Math93.com

TD 1 - Quatrième

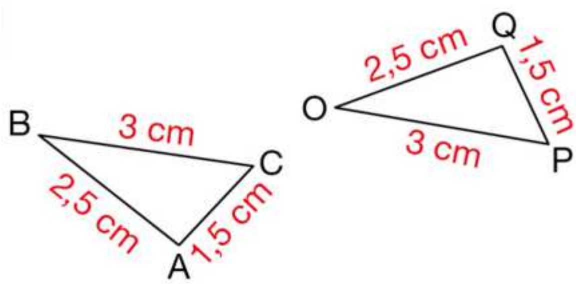
Égalité de triangles

Les exercices dont l'intitulé est suivi du symbole (c) sont corrigés en fin de TD.

Première partie

Applications du cours

Exercice 1. Reconnaître des éléments homologues et cas d'égalité n°1 (c)



1. Expliquer pourquoi les deux triangles ABC et OPQ sont égaux.

2. Compléter alors le tableau ci-dessous.

- Dans le triangle ABC, l'angle $\widehat{A}$ est formé des côtés $\cdots\cdots\cdots$ et $[\cdots\cdots\cdots]$ avec d'après le codage :

$$\begin{cases} Distances \\ AB = \cdots\cdots\cdots \\ AC = \cdots\cdots\cdots \end{cases} \quad \text{donc le sommet } A \text{ homologue à } \cdots\cdots\cdots$$

- De même :

$$\begin{cases} Distances \\ BA = \cdots\cdots\cdots \\ BC = \cdots\cdots\cdots \end{cases} \quad \text{donc le sommet } B \text{ homologue à } \cdots\cdots\cdots$$

- et donc C homologue à $\cdots\cdots\cdots$.
- Bilan : On peut donc compléter le tableau suivant :

Sommets	A	B	C
Homologues	$\cdots\cdots\cdots$	$\cdots\cdots\cdots$	$\cdots\cdots\cdots$

$$\begin{cases} Distances \\ AB = \cdots\cdots\cdots \\ AC = \cdots\cdots\cdots \\ BC = \cdots\cdots\cdots \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} Angles\ homologues \\ \widehat{ABC} = \cdots\cdots\cdots \\ \widehat{BCA} = \cdots\cdots\cdots \\ \widehat{BAC} = \cdots\cdots\cdots \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \text{Côtés homologues} \\ [AB] \text{ et } \cdots\cdots\cdots \\ [AC] \text{ et } \cdots\cdots\cdots \\ [BC] \text{ et } \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Exercice 2. Éléments homologues et cas d'égalité n°1 (c)

1. Construire un triangle ABC de dimension $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm et $BC = 5$ cm.

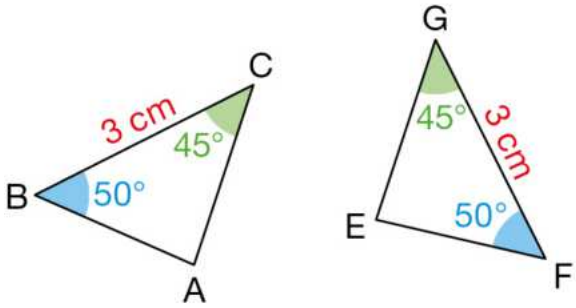
2. A partir de ce triangle, construire un triangle BCD tel que $BD = 4$ cm et $CD = 3$ cm.

3. Démontrer que les triangles ABC et BCD sont égaux.

4. En déduire tous les éléments homologues.

5. On suppose que le triangle ABC est rectangle en A, que dire du triangle BCD ?

Exercice 3. Éléments homologues et cas d'égalité n°2 (c)

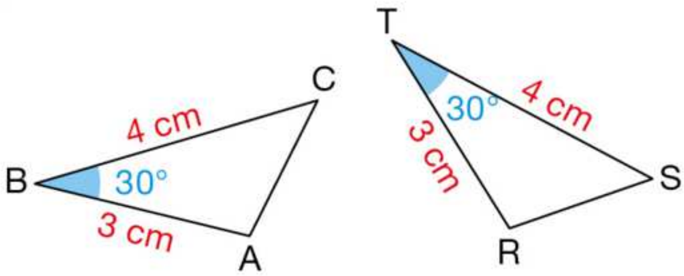


1. Démontrer que ces triangles sont égaux.
2. Donner alors les éléments homologues.

Sommets	A	B	C
Homologues	....	....	....

