Math93.com

TD 2 - Quatrième
Fractions - Partie 2

Les exercices dont l'intitulé est suivi du symbole (c) sont corrigés en fin de TD.

Partie I. Multiplications, divisions et additions de rationnels

Exercice 1. Quelques gammes

Effectuer les calculs suivants et donner le résultat sous la forme d'une fraction la plus simple possible.

1. $\text{A} = \left(\dfrac{2}{3} - \dfrac{22}{33}\right)^2.$
2. $\text{B} = \left(\dfrac{2}{5} - \dfrac{21}{35}\right) + 1.$
3. $\text{C} = \text{A} \times \text{B}.$
4. $\text{D} = \left(1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{5}{2}\right) \times \dfrac{120}{60}.$
5. $\text{E} = (\text{A}-\text{B}) \times (\text{C}+\text{D})$
6. $\text{F} = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}$
7. $\text{G} = \text{F} + \dfrac{1}{\text{F}}$
8. $\text{H} = \dfrac{\dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{15}}{\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{10}}$

Réponses

$A = 0$; $B = \frac{4}{5}$; $C = 0$; $D = -2$; $E = \frac{8}{5}$; $F = \frac{11}{6}$; $G = \frac{157}{66}$; $H = 1$

Exercice 2. D'après brevet

1. Soit
$$A = \frac{2}{13} - \frac{5}{13} : \frac{10}{16}$$
Calculer A en donnant le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.
2. On pose
$$B = \frac{2}{5} + \frac{1}{4}\ ;\ C = \frac{2}{5} - \frac{1}{4} \text{ et } D = \frac{\text{B}}{\text{C}}$$
Écrire le nombre D sous la forme d'une fraction irréductible.
3. Soit
$$E = \frac{7}{15} - \frac{2}{15} \times \frac{9}{4}$$
Calculer E et donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible.
4. Soit
$$F = \frac{3}{4} + \frac{5}{4} : \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{2}\right)$$
Calculer F et donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible.
5. Écrire G sous forme d'une fraction irréductible :
$$G = \frac{\dfrac{4}{3} - 1}{\dfrac{7}{6} - 2}$$

Réponses

$A = \frac{-6}{13}$; $B = \frac{13}{20}$; $C = \frac{3}{20}$; $D = \frac{13}{3}$; $E = \frac{1}{6}$; $F = \frac{9}{4}$; $G = \frac{-2}{5}$

Exercice 3. SAT (c)

Question 1 (SAT - Pratice test 1 - section 3 - Q8)

If $\dfrac{a}{b} = 2$, what is the value of $\dfrac{4b}{a}$?

a. 0 **b.** 1 **c.** 2 **d.** 4

Partie II. Des fractions et des problèmes

Exercice 4. D'après Brevet (Polynésie 2016) (c)

Les continents occupent $\dfrac{5}{17}$ de la superficie totale de la Terre.

1. L'océan Pacifique recouvre la moitié de la superficie restante. Quelle fraction de la superficie totale de la Terre occupe-t-il ?

2. Sachant que la superficie de l'océan Pacifique est de 180 000 000 km^2, déterminer la superficie de la Terre.

Exercice 5. D'après Brevet (Centres étrangers, 2011) (c)

On donne :

$$C = \frac{10 - 9 \times 2}{2}$$

Sophie et Éric calculent C : Sophie trouve 1 et Éric trouve -4. Qui a raison ? Justifier.

Exercice 6. La formule d'Héron d'Alexandrie (c)

L'unité de longueur est le centimètre.
ABC est un triangle tel que : $AB = 16$ cm, $AC = 14$ cm et $BC = 8$ cm.

1.

1. a. Tracer en vraie grandeur le triangle ABC sur la copie.

1. b. Le triangle ABC est-il rectangle ? Justifier.

2. Le mathématicien Héron d'Alexandrie (1$^{\text{er}}$ siècle), a trouvé une formule permettant de calculer l'aire d'un triangle : en notant a, b, c les longueurs des trois côtés et p son périmètre, l'aire A du triangle est donnée par la formule :

$$A = \sqrt{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2} - a\right)\left(\frac{p}{2} - b\right)\left(\frac{p}{2} - c\right)}.$$

Calculer à l'aide de cette formule l'aire du triangle ABC.
Donner le résultat arrondi au cm^2 près.

