prérequis*** *: développement*

On rappelle les résultats suivants étudiés en cours.

Propriété 1

Soit m un entier relatif et n un entier naturel.

1. L'entier qui suit m est $(m+1)$.
2. L'entier qui précède m est $(m-1)$.



3. Un entier pair s'écrit sous la forme $2n$.
4. Un entier impair s'écrit sous la forme $(2n+1)$.
5. Un entier multiple de 3 s'écrit sous la forme $3n$.
6. Un entier multiple de 4 s'écrit sous la forme $4n$.

On considère le programme suivant :

Programme 1

- Choisir un nombre premier différent de 2.
- Le multiplier par lui-même.
- Soustraire 1

1. Faire fonctionner ce programme avec trois nombres premiers de votre choix.

2. Vérifier qu'avec les nombres choisis, les résultats sont des multiples de 4.

3. **Démonstration**.

3. a. Faire fonctionner le programme avec p un nombre premier quelconque différent de 2.

3. b. Prouver à l'aide d'un développement que le résultat obtenu (qui est fonction de p) peut s'écrire sous la forme :

$$(p+1)(p-1)$$

3. c. Expliquer pourquoi les entiers $(p+1)$ et $(p-1)$ sont pairs.

3. d. En déduire alors que le nombre obtenu avec ce programme est toujours un multiple de 4.

Exercice 7. Conjecture et Vrai/Faux

Conjecture

In mathematics, a conjecture is a conclusion or a proposition which is suspected to be true due to preliminary supporting evidence, but for which no proof or disproof has yet been found.

- ***Prérequis*** *: factorisation*

On cherche à savoir si les propositions suivantes sont vraies ou fausses. Tout d'abord, écrivez quelques exemple afin de conjecturer la réponse. Après ces exemples, si une affirmation vous semble vraie, la prouver à l'aide d'une expression algébrique, sinon exhiber un contre-exemple.

Affirmation 2

La somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est toujours un nombre impair.

Affirmation 3

Le produit d'un nombre pair et d'un nombre impair est toujours un nombre pair.

Affirmation 4

La somme de trois entiers consécutifs est toujours un multiple de 3.

Affirmation 5

La somme de deux multiples de 3 est toujours un multiple de 3.

Partie II. Nombres premiers et fractions irréductibles

Exercice 8. Vrai ou faux

Conjecture

In mathematics, a conjecture is a conclusion or a proposition which is suspected to be true due to preliminary supporting evidence, but for which no proof or disproof has yet been found.

► ***Prérequis** : factorisation*

On cherche à savoir si les propositions suivantes sont vraies ou fausses. Tout d'abord, écrivez quelques exemple afin de conjecturer la réponse. Après ces exemples, si une affirmation vous semble vraie, la prouver à l'aide d'une expression algébrique, sinon exhiber un contre-exemple.

Affirmation 6

La somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est toujours un nombre impair.

Affirmation 7

Tous les nombres premiers sont impairs.

Affirmation 8

La somme de deux nombres premiers peut être un nombre premier.

Affirmation 9

Tous les nombres impairs sont des nombres premiers.

Affirmation 10

Un nombre premier ne peut pas avoir 0 comme chiffre des unités.

Exercice 9. Décomposition (d'après Brevet) (c)

1. Décomposez les entiers 756 et 441 en produit de facteurs premiers (détaillez les calculs).
2. Rendre alors irréductible la fraction $\frac{756}{441}$.

Exercice 10. Un commun diviseur (c)

1. Décomposer les nombres 56 et 98 en produits de facteurs premiers.
2. Quel est le seul nombre premier qui divise à la fois 56 et 98 ?
3. Quel est le plus grand nombre entier qui divise à la fois 56 et 98 ?
   On nomme ce nombre le Plus Grand commun Diviseur (PGCD) de 56 et 98 (*greateast common divisor or GCD in english*)

Exercice 11. Les fractions irréductibles ... c'est ma passion ! (c)

Définition 1 (Fractions irréductibles / Irreducible fraction)

Un fraction irréductible se traduit en anglais par : Irreducible fraction (or fraction in lowest terms, simplest form or reduced fraction).

An irreducible fraction is a fraction in which the numerator and denominator are integers that have no other common divisors than 1.

1. Rendre irréductible la fraction $A = \dfrac{125}{75}$ et détaillant vos calculs.

2. En déduire maintenant rapidement la valeur de :

$$B = A + \frac{1}{3}$$

3. En utilisant l'astuce précédente, calculer l'expression C en donnant le résultat sous la forme d'une fraction irréductible :

$$C = \frac{8}{12} + \frac{16}{30}$$

Exercice 12. Avec des proportions

Une boite de bonbons contient 150 bonbons en forme de crocodiles, et 120 en forme de bouteilles.
Calculer la proportion de bonbons en forme de crocodiles dans la boite en donnant le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

Exercice 13. Avec un Tableur

Affirmation 11

Soit n un nombre entier.
Mia affirme que tous les nombres de la forme $2n + 3$ sont des nombres premiers.

Utiliser un tableur pour invalider cette affirmation.