$$\left\{\begin{array}{l} Distances \\ AB = \cdots\cdots\cdots \\ AC = \cdots\cdots\cdots \\ BC = \cdots\cdots\cdots \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} Angles\ homologues \\ \widehat{ABC} = \cdots\cdots\cdots \\ \widehat{BCA} = \cdots\cdots\cdots \\ \widehat{BAC} = \cdots\cdots\cdots \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} \text{Côtés homologues} \\ [AB] \text{ et } \cdots\cdots\cdots \\ [AC] \text{ et } \cdots\cdots\cdots \\ [BC] \text{ et } \cdots\cdots\cdots \end{array}\right.$$

Exercice 4. Éléments homologues et cas d'égalité n°3 (c)



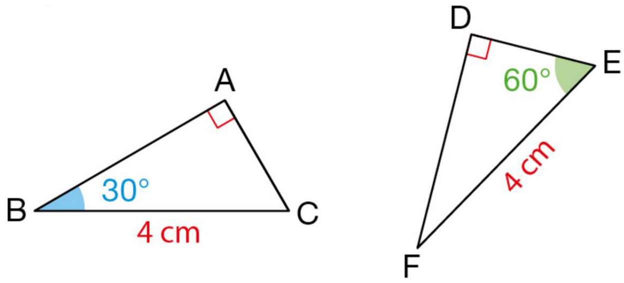
1. Démontrer que ces triangles sont égaux.
2. Donner alors les éléments homologues.

Sommets	A	B	C
Homologues	....	....	....

$$\left\{\begin{array}{l} Distances \\ AB = \cdots\cdots\cdots \\ AC = \cdots\cdots\cdots \\ BC = \cdots\cdots\cdots \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} Angles\ homologues \\ \widehat{ABC} = \cdots\cdots\cdots \\ \widehat{BCA} = \cdots\cdots\cdots \\ \widehat{BAC} = \cdots\cdots\cdots \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} \text{Côtés homologues} \\ [AB] \text{ et } \cdots\cdots\cdots \\ [AC] \text{ et } \cdots\cdots\cdots \\ [BC] \text{ et } \cdots\cdots\cdots \end{array}\right.$$

Deuxième partie
Exercices Bilan

Exercice 5. Avec des triangles rectangles (c)

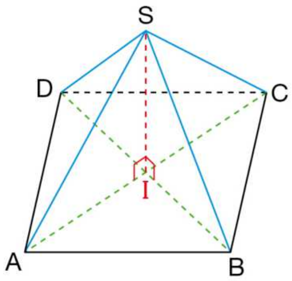


1. Démontrer que ces deux triangles sont égaux.

2. Donner les sommets homologues (sous forme de tableau comme dans les exercices précédents).

Exercice 6. Dans une pyramide (c)

La pyramide de Khéops construite par les égyptiens vers 2 600 BC, peut être assimilée à une pyramide à base carrée de côté 230 m et de hauteur $SI = 137$ m.

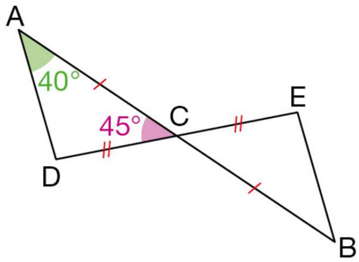


Sur la figure, le point I est le centre du carré ABCD, la droite (SI) est perpendiculaire aux droites (AB) et (BD).

1. Justifier que les triangles SIA et SIB sont égaux.

2. On peut démontrer de même que les triangles SIA, SIB, SIC et SID sont tous égaux.
En déduire que : $SA = SB = SC = SD$.