Exercice 7. D'après brevet (Polynésie, Septembre 2010) (c)

Avec un projecteur de cinéma, une image sur un film est projetée sur un écran. Sur le film, une image rectangulaire de 70 mm de long et 52,5 mm de large peut être agrandie sur un écran jusqu'à 588 m^2.

1. On appelle format de l'image le rapport : $\dfrac{\text{longueur de l'image}}{\text{largeur de l'image}}$.

Montrer que l'image sur le film est au format $\dfrac{4}{3}$. Justifier.

2. Calculer en mm^2 l'aire de l'image sur le film. Convertir en m^2.

3. Pour obtenir un image de 588 m^2 sur l'écran, la longueur et la largeur de l'image sur le film ont été multipliées par un coefficient. Le format $\dfrac{4}{3}$ de l'image est conservé. Quelles sont les dimensions sur l'écran ? Justifier votre démarche.

Partie III. En lien avec le calcul littéral

Exercice 8. Calculs de valeurs

On donne l'expression :

$$f(x) = x^2 + 3x + 1$$

Montrer que :

1. Pour $x = \frac{1}{2}$, on obtient $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{11}{4}$.

2. Pour $x = -\frac{1}{2}$, on obtient $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$.

3. Pour $x = -\frac{2}{3}$, on obtient $f\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{5}{9}$.

Exercice 9. Calcul littéral

On donne l'expression :

$$g(x) = (2x+1)(3-2x)$$

Montrer que :

1.

1. a. Pour $x = \frac{1}{2}$, on obtient $g\left(\frac{1}{2}\right) = 4$.

1. b. Pour $x = -\frac{1}{2}$, on obtient $g\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$.

1. c. Pour $x = -\frac{2}{3}$, on obtient $g\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{13}{9}$.

2. Développer l'expression $g(x)$.

3. Refaire la question 1° avec la forme développée de $g(x)$.

Exercice 10. Vu au brevet

On considère l'expression :

$$A(x) = (x+1)(2x-3) - (x+1)(3x+1)$$

1. Développer $A(x)$.

2. Calculer la valeur de l'expression lorsque $x = \dfrac{3}{2}$.

3. En étant astucieux, déterminer au moins une solution de l'équation $A(x) = 0$.

↫ **Fin du TD** ↬

Partie IV. Correction des exercices

Correction de l'exercice 2 page 1

1. Soit

$$A = \frac{2}{13} - \frac{5}{13} : \frac{10}{16}$$

Calculer A en donnant le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

Correction

$$A = \frac{2}{13} - \frac{5}{13} \times \frac{16}{10}$$
$$A = \frac{2}{13} - \frac{\cancel{5} \times \cancel{2} \times 8}{13 \times \cancel{2} \times \cancel{5}}$$
$$A = \frac{2}{13} - \frac{8}{13}$$
$$A = \frac{2-8}{13}$$
$$\boxed{A = \frac{-6}{13}}$$

2. On pose

$$B = \frac{2}{5} + \frac{1}{4} \text{ ; } C = \frac{2}{5} - \frac{1}{4} \text{ et } D = \frac{\text{B}}{\text{C}}$$

Écrire le nombre D sous la forme d'une fraction irréductible.

Correction

$$B = \frac{2}{5} + \frac{1}{4}$$
$$B = \frac{2 \times 4 + 1 \times 5}{5 \times 4}$$
$$B = \frac{8+5}{20}$$
$$\boxed{B = \frac{13}{20}}$$

$$C = \frac{2}{5} - \frac{1}{4}$$
$$C = \frac{2 \times 4 - 1 \times 5}{5 \times 4}$$
$$C = \frac{8-5}{20}$$
$$\boxed{C = \frac{3}{20}}$$

$$D = \frac{\frac{13}{20}}{\frac{3}{20}}$$
$$D = \frac{13}{20} \times \frac{20}{3}$$
$$D = \frac{13 \times \cancel{20}}{\cancel{20} \times 3}$$
$$\boxed{D = \frac{13}{3}}$$