Partie III. Corrections

Correction de l'exercice 1

- **Affirmation 1 : Vraie**
  - Les diviseurs de 12 sont : 1, 2, 3, 4, 6 et 12 ;
  - Les diviseurs de 18 sont : 1, 2, 3, 6, 9 et 18 ;
  - Les diviseurs communs à 12 et 18 sont donc 1, 2, 3 et 6 et ce sont aussi les diviseurs de 6
  - Conclusion : l'affirmation 1 est vraie.
- **Affirmation 2 : Fausse**
  4 admet trois diviseurs distincts : 1, 2 et 4.
- **Affirmation 3 : Fausse**
  3 et 9 sont impairs et pourtant leurs diviseurs communs sont 1 et 3. Donc l'affirmation 3 est fausse.

Correction de l'exercice 2

« *Je prends un nombre entier. Je lui ajoute 3 et je multiplie le résultat par 7. J'ajoute le triple du nombre de départ au résultat et j'enlève 21. J'obtiens toujours un multiple de 10.* » Est-ce vrai ? Justifier.

Correction

On peut, en partant d'un nombre entier naturel quelconque noté x, écrire les différentes étapes de cet algorithme :

Étape 1	x	choix du nombre
Étape 2	$x+3$	on ajoute 3
Étape 3	$7\times(x+3)$	on multiplie par 7
Étape 4	$7\times(x+3)+3x$	on ajoute le triple de x
Étape 5	$7\times(x+3)+3x-21$	on retranche 21

L'algorithme conduit, en partant de x entier naturel quelconque , au nombre

$$7\times(x+3)+3x-21$$

qui après développement s'exprime sous la forme

$$\begin{aligned}7\times(x+3)+3x-21 &= 7x+21+3x-21\\ &= 10x\end{aligned}$$

On **obtient bien un multiple de 10, l'affirmation est donc vraie**.

Correction de l'exercice 3 page 1

Un panneau mural a pour dimensions 240 cm et 360 cm. On souhaite le recouvrir avec des carreaux de forme carrée, tous de même taille, posés bord à bord sans jointure.

1. **Peut-on utiliser des carreaux de : 10 cm de côté ? 14 cm de côté ? 18 cm de côté ?**

Correction

- Il faut remarquer que la taille du carreau doit nécessairement être un diviseur de la longueur 360 et aussi de la largeur 240.
  Cette dimension doit être un diviseur commun de 360 et 240.
- Les entiers 240 et 360 sont divisibles par 10 car leur chiffre des unités est 0. On peut donc utiliser des carreaux de 10 cm de côté.
- Les entiers 240 et 360 ne sont pas divisibles par 14. En effet dans la division euclidienne, le reste n'est pas nul :
  $$240 = 14 \times 17 + 2 \text{ et } 360 = 14 \times 25 + 10$$
  On ne peut pas utiliser de carreaux de 14 cm de côté.
- L'entier 240 n'est pas divisible par 18. En effet dans la division euclidienne, le reste n'est pas nul :
  $$240 = 18 \times 13 + 6$$
  On ne peut pas utiliser de carreaux de 18 cm de côté.

2. **Quelles sont toutes les tailles possibles de carreaux comprises entre 10 et 20 cm ?**

Correction

On cherche les entiers naturels compris entre 10 et 20 diviseurs de 240 et 360.

- Pour 10 on a : déjà traité à la question 1. 10 convient.
- Pour 11 on a : $240 = 11 \times 21 + 9$ donc 11 ne convient pas.
- Pour 12 on a : $240 = 20 \times 12$ et $360 = 30 \times 12$. 12 convient.
- Pour 13 on a : $240 = 13 \times 18 + 6$. 13 ne convient pas.
- Pour 14 on a : : déjà traité à la question 1. . 14 ne convient pas.
- Pour 15 on a : : $240 = 15 \times 16$ et $360 = 15 \times 24$. 15 convient.
- Pour 16 on a : $360 = 16 \times 22 + 8$. 16 ne convient pas.
- Pour 17 on a : $240 = 17 \times 14 + 2$. 17 ne convient pas.
- Pour 18 on a : déjà traité à la question 1. 18 ne convient pas.
- Pour 19 on a : : $240 = 19 \times 12 + 12$. 19 ne convient pas.
- Pour 20 on a : $240 = 20 \times 12$ et $360 = 20 \times 18$. 20 convient.

On peut donc utiliser des carreaux dont les côtés mesurent 10 cm, 12 cm, 15 cm ou 20 cm.

3. **On choisit des carreaux de 15 cm de côté. On pose une rangée de carreaux bleus sur le pourtour et des carreaux blancs ailleurs. Combien de carreaux bleus va-t-on utiliser ?**

Correction

On peut mettre 16 carreaux pour couvrir 240 cm.

Il faut donc 32 carreaux pour couvrir les deux côtés de même dimensions.

Les quatre coins sont donc carrelés. Il ne faut donc que 22 carreaux pour couvrir l'autre dimension.

On a donc besoin de $32 + 22 + 22 = \underline{76 \text{ carreaux}}$.