Exercice 7. Déterminer la mesure d'un angle (c)



Les segments [AC] et [DE] se coupent en leur milieu.
Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{CEB}$

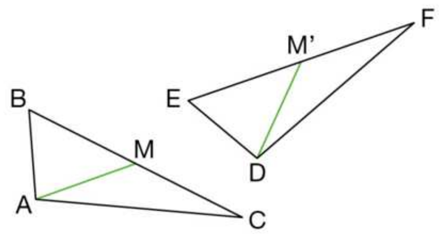
Exercice 8. Égalité des médianes (c)

C'est l'exercice résolu 1 page 425 du livre.

Exercice résolu

1 **Énoncé**

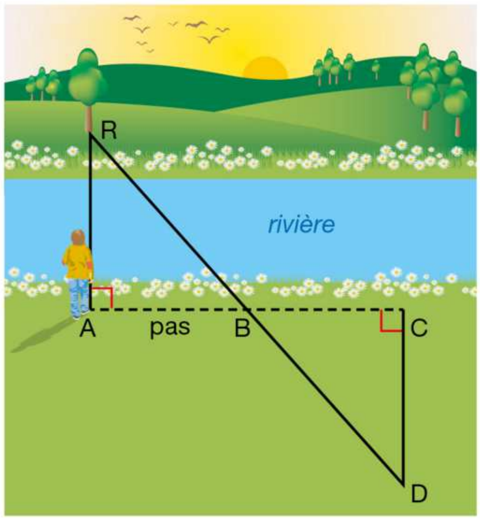
ABC et DEF sont deux triangles égaux avec A, B, C respectivement homologues à D, E, F.
M et M' sont les milieux respectifs des côtés [BC] et [EF].
a. Démontrer que les triangles ABM et DEM' sont égaux.
b. En déduire que AM = DM'.



Exercice 9. Estimer la largeur d'une rivière (c)

Dans un guide de survie en milieu hostile, voici ce que l'on peut lire pour estimer la largeur d'une rivière.

- On se place en un point A en face d'un repère R situé sur l'autre rive (arbre, rocher…).
- On marche n pas le long du cours d'eau et parallèlement à celui-ci (donc perpendiculairement à la ligne de visée (AR)).
- Au n-ième pas, on laisse un repère au sol en B (bâton, sac…), puis on continue à marcher le long de la rivière pour un nombre égal n de pas jusqu'à atteindre le point C.
- De C, on s'éloigne de la rivière en restant perpendiculaire à celle-ci, jusqu'à se placer en un point D aligné avec les repères R et B.
- La largeur de la rivière est le nombre de pas de C à D.

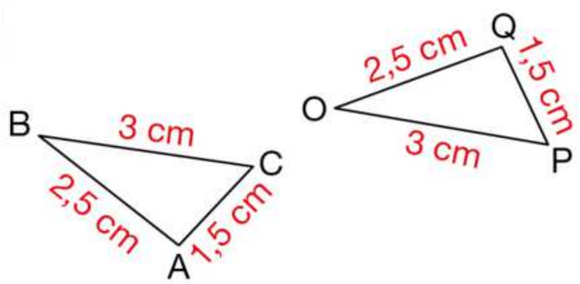


1. Expliquer pourquoi les triangles ABR et BCD sont égaux.
2. Justifier alors le procédé expliqué dans ce guide pour estimer la largeur d'une rivière.

<u>Facultatif</u> : exercices 2 et 3 page 425 du livre. Ils sont corrigés à la fin du manuel ou de ce TD.

Troisième partie
Correction des exercices

Correction de l'exercice 1 page 1 : éléments homologues



1. Expliquer pourquoi les deux triangles ABC et OPQ sont égaux.

Corrigé

Les triangles ABC et OPQ sont égaux car ils ont les côtés deux à deux de même mesures. C'est le cas d'égalité n°1.

