Math93.com

Droites perpendiculaires et parallèles

Sixième

I. Une introduction

La géométrie que nous utilisons est celle du légendaire mathématicien Euclide (vers 300 av. J.-C.) qui est l'auteur du plus célèbre des ouvrages de mathématiques : "***Les Éléments d'Euclide***" .
Euclide y définit la notion de point, droite, segment, et propose 5 axiomes, c'est à dire des propositions que l'on ne peut pas démontrer et qu'il faut admettre afin de pouvoir démontrer toutes les autres propriétés, particulier :

Les 2 premiers postulats d'Euclide

1. Par deux points, il passe une ligne droite et une seule.
2. Un segment de droite peut être prolongé à l'infini dans les deux directions.

Pour en savoir plus : https://www.math93.com/histoire-des-maths/liste-complete/193-euclide.html

II. Point, segment (*line segment*), droite (*line*) et demi-droite (*ray*)

II.1 Vocabulaire, représentation et notation

	Tracé et Notation	Définitions et remarques
Deux **points distincts** (c'est-à-dire qui ne sont pas confondus)	A + B + Deux points A et B	**Attention !** Sur une figure, deux points distincts ne peuvent pas avoir le même nom. le point + A le nom du point
Un **segment**	Le segment [AB] A B	• On trace un segment en reliant deux points à la règle. • **Les points A et B sont les extrémités du segment [AB].**
Une **droite**	A + B + La droite (AB)	• La droite (AB) est le support du segment [AB]. • **Par deux points distincts, il passe une seule droite.**
	La droite (*d*) (*d*)	• **Une droite est une ligne droite illimitée.** (Elle peut être prolongée des deux côtés.) (*d*)
Une **demi-droite**	A B La demi-droite [AB]	• **Le point A est l'origine de la demi-droite [AB].** **Attention !** Un crochet pour l'origine, à gauche ; une parenthèse, à droite, pour le côté illimité.

Remarque

Un segment, une demi-droite ou une droite sont composés d'une infinité de points.

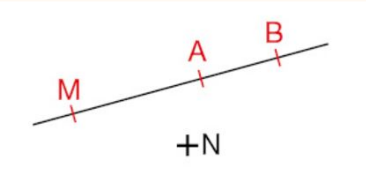
II.2 Alignement et appartenance

Définition 1

On dit que deux points A et B sont alignés si ils appartiennent à une même droite, que l'on peut nommer (d) par exemple.
On utilise le symbole <u>"*appartient*" $\in$</u> ou <u>"*n'appartient pas*" $\notin$</u>. Donc ici :

$$A \in (d) \quad \text{et} \quad B \in (d)$$

Exemple



Sur cette figure, les points A, M et B sont alignés. Le point N n'appartient pas à la droite (AB). On peut donc écrire :

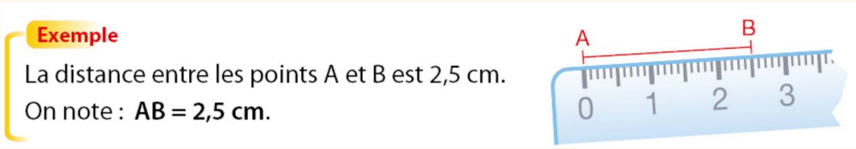
$$M \in (AB) \text{ et } N \notin (AB)$$

II.3 Distance entre deux points

Définition 2

La distance entre deux points A et B est longueur du segment $[AB]$. C'est la plus courte distance entre les points A et B.
Notation : la longueur du segment $[AB]$ se note simplement AB.

Exemple



Attention aux notations, vous pouvez écrire :

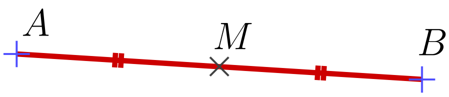
- la longueur du segment $[AB]$ est 2,5 cm
- ou simplement : $AB = 2,5$ cm.

II.4 Milieu du segment [AB]

Définition 3

Le point M est le milieu du segment $[AB]$ si il vérifie ces deux conditions :

1. Le point M appartient au segment $[AB]$;
2. les distances MA et MB sont égales.



Ce que l'on peut écrire en langage mathématique :

$$\begin{cases} M \in [AB] \\ MA = MB \end{cases}$$

III. Droites perpendiculaires et droites sécantes

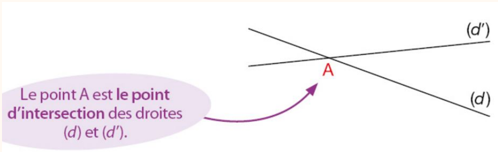
III.1 Droites sécantes (*Secant lines*)

Définition 4

Deux droites sécantes sont des droites qui n'ont qu'un seul point commun.

Exemple

Les droites (d) et (d') sont sécantes en A.
Cela implique que $A \in (d)$ et $A \in (d')$, et que A est le seul point qui appartient aux deux droites.



III.2 Droites perpendiculaires (*Perpendicular lines*)

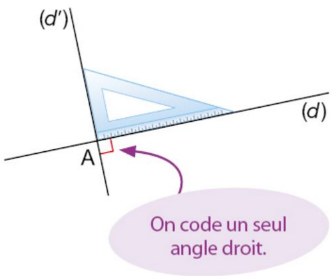
Définition 5

Deux droites sont perpendiculaires si et seulement si elles sont sécantes en formant un angle droit (4 en fait).

