Math93.com

Aires et périmètres

Sixième

I. Périmètres : rappels

I.1 Notion de périmètre

Définition 1

Le périmètre d'une figure est la longueur de son contour.

I.2 Rectangle et carré

Définition 2 (Un rectangle)

Un rectangle est un quadrilatère ayant 4 angles droits (3 suffisent en fait).

Propriété 1

Si un quadrilatère est un rectangle,
Alors, ses côtés opposés sont de la même mesure.

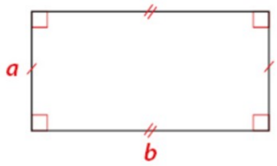
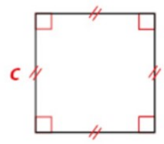
Attention : réciproque fausse (c'est au mieux juste un parallélogramme on le verra)

Définition 3 (Un carré)

Un carré est un rectangle qui en plus 4 côtés de même mesure.

Remarque : un carré est donc un rectangle et aussi un losange (quadrilatère ayant 4 côtés de même mesure).

I.3 Périmètre d'un rectangle et d'un carré

Périmètre d'un rectangle de dimensions a et b	Périmètre d'un carré de côté c
 $P = 2 \times a + 2 \times b$ ou $P = 2 \times (a + b)$	 $P = 4 \times c$

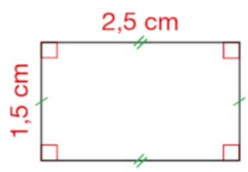
Exemple

Le périmètre P du rectangle représenté ci-contre est :

$P = 2 \times 2{,}5 \text{ cm} + 2 \times 1{,}5 \text{ cm} = 5 \text{ cm} + 3 \text{ cm} = 8 \text{ cm}$

ou $P = 2 \times (2{,}5 \text{ cm} + 1{,}5 \text{ cm}) = 2 \times 4 \text{ cm} = 8 \text{ cm}$

Le périmètre de ce rectangle est 8 cm.



I.4 La longueur d'un cercle

Définition 4 (Le nombre π)

Les mathématiciens on remarqué que le quotient de la longueur d'un cercle par son diamètre donnait toujours le même nombre proche de 3.
Ils nommèrent ce nombre par la lettre grecque π soit p pour périmètre.

$$\boxed{\pi = \frac{\text{périmètre d'un cercle}}{\text{Diamètre de ce cercle}}}$$

Remarque

Une approximation de π est :

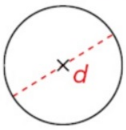
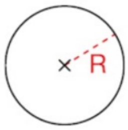
$$\pi \approx 3,14159\cdots$$

En mars 2022, le record de calcul des décimales de pi a été battu avec plus de 100 000 milliards de décimales.
Il y a plus de 4 000 ans, les babyloniens et égyptiens connaissaient déjà 1 décimale de pi.

Propriété 2

Le périmètre P d'un cercle est donc donné par la formule :

$$\boxed{P = \text{Diamètre} \times \pi} \quad \text{ou} \quad \boxed{P = 2 \times \text{Rayon} \times \pi}$$

Longueur d'un cercle de diamètre *d*		Longueur d'un cercle de rayon R	
	L = π × d		L = 2 × π × R

Exemple

Donner la valeur exacte puis les valeurs approchées au centième par défaut et par excès et l'arrondi au centième du périmètre d'un cercle de rayon 3 cm.

- Valeur exacte :

$$\boxed{P = 2 \times 3 \times \pi = 6\pi \text{ cm}}$$

- Arrondi et valeurs approchées :

$$P = 6\pi \approx \underline{18,849}$$

  – Valeurs approchées à 0,01 près :
  On a $18,84$ et $18,85$ qui sont deux valeurs approchées au centième (ou à 0,01 près) possibles.
  La seconde est la plus proche, pour s'en convaincre on peut ajouter des zéros :

$$\underbrace{18,840}_{\text{Valeur approchée par défaut au centième}} < P \approx 18,849 < \underbrace{18,850}_{\text{Valeur approchée par excès au centième}}$$

  – Arrondi au centième :
  Donc l'arrondi au centième du périmètre est :

$$\boxed{P \approx 18,85 \text{ cm}}$$

II. Aire

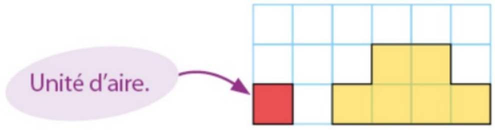
II.1 Aire d'une figure

Définition 5

L'aire d'une figure est la mesure de sa surface intérieure.

Exemple

L'aire de la surface ci-contre est égale à 6 unités.