2. Compléter alors le tableau ci-dessous.

Corrigé

- Dans le triangle ABC, l'angle $\widehat{A}$ est formé des côtés $[AB]$ et $[AC]$ avec d'après le codage :

$$\begin{cases} Distances \\ AB = QO \\ AC = QP \end{cases} \quad \text{donc le sommet } A \text{ homologue à } Q$$

- De même :

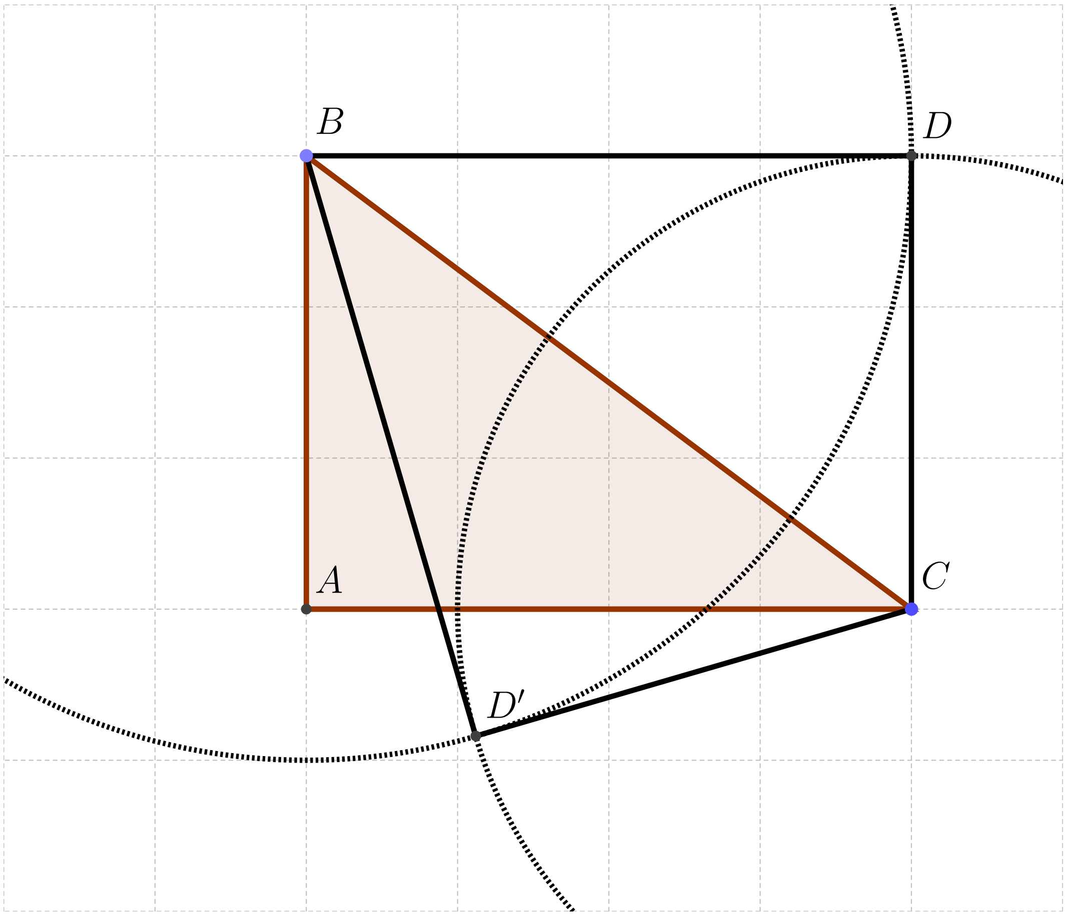
$$\begin{cases} Distances \\ BA = OQ \\ BC = OP \end{cases} \quad \text{donc le sommet } B \text{ homologue à } O$$

- et donc C homologue à P.
- Bilan : On peut donc compléter le tableau suivant :

Sommets	A	B	C
Homologues	Q	O	P

$$\begin{cases} Distances \\ AB = QO \\ AC = QP \\ BC = OP \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} Angles\ homologues \\ \widehat{ABC} = \widehat{QOP} \\ \widehat{BCA} = \widehat{OPQ} \\ \widehat{BAC} = \widehat{OQP} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \text{Côtés homologues} \\ [AB] \text{ et } [QO] \\ [AC] \text{ et } [QP] \\ [BC] \text{ et } [OP] \end{cases}$$

Correction de l'exercice 2 page 1 : éléments homologues



1. Construire un triangle ABC de dimension $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm et $BC = 5$ cm.

2. A partir de ce triangle, construire un triangle BCD tel que $BD = 4$ cm et $CD = 3$ cm.

> **Corrigé**
> Il y a deux possibilités, ici on a les triangles BCD et BCD'. Il suffisait d'en représenter une seule.