3. Soit

$$E = \frac{7}{15} - \frac{2}{15} \times \frac{9}{4}$$

Calculer E et donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

Correction

$$E = \frac{7}{15} - \frac{2}{15} \times \frac{9}{4}$$
$$E = \frac{7}{15} - \frac{2 \times 3 \times 3}{3 \times 5 \times 2 \times 2}$$
$$E = \frac{7}{15} - \frac{\cancel{2} \times \cancel{3} \times 3}{\cancel{3} \times 5 \times \cancel{2} \times 2}$$
$$E = \frac{7}{15} - \frac{3}{10}$$
$$E = \frac{7 \times 2}{15 \times 2} - \frac{3 \times 3}{10 \times 3}$$
$$E = \frac{14 - 9}{30}$$
$$\boxed{E = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}}$$

4. Soit

$$F = \frac{3}{4} + \frac{5}{4} : \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{2}\right)$$

Calculer F et donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

Correction

$$F = \frac{3}{4} + \frac{5}{4} \div \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{2}\right)$$
$$F = \frac{3}{4} + \frac{5}{4} \div \left(\frac{8 - 3}{6}\right)$$
$$F = \frac{3}{4} + \frac{5}{4} \div \frac{5}{6}$$
$$F = \frac{3}{4} + \frac{5}{4} \times \frac{6}{5}$$
$$F = \frac{3}{4} + \frac{\cancel{5} \times \cancel{2} \times 3}{\cancel{2} \times 2 \times \cancel{5}}$$
$$F = \frac{3}{4} + \frac{3}{2}$$
$$F = \frac{3}{4} + \frac{3 \times 2}{2 \times 2}$$
$$F = \frac{3 + 6}{4}$$
$$\boxed{F = \frac{9}{4}}$$

5. Écrire G sous forme d'une fraction irréductible :

$$G = \frac{\frac{4}{3} - 1}{\frac{7}{6} - 2}$$

Correction

$$G = \frac{\frac{4}{3} - 1}{\frac{7}{6} - 2}$$

$$G = \frac{\frac{4}{3} - \frac{3}{3}}{\frac{7}{6} - \frac{12}{6}}$$

$$G = \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{5}{6}}$$

$$G = \frac{1}{3} \times \frac{-6}{5}$$

$$G = -\frac{1 \times 2 \times 3}{3 \times 5}$$

$$\boxed{F = -\frac{2}{5}}$$

Correction de l'exercice 3 page 2

Question 2 (SAT - Pratice test 1 - section 3 - Q8)

If $\frac{a}{b} = 2$, what is the value of $\frac{4b}{a}$?

a. 0 **b.** 1 $\boxed{\textbf{c.}\ 2}$ **d.** 4

Correction

- Méthode 1 :
  Since $\frac{a}{b} = 2$, thus $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$, so
  $$\frac{4b}{a} = 4 \times \frac{b}{a} = 4 \times \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$
  And the correct answer is C.
- Méthode 2 :
  We can plug in numbers, for exemple since $\frac{a}{b} = 2$, we can use the values $a = 2$ and $b = 1$:
  $$\frac{a}{b} = \frac{2}{1} = 2 \Longrightarrow \frac{4b}{a} = \frac{4 \times 1}{2} = 2$$
  And the correct answer is C.

Correction de l'exercice 4 page 2

Les continents occupent $\frac{5}{17}$ de la superficie totale de la Terre.

1. L'océan Pacifique recouvre la moitié de la superficie restante.
Quelle fraction de la superficie totale de la Terre occupe-t-il ?

Correction

Les mers occupent

$$1 - \frac{5}{17} = \frac{17-5}{17} = \frac{12}{17}$$

de la superficie de la Terre.

L'Océan Pacifique recouvre la moitié de la superficie restante, donc il occupe à lui seul :

$$\frac{1}{2} \times \frac{12}{17} = \frac{6}{17}$$

(un peu plus d'un tiers).

2. Sachant que la superficie de l'océan Pacifique est de 180 000 000 km^2, déterminer la superficie de la Terre.

Correction

Si S est la superficie de la Terre, on a donc :

$$\frac{6}{17} \times S = 180\,000\,000$$

d'où

$$6S = 17 \times 180\,000\,000$$

et

$$S = \frac{17 \times 180\,000\,000}{6} = 510\,000\,000\,\text{km}^2$$

La Terre a une superficie d'environ 510 000 000 km^2.