II.2 Unité d'aire

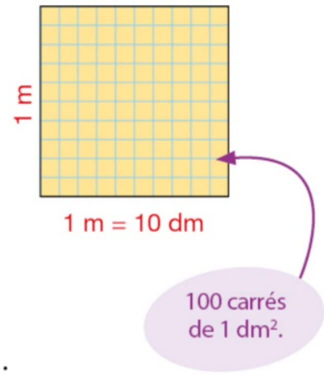
Définition 6

On va définir comme unité un carré de côté 1 cm, ou 1 m par exemple.
L'unité d'aire sera l'aire de ce carré unité :

- 1 cm^2 si le carré unité est carré de côté 1 cm ;
- 1 m^2 si le carré unité est carré de côté 1 m.

- **Autres unités d'aire**

Le décimètre carré (dm²) est l'aire d'un carré de côté 1 dm.
Un carré d'aire 1 m² contient 100 carrés d'aire 1 dm².
Donc : $1 \text{ m}^2 = 100 \text{ dm}^2$



1 km²	1 hm²	1 dam²	1 m²	1 dm²	1 cm²	1 mm²

× 100 × 100 × 100 × 100 × 100 × 100

- **Vocabulaire.**

Pour mesurer la superficie des terrains, on utilise l'**are** (a) et l'**hectare** (ha) :

$$1 \textbf{ a} = 1 \text{ dam}^2 = 100 \text{ m}^2$$

$$1 \textbf{ ha} = 1 \text{ hm}^2 = 10\,000 \text{ m}^2$$

Unités d'aire

Les unités d'aire

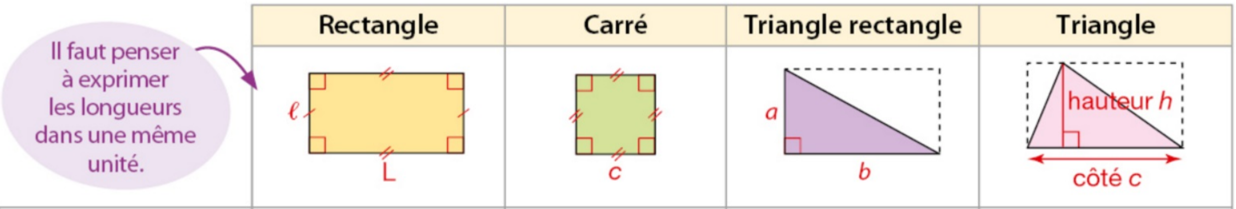
km²	hm²	dam²	m²	dm²	cm²	mm²
	0	0 3	0 0	0 0		

Dans le tableau de conversion des aires, on place 2 chiffres dans chaque unité et on termine toujours à droite de la colonne.

Ex : 300 m² = 3 dam² = 30 000 dm² = 0,03 hm²

II.3 Aire des polygones particuliers

II.3.1 Formulaire

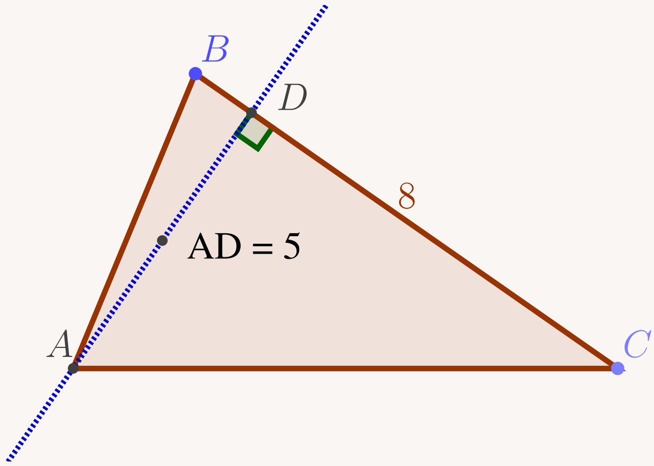


	Rectangle	Carré	Triangle rectangle	Triangle
Aire $\mathcal{A}$	$\mathcal{A} = L \times \ell$	$\mathcal{A} = c \times c$	$\mathcal{A} = (a \times b) : 2$	$\mathcal{A} = (c \times h) : 2$

II.3.2 Exemple de rédaction

Exemple

Soit le triangle ABC ci-dessous. Déterminer son aire (les distances sont en cm).



1. On décrit le triangle (ou le polygone) pour appliquer la formule :
Dans le triangle ABC :

- on considère comme base le côté $[BC]$ (il y en a 3 donc il faut préciser),
- la hauteur issue du sommet A, la droite (AD),
- et le point D, le pied de cette hauteur.