3. Démontrer que les triangles ABC et BCD sont égaux.

> **Corrigé**
> On a :
>
> $$\begin{cases} Distances \\ AB = DB = 3 \\ AC = DC = 4 \\ BC = BC = 5 \end{cases}$$
>
> Les triangles ABC et BCD sont donc égaux car ils ont les côtés deux à deux de même mesures. C'est le cas d'égalité n°1.

4. En déduire tous les éléments homologues.

Corrigé

Sommets	A	B	C
Homologues	D	B	C

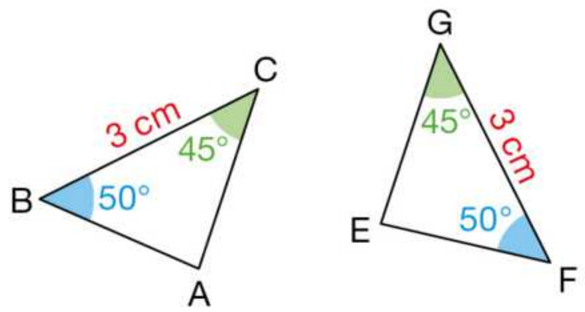
$$\begin{cases} Distances \\ AB = DB \\ AC = DC \\ BC = BC \end{cases} \text{ et } \begin{cases} Angles\ homologues \\ \widehat{ABC} = \widehat{DBC} \\ \widehat{BCA} = \widehat{BCD} \\ \widehat{BAC} = \widehat{BDC} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \text{Côtés homologues} \\ [AB] \text{ et } [DB] \\ [AC] \text{ et } [DC] \\ [BC] \text{ et } [BC] \end{cases}$$

5. On suppose que le triangle ABC est rectangle en A, que dire du triangle BCD ?

Corrigé

Si le triangle ABC est rectangle en A, alors puisque BCD et ABC sont égaux, le triangle BCD est rectangle en D, le sommet homologue à A.

Correction de l'exercice 3 page 2 : cas d'égalité 2



1. Démontrer que ces triangles sont égaux.

Corrigé

Les deux triangles ont 1 côté de même longueur et deux angles adjacents de même mesure, donc ils sont égaux. En effet on a :

1 côté et 2 angles adjacents	[BC]	$\widehat{ABC}$	$\widehat{ACB}$
Homologues	[GF]	$\widehat{EFG}$	$\widehat{EGF}$

Remarque : attention, il faut obligatoirement donner les côtés et angles homologues, sous forme de tableau ou par une phrase.

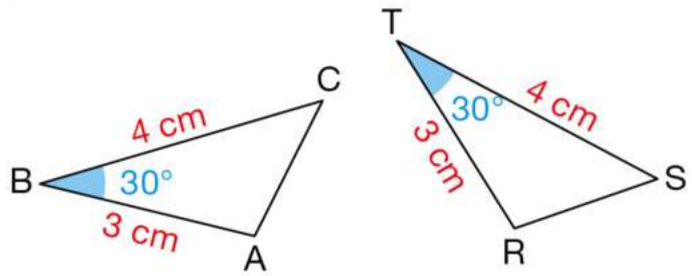
2. Donner alors les éléments homologues.

Corrigé

Sommets	A	B	C
Homologues	E	F	G

$$\begin{cases} Distances \\ AB = EF \\ AC = EG \\ BC = FG \end{cases} \text{ et } \begin{cases} Angles\ homologues \\ \widehat{ABC} = \widehat{EFG} \\ \widehat{BCA} = \widehat{FGE} \\ \widehat{BAC} = \widehat{FEG} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \text{Côtés homologues} \\ [AB] \text{ et } [EF] \\ [AC] \text{ et } [EG] \\ [BC] \text{ et } [FG] \end{cases}$$

Correction de l'exercice 4 page 2 : cas d'égalité 3



1. Démontrer que ces triangles sont égaux.

Corrigé

Les deux triangles ont 1 angle de même mesure compris entre 2 côtés deux à deux de même mesure, donc ils sont égaux. En effet on a :

2 côtés et 1 angle	[BA]	[BC]	$\widehat{ABC}$
Homologues	[TR]	[TS]	$\widehat{RTS}$

Remarque : attention, il faut obligatoirement donner les côtés et angles homologues, sous forme de tableau ou par une phrase.