Correction de l'exercice 5 page 2

On donne :

$$C = \frac{10 - 9 \times 2}{2}$$

Sophie et Éric calculent C : Sophie trouve 1 et Éric trouve -4. Qui a raison ? Justifier.

Correction

$$C = \frac{10 - 9 \times 2}{2} = \frac{10 - 18}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$

Donc Eric a raison.

Correction de l'exercice 6 page 2

L'unité de longueur est le centimètre.
ABC est un triangle tel que : $AB = 16$ cm, $AC = 14$ cm et $BC = 8$ cm.

1.

1. a. Tracer en vraie grandeur le triangle ABC sur la copie.

Correction

1. b. Le triangle ABC est-il rectangle ? Justifier.

Correction

Si le triangle ABC est rectangle, c'est forcément en C car $[AB]$ est le plus grand côté. On a:

D'une part :	et	D'autre part :
$AB^2 = 16^2$		$AC^2 + BC^2 = 14^2 + 8^2$
$AB^2 = 256$		$AC^2 + BC^2 = 196 + 64$
		$AC^2 + BC^2 = 260$

Conclusion: $AB^2 \neq AC^2 + BC^2$,
donc d'après la contraposée du théorème de Pythagore, le triangle ABC n'est pas rectangle.

2. Le mathématicien Héron d'Alexandrie (1[er] siècle), a trouvé une formule permettant de calculer l'aire d'un triangle : en notant a, b, c les longueurs des trois côtés et p son périmètre, l'aire A du triangle est donnée par la formule :

$$A = \sqrt{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2} - a\right)\left(\frac{p}{2} - b\right)\left(\frac{p}{2} - c\right)}$$

Calculer à l'aide de cette formule l'aire du triangle ABC.
Donner le résultat arrondi au cm^2 près.

Correction

le périmètre p du triangle est :

$$p = 16 + 14 + 8 = 38 \text{ cm}$$

Donc avec la formule de Héron on obtient une aire de :

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2} - a\right)\left(\frac{p}{2} - b\right)\left(\frac{p}{2} - c\right)} \\ &= \sqrt{\frac{38}{2}\left(\frac{38}{2} - 16\right)\left(\frac{38}{2} - 14\right)\left(\frac{38}{2} - 8\right)} \\ &= \sqrt{19\,(19-16)\,(19-14)\,(19-8)} \\ &= \sqrt{19 \times 3 \times 5 \times 11} \\ &= \sqrt{3135} \approx \underline{56 \text{ cm}^2} \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 7 page 3

Avec un projecteur de cinéma, une image sur un film est projetée sur un écran. Sur le film, une image rectangulaire de 70 mm de long et 52,5 mm de large peut être agrandie sur un écran jusqu'à 588 m^2.

1. On appelle format de l'image le rapport : $\dfrac{\text{longueur de l'image}}{\text{largeur de l'image}}$.

Montrer que l'image sur le film est au format $\dfrac{4}{3}$. Justifier.

Correction

On a $\dfrac{L}{l} = \dfrac{70}{52,5} = \dfrac{7 \times 10}{7 \times 7,5} = \dfrac{10}{7,5} = \dfrac{4 \times 2,5}{3 \times 2,5} = \dfrac{4}{3}$.

2. Calculer en mm^2 l'aire de l'image sur le film. Convertir en m^2.

Correction

Une image a une aire de $70 \times 52,5 = 3\,675$ mm^2. Soit 36,75 cm2 ou 0,367 5 dm^2 ou 0,003 675 m^2.

3. Pour obtenir un image de 588 m^2 sur l'écran, la longueur et la largeur de l'image sur le film ont été multipliées par un coefficient. Le format $\dfrac{4}{3}$ de l'image est conservé. Quelles sont les dimensions sur l'écran ? Justifier votre démarche.

Correction

On a $\dfrac{588}{0{,}003\,675} = 160\,000$; ce rapport est le carré du nombre 400 qui est le facteur d'agrandissement de la longueur et de la largeur.

Sur l'écran les dimensions de l'image sont donc :

$400 \times 70 = 28\,000$ mm soit 28 m de long et

$400 \times 52,5 = 21\,000$ mm soit 21 m de large.

Remarque : on a bien $28 \times 21 = 588$.