Notation : pour écrire que les droites (d) et (d') sont perpendiculaires on utilise le symbole $\perp$.

$$(d) \perp (d')$$

Remarque : perpendiculaires vient du latin per-pendiculum, « fil à plomb »

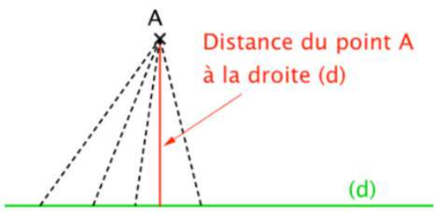


III.3 Distance d'un point à une droite (*Distance from a point to a line*)

Définition 6

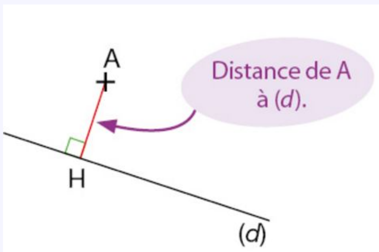
La distance d'un point à une droite est la plus courte distance séparant ce point et un point quelconque de la droite.

Animation : *Lien géogébra.*



Propriété 1

La distance d'un point A à une droite (d) est la distance AH, où H est le pied de la perpendiculaire à la droite (d) issue du point A.

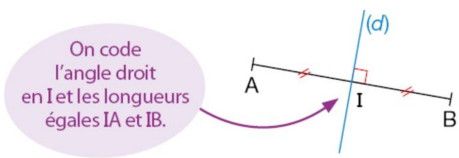


III.4 Droite médiatrice d'un segment (*Perpendicular bisector of a line segment*)

Définition 7

La médiatrice d'un segment est la droite qui :

- est perpendiculaire à ce segment ;
- coupe ce segment en son milieu.



IV. Droites parallèles

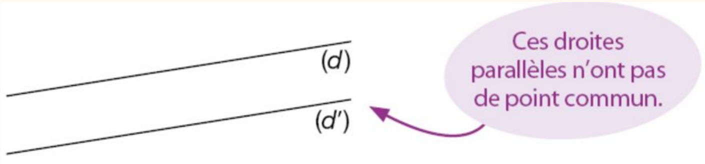
IV.1 Définition : Droites parallèles

Définition 8

Dans le plan, deux droite sont parallèles si elles ne sont pas sécantes.

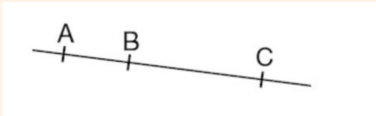
Exemple

Les droites (d) et (d') sont supposées parallèles (car on admet qu'elles ne sont pas sécantes).
On note : $(d)//(d')$ mais on n'a pas de notation (en France) pour la figure, il faut donc le préciser.



Remarque

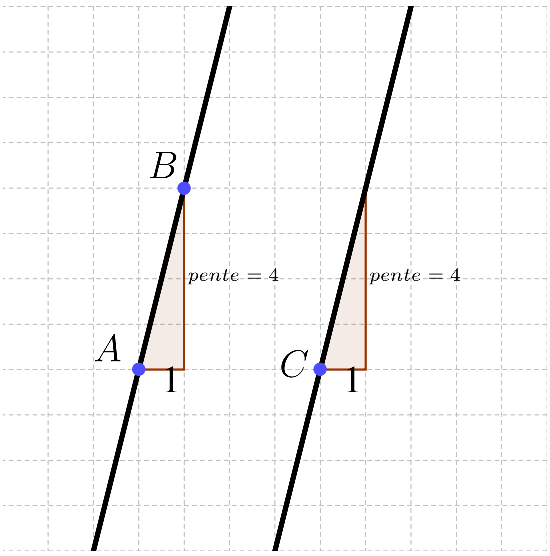
Les points A, B et C sont alignés.
De ce fait les droites (AB) et (AC) sont confondues et même parallèles puisqu'elles ne sont pas sécantes (car elles ont plus de 1 point en commun).



IV.2 La notion de pente (*slope*)

Définition 9

La pente d'une droite (*slope*), est la mesure de l'inclinaison de cette droite. Il nous indique pour chaque unité où la droite se déplace vers la droite, combien d'unités en haut ou en bas la droite se déplace. Les droites avec une pente positive montent de gauche à droite.



Propriété 2 (Application)

1. Deux droites parallèles ont la même pente.
2. On peut facilement construire la parallèle à une droite donnée en utilisant la pente sur un quadrillage.

Lien animation Geogebra

V. Trois théorèmes importants

V.1 Premier théorème

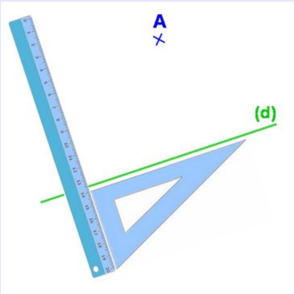
Théorème 1

SI deux droites sont perpendiculaires à une même troisième droite ;
ALORS elles sont parallèles.

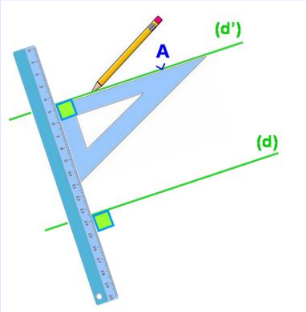
Méthode

On peut grâce à ce théorème construire facilement la parallèle à une droite donnée passant par un point :

1. Pour cela, il faut une règle et une équerre. On place un des bords de l'angle droit de l'équerre sur (d). On place la règle contre l'autre bord de l'angle droit de l'équerre.



2. Sans bouger la règle, on fait glisser l'équerre le long de la règle jusqu'au point A. On trace la droite (d'). La droite (d') passe par le point A.



V.2 Deuxième théorème

Théorème 2

SI deux droites sont parallèles et qu'une 3e droite est perpendiculaire à l'une ;
ALORS elle est perpendiculaire à l'autre.

V.3 Troisième théorème

Théorème 3

SI deux droites sont parallèles et qu'une 3e droite est parallèles à l'une ;
ALORS elle est parallèle à l'autre.

Fin du cours