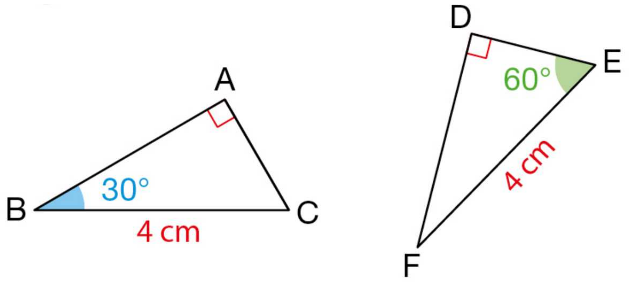
2. Donner alors les éléments homologues.

Corrigé

Sommets	A	B	C
Homologues	R	T	S

$$\begin{cases} Distances \\ AB = RT \\ AC = RS \\ BC = TS \end{cases} \text{ et } \begin{cases} Angles\ homologues \\ \widehat{ABC} = \widehat{RTS} \\ \widehat{BCA} = \widehat{TSR} \\ \widehat{BAC} = \widehat{TRS} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \text{Côtés homologues} \\ [AB] \text{ et } [RT] \\ [AC] \text{ et } [RS] \\ [BC] \text{ et } [TS] \end{cases}$$

Correction de l'exercice 5 page 3 : Avec des triangles rectangles



1. Démontrer que ces deux triangles sont égaux.

Corrigé

- Dans le triangle rectangle ABC, les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont complémentaires donc :

$$\widehat{C} = 90° - \widehat{B} = 60°$$

- Dans le triangle rectangle DEF, les angles $\widehat{E}$ et $\widehat{F}$ sont complémentaires donc :

$$\widehat{F} = 90° - \widehat{E} = 30°$$

- Les deux triangles ont donc 1 côté de même longueur et deux angles adjacents de même mesure, donc ils sont égaux. En effet on a :

1 côté et 2 angles adjacents	[BC]	$\widehat{CBA} = 30°$	$\widehat{BCA} = 60°$
Homologues	[EF]	$\widehat{EFD} = 30°$	$\widehat{FED} = 60°$

Remarque : attention, il faut obligatoirement donner les côtés et angles homologues, sous forme de tableau ou par une phrase.

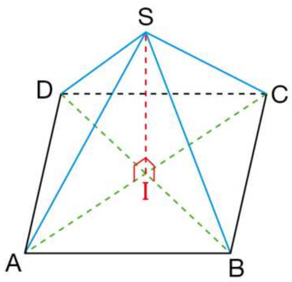
2. Donner les sommets homologues (sous forme de tableau comme dans les exercices précédents).

Corrigé

Sommets	A	B	C
Homologues	D	F	E

$$\begin{cases} Distances \\ AB = DF \\ AC = DE \\ BC = FE \end{cases} \text{ et } \begin{cases} Angles\ homologues \\ \widehat{ABC} = \widehat{DFE} \\ \widehat{BCA} = \widehat{FED} \\ \widehat{BAC} = \widehat{FDE} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \text{Côtés homologues} \\ [AB] \text{ et } [DF] \\ [AC] \text{ et } [DE] \\ [BC] \text{ et } [FE] \end{cases}$$

Correction de l'exercice 6 page 3 : Dans une pyramide(c)



Corrigé

1.

