Math93.com

Nombres Entiers et Décimaux

Sixième

I. Les nombres entiers (*Whole numbers*)

I.1 Une définition ?

Remarque

Attention en anglais, les *natural numbers* sont les nombres entiers sauf 0.

Définition 1

Nous ne pouvons pas donner une définition rigoureuse des nombres entiers en sixième.

- Les 10 chiffres (*digits*).
  Notre système de numération utilise 10 chiffres qui sont :

$$0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,5\,;\,6\,;\,7\,;\,8\,;\,9$$

- Les nombres entiers.
  Une définition possible en 6e est :
  En mathématiques, un entier naturel est un nombre permettant de compter des objets (une carte, deux cartes, trois cartes ...).
  Un tel nombre entier peut s'écrire avec une suite finie de chiffres (sans signe et sans virgule). .

  Les 10 chiffres de notre système permettent d'écrire tous les nombres entiers, de même que les 26 lettres de l'alphabet français de A à Z permettent d'écrire tous les mots français.

- L'ensemble de tous les nombres entiers se note $\mathbb{N}$ et l'on a donc :

$$\mathbb{N} = \{0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,5\,;\,6\,;\,7\,;\,8\,;\,9\,;\,10\,;\,11\,;\,12\cdots\}$$

Mémo : *Le chiffre est au nombre ce que la lettre est au mot*

- "2" est un chiffre et aussi un nombre entier, tout comme "a" est une lettre et un mot (il a faim)
- Le nombre entier 715 est composé des trois chiffres qui sont 7, 1 et 5.

I.2 Les classes de notre système de numération indo-arabe

Notre système de numération (indo-arabe) est dit décimal de position (*decimal (base-10) Hindu-Arabic numeral positional system)*).

- « Décimal » signifie que l'on effectue des groupements par dix.
- « De position » signifie que chaque chiffre a une signification différente selon son rang.

Classe des milliards			Classe des millions			Classe des mille*			Classe des unités		
c	d	u	c	d	u	c	d	u	c	d	u
							2	3	7	1	5

* *mille est invariable*.

Exemple

Dans le nombre entier 23 715 (vingt-trois-mille-sept-cent-quinze) :

- 5 est le chiffre des unités ;
- 1 est le chiffre des dizaines ;
- 7 est le chiffre des centaines ;
- 3 est le chiffre des milliers ;
- 2 est le chiffre des dizaines de milliers ;

On a donc :

$$23\ 715 = \underbrace{2 \times 10\ 000}_{2\ dizaines\ de\ milliers} + \underbrace{3 \times 1\ 000}_{3\ milliers} + \underbrace{7 \times 100}_{7\ centaines} + \underbrace{1 \times 10}_{1\ dizaine} + \underbrace{5}_{5\ unités}$$

Mais la décomposition peut aussi mettre en évidence le nombre de dizaines :

$$23\ 715 = \underbrace{2371 \times 10}_{2371\ dizaines} + 5$$

Et la décomposition peut aussi mettre en évidence le nombre de centaines :

$$23\ 715 = \underbrace{237 \times 100}_{237\ centaines} + 15$$

Et la décomposition peut aussi mettre en évidence le nombre de milliers :

$$23\ 715 = \underbrace{23 \times 1\ 000}_{23\ millierss} + 715$$

Remarque

En France, pour faciliter la lecture d'un nombre, on regroupe les chiffres par classe (donc par groupes de 3) et on utilise un espace. Dans les pays anglo-saxons, on utilise la virgule comme séparateur, il ne faut surtout pas le faire en France.

I.3 Lien avec les unités de mesure

Préfixe	kilo (1 000)	hecto (100)	déca (10)	unité principale
Longueur (symbole)	kilomètre (km) 1 km = 1 000 m	hectomètre (hm) 1 hm = 100 m	décamètre (dam) 1 dam = 10 m	mètre (m)
Masse (symbole)	kilogramme (kg) 1 kg = 1 000 g	hectogramme (hg) 1 hg = 100 g	décagramme (dag) 1 dag = 10 g	gramme (g)

II. Les nombres décimaux (*Decimal numbers*)

II.1 Fraction décimale

Définition 2

Une <u>fraction décimale</u> (*Decimal fraction*) est une fraction, c'est à dire le quotient de 2 entiers, dont le dénominateur est 1, 10, 100, 1000, ...

$$\frac{\blacksquare \leftarrow \text{Numérateur}}{\blacktriangle \leftarrow \text{Dénominateur : il dénomme la fraction}}$$

Exemple

- $A = \dfrac{3}{10} = 3 \div 10 = 0,3$;
- $B = \dfrac{17}{100} = 0,17$;
- $C = \dfrac{1}{1000} = 0,001$;
- $D = \dfrac{5}{1} = 5$;

II.2 Une définition d'un nombre décimal

Définition 3

- Un <u>nombre décimal</u> (*Decimal number*) est un nombre qui peut s'écrire sous forme de fraction décimale.
- L'ensemble de tous les nombres décimaux se note $\mathbb{D}$.

Exemple

$$E = 5,24 = 5 + 0,24 = 5 + \frac{24}{100} = \underbrace{\boxed{\frac{524}{100}}}_{\text{Fraction Décimale}}$$

- Avec cette décomposition on peut aussi déterminer les parties entières et décimales :

$$5 + \frac{24}{100} = \underset{\text{partie entière}}{\underset{\uparrow}{5}} + \underset{\text{partie décimale}}{\underset{\uparrow}{0,24}}$$

- Et proposer des écritures du nombre décimal en lettres :
  - A s'écrit : « cinq et vingt-quatre centièmes ».
  - A s'écrit aussi : « cinq-cent-vingt-quatre centièmes ».

II.3 Entiers et décimaux

II.3.1 Propriété

Propriété 1

Tous les nombres entiers sont aussi des décimaux (mais la réciproque est fausse).

Preuve

Soit a un nombre entier naturel, ce que l'on peut écrire $a \in \mathbb{N}$. On a alors :

$$a = \frac{a}{1} \in \mathbb{D}$$

En effet $\frac{a}{1}$ est bien une fraction décimale.

II.3.2 Des nombres qui ne sont pas décimaux ?

Propriété 2

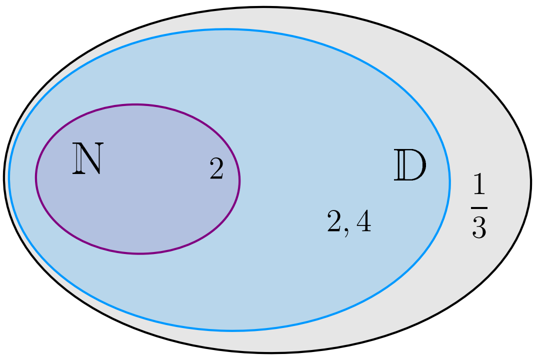
Il existe des nombres qui ne sont pas décimaux car on ne peut pas les écrire sous forme de fraction décimale. Ces nombres ont un nombre infini de chiffres non nul dans leur partie décimale.

Exemple