2. On applique la formule avec les lettres d'abord :
L'aire du triangle ABC est alors :

$$\mathbb{A} = \frac{BC \times AD}{2}$$

3. On remplace par les valeurs :

$$\mathbb{A} = \frac{8 \times 5}{2} = 4 \times 5 = \underline{20 \text{ cm}^2}$$

II.4 Aire du disque

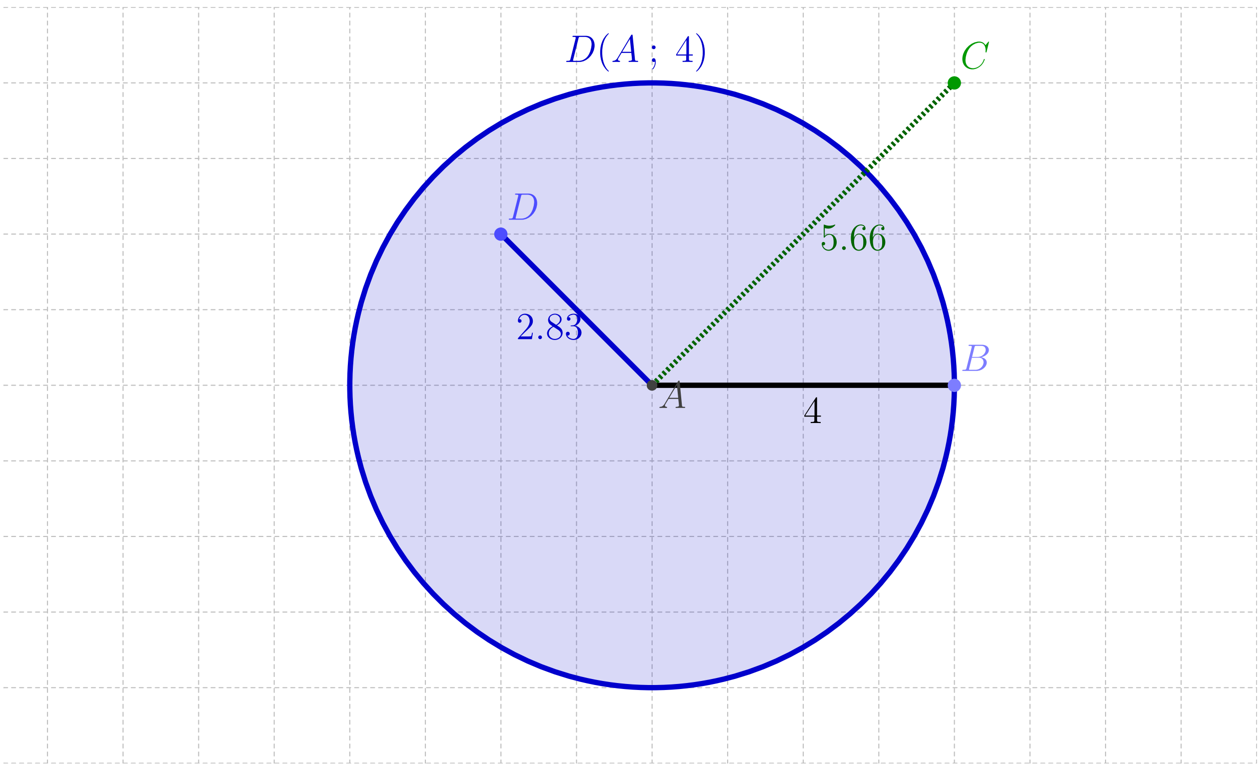
II.4.1 Définition d'un disque

Définition 7 (Un disque)

Soit O un point du plan et R un réel strictement positif.

- Un disque de centre O et de rayon R est l'ensemble des points du plan qui sont situé à une distance inférieure ou égale à R.
- r est le rayon du disque. La frontière du disque est un cercle de centre O et de rayon R.
- Le disque est fermé si la frontière est incluse, et ouvert si elle n'en fait pas partie.
- On peut le noter $D(O\ ;\ R))$:
$$D(O\ ;\ r) = \{M \in P\ ;\ OM \leqslant R\}$$

In English : In geometry, a disk (also spelled disc) is the region in a plane bounded by a circle. A disk is said to be closed if it contains the circle that constitutes its boundary, and open if it does not.



On considère un disque $D(A\ ;\ 4)$ de centre A et de rayon 4 cm. Les points du plan sont donc, soit dans le disque D si leur distance au point A est inférieure ou égale à 4, soit à l'extérieur dans le cas contraire, et sur le cercle sur la distance est égale à 4.

II.4.2 Aire d'un disque

Exemple

Donner la valeur exacte puis les valeurs approchées au dixième par défaut et excès et enfin l'arrondi au dixième de l'aire d'un disque de rayon 3 cm.

- Valeur exacte :

$$\boxed{A = \pi \times R^2 = \pi \times 3^2 = 9\pi \text{ cm}^2}$$

- Arrondi et valeurs approchées :

$$A = 9\pi \approx \underline{28,27}$$

  - Valeurs approchées par défaut et excès au dixième :
    On a $28,2$ et $28,3$ qui sont deux valeurs approchées au dixième possibles. La seconde est la plus proche, pour s'en convaincre on peut ajouter des zéros :

$$\underbrace{28,20}_{\text{Valeur approchée par défaut au dixième}} < A \approx 28,27 < \underbrace{28,30}_{\text{Valeur approchée par excès au dixième}}$$

  - Arrondi au dixième :
    Donc l'arrondi au dixième de l'aire du disque est :

$$\boxed{P \approx 28,3 \text{ cm}^2}$$

Fin du cours