- Tout d'abord remarquons que puisque la base de la pyramide est un carré, les diagonales [DB] et [AC] se coupent en leur milieu et ont la même mesure, de ce fait on a :

$$IA = IB = IC = ID$$

- Les deux triangles SIA et SIB ont 1 angle de même mesure (l'angle droit) compris entre 2 côtés deux à deux de même mesure, donc ils sont égaux. En effet on a :

2 côtés et 1 angle	[IA]	[IS]	$\widehat{SIA} = 90°$
Homologues	[IB]	[IS]	$\widehat{SIB} = 90°$

Remarque : attention, il faut obligatoirement donner les côtés et angles homologues, sous forme de tableau ou par une phrase.

- De même pour les triangles SIB et SIC puis SIC et SID
- On en déduite que tous les triangles SIA, SIB, SIC et SID sont égaux.

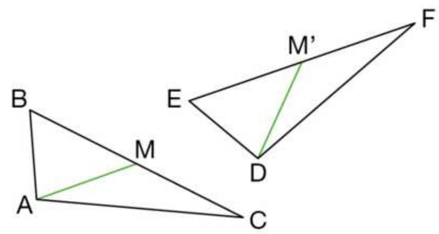
2. Les triangles SIA, SIB, SIC et SID sont égaux, avec les côtés homologues [SA], [SAb], [SC] et [SD]. Ils sont donc tous de même mesure.

Correction de l'exercice 8 page 4 : médiane

Exercice résolu

1 Énoncé

ABC et DEF sont deux triangles égaux avec A, B, C respectivement homologues à D, E, F.
M et M' sont les milieux respectifs des côtés [BC] et [EF].
a. Démontrer que les triangles ABM et DEM' sont égaux.
b. En déduire que AM = DM'.



Solution

a. • Les côtés [BC] et [EF] sont homologues donc BC = EF. On en déduit donc que BM = EM'.
Les côtés [AB] et [DE] sont aussi homologues donc BA = ED.
• Les angles $\widehat{ABM}$ et $\widehat{DEM'}$ sont homologues donc ils ont la même mesure.
• Ainsi les triangles ABM et DEM' ont un angle de même mesure ($\widehat{ABM} = \widehat{DEM'}$) compris entre deux côtés de même longueur (BA = ED et BM = EM').
D'après le 2[e] cas d'égalité des triangles, les triangles ABM et DEM' sont égaux.
b. Dans les triangles égaux ABM et DEM', les côtés [AM] et [DM'] sont homologues, donc AM = DM'.

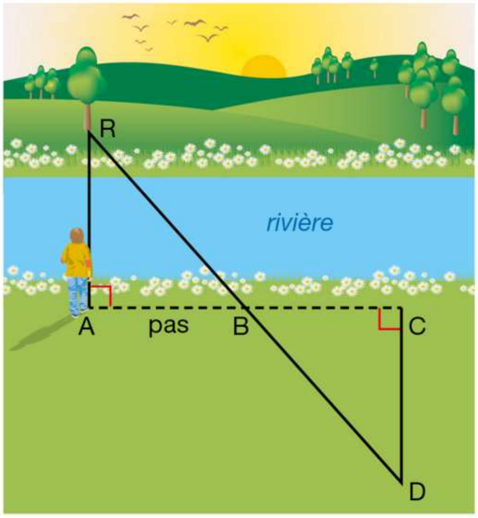
Conseils

• Lorsqu'on superpose le triangle DEF au triangle ABC, les points A et D se superposent ; il en est de même des points B et E, ainsi que C et F.
On peut alors visualiser les côtés et angles homologues.
• Un segment qui joint un sommet d'un triangle au milieu du côté opposé est appelé une médiane.
Deux triangles égaux ont donc leurs médianes, relatives à des côtés homologues, de même longueur.
On montre à l'exercice 2 qu'il en est de même des hauteurs relatives à deux côtés homologues.

Correction de l'exercice 9 page 4 : largeur d'une rivière

Dans un guide de survie en milieu hostile, voici ce que l'on peut lire pour estimer la largeur d'une rivière.