Correction de l'exercice 5 page 1

Affirmation 12

Nory affirme « *Je prends un nombre entier naturel. Je lui ajoute 3 et je multiplie le résultat par 5. J'enlève le double du nombre de départ au résultat. J'obtiens toujours un multiple de 3.* »

Est-ce vrai ? Justifier.
Notons n le nombre entier naturel choisi au départ.

Étape 1	n
Étape 2	$n+3$
Étape 3	$5\times(n+3)$
Étape 4	$5\times(n+3)-2n$

On peut alors développer le résultat :

$$5\times(n+3)-2n = 5n+15-2n = \underline{3n+15}$$

On veut alors prouver que ce résultat est un multiple de 3, il faut appliquer la définition du cours :

Définition 2 (Multiple et diviseur)

- Un nombre entier $\boldsymbol{a}$ **est un multiple** d'un nombre entier b non nul lorsque le reste de la division euclidienne de a par b est 0.
- On dit que $\boldsymbol{b}$ **est un diviseur de** $\boldsymbol{a}$ ou que a est divisible par b.
- Si l'entier b divise l'entier a il existe donc un entier q tel que : $a = b\times q$.

On cherche alors à écrire le résultat sous la forme 3 fois un entier.

$$3n+15 = 3\times(n+5)$$

Avec $(n+5)$ entier, donc le résultat obtenu est bien un multiple de 3. L'affirmation de Nory est vraie.

Correction de l'exercice 9 page 4

1. **Décomposez les entiers 756 et 441 en produit de facteurs premiers (détaillez les calculs).**

$$\begin{aligned} 756 &= 2\times 378 \\ &= 2\times 2\times 189 \\ &= 2\times 2\times 3\times 63 \\ &= 2\times 2\times 3\times 9\times 7 \\ 756 &= \underline{2^2\times 3^3\times 7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 441 &= 3\times 147 \\ &= 3\times 3\times 49 \\ 441 &= \underline{3^2\times 7^2} \end{aligned}$$

2. **Rendre alors irréductible la fraction $\mathbf{\dfrac{756}{441}}$.**

On utilise la décomposition précédente :

$$\frac{756}{441}=\frac{2^2\times 3^3\times 7}{3^2\times 7^2}=\frac{2\times 2\times \cancel{3}\times \cancel{3}\times 3\times \cancel{7}}{\cancel{3}\times \cancel{3}\times \cancel{7}\times 7}=\boxed{\frac{12}{7}}$$

Correction de l'exercice 10 page 4

1. Décomposer les nombres 56 et 98 en produits de facteurs premiers.

Correction

On a :

- Pour 56 : (on teste successivement les entiers premiers en utilisant les critères de divisibilité)

$$\begin{aligned} 56 &= 2 \times 28 \\ &= 2 \times 2 \times 14 \\ &= \underline{2 \times 2 \times 2 \times 7 = 2^3 \times 7} \end{aligned}$$

- Pour 98 : (on teste successivement les entiers premiers en utilisant les critères de divisibilité)

$$\begin{aligned} 98 &= 2 \times 48 \\ 98 &= \underline{2 \times 7 \times 7 = 2 \times 7^2} \end{aligned}$$

2. Quel sont les nombres premiers qui divise à la fois 56 et 98 ?

Correction

- On utilise les décompositions précédentes :

$$\begin{cases} 56 = 2 \times 2 \times 2 \times 7 \\ 98 = 2 \times 7 \times 7 \end{cases}$$

- On repère les facteurs premiers communs aux deux décompositions (on les entoure) :

$$\begin{cases} 56 = \boxed{2} \times 2 \times 2 \times \boxed{7} \\ \\ 98 = \boxed{2} \times 7 \times \boxed{7} \end{cases}$$

- Conclusion : les nombres premiers qui divise à la fois 56 et 98 sont 2 et 7 .

3. Quel est le plus grand nombre entier qui divise à la fois 56 et 98 ?

Correction

De la même façon :

- On repère les facteurs premiers communs aux deux décompositions (on les entoure) :

$$\begin{cases} 56 = \boxed{2} \times 2 \times 2 \times \boxed{7} \\ \\ 98 = \boxed{2} \times 7 \times \boxed{7} \end{cases}$$

- On peut donc écrire :

$$\begin{cases} 56 = \boxed{2} \times 2 \times 2 \times \boxed{7} \\ \\ 98 = \boxed{2} \times 7 \times \boxed{7} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 56 = \boxed{14} \times 4 \\ \\ 98 = \boxed{14} \times 7 \end{cases}$$

- Conclusion : le plus grand nombre entier qui divise à la fois 56 et 98 est 14 (c'est le PGCD de 56 et 98).

Correction de l'exercice 4

Pour un voyage scolaire, 13 professeurs doivent accompagner 154 élèves d'un collège. Le déplacement doit s'effectuer dans des bus de 24 places maximum. Combien de bus seront nécessaires ?
Le nombre total de voyageurs est de : $13 + 154 = 167$.
Puisque les bus ont 24 places maximum on va effectuer la division euclidienne de 167 par 24 :

$$167 = 24 \times 6 + 23$$

Il faudra donc prendre 7 bus. Avec 6 bus qui seront remplis intégralement et un qui aura 23 passagers pour 24 places.