- On se place en un point A en face d'un repère R situé sur l'autre rive (arbre, rocher...).
- On marche n pas le long du cours d'eau et parallèlement à celui-ci (donc perpendiculairement à la ligne de visée (AR)).
- Au n-ième pas, on laisse un repère au sol en B (bâton, sac...), puis on continue à marcher le long de la rivière pour un nombre égal n de pas jusqu'à atteindre le point C.
- De C, on s'éloigne de la rivière en restant perpendiculaire à celle-ci, jusqu'à se placer en un point D aligné avec les repères R et B.
- La largeur de la rivière est le nombre de pas de C à D.



1. Expliquer pourquoi les triangles ABR et BCD sont égaux.

Corrigé

- On a $AB = BC$,
- $\widehat{RAB} = \widehat{BCD} = 90°$
- et $\widehat{RBA} = \widehat{CBD}$ car ce sont des angles opposés par le sommet .
- D'après le cas d'égalité des triangles, les triangles ABR et BCD sont égaux car ils ont 1 côté de même longueur et deux angles adjacents de même mesure.

1 côté et 2 angles adjacents	[BA]	$\widehat{ABC}$	$\widehat{BAR} = 90°$
Homologues	[BC]	$\widehat{CBD}$	$\widehat{BCD} = 90°$

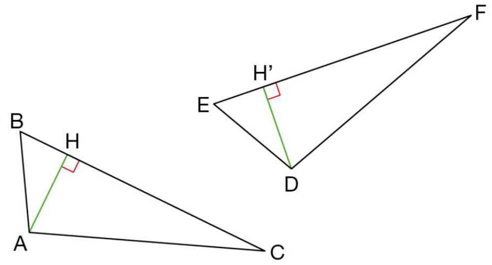
2. Justifier alors le procédé expliqué dans ce guide pour estimer la largeur d'une rivière.

Corrigé

Or, les côtés [AR] et [CD] sont homologues, donc AR = CD, ce qui justifie le procédé expliqué dans ce guide pour estimer la largeur de la rivière.

Correction des exercices 2 et 3 page 425 du livre

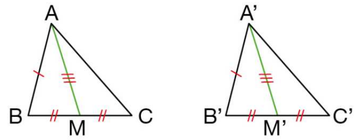
2 ABC et DEF sont des triangles égaux avec A, B, C respectivement homologues à D, E, F.
H et H′ sont les pieds des hauteurs issues respectivement de A et de D dans les triangles ABC et DEF.
a. Démontrer que les triangles ABH et DEH′ sont égaux.
b. En déduire que les hauteurs [AH] et [DH′] ont la même longueur.



Correction

2 **a.** Les côtés [AB] et [DE] sont homologues donc AB = DE.
Les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{DEF}$ sont également homologues donc ils ont la même mesure.
D'autres part les triangles ABH et DEH′ sont rectangles respectivement en H et H′ donc les angles $\widehat{BAH}$ et $\widehat{EDH'}$ ont la même mesure.
Ainsi les triangles ABH et DEH′ ont un côté de même longueur et des angles adjacents à ce côté deux à deux de même mesure. D'après le 1er cas d'égalité des triangles, les triangles ABH et DEH′ sont égaux.
b. Dans les triangles égaux ABH et DEH′, les côtés [AH] et [DH′] sont homologues, donc AH = DH′.

3 ABC et A′B′C′ sont deux triangles tels que :
AB = A′B′, BC = B′C′ et AM = A′M′
où M et M′ sont les milieux respectifs des côtés [BC] et [B′C′].



a. Démontrer que les triangles ABM et A′B′M′ sont égaux (utiliser le 3e cas d'égalité des triangles).
b. En déduire que les triangles ABC et A′B′C′ sont égaux (utiliser le 2e cas d'égalité des triangles).

Correction

3 **a.** BC = B′C′ donc BM = B′M′.
On a aussi AB = A′B′ et BC = B′C′, d'après le 3e cas d'égalité des triangles, les triangles ABM et A′B′M′ sont égaux.

a. Dans les triangles égaux ABM et A′B′M′, les angles $\widehat{ABM}$ et $\widehat{A'B'M'}$ sont homologues donc ils ont la même mesure.
Alors AB = A′B′, BC = B′C′ et $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$, d'après le 2e cas d'égalité des triangles, les triangles ABC et A′B′C′ sont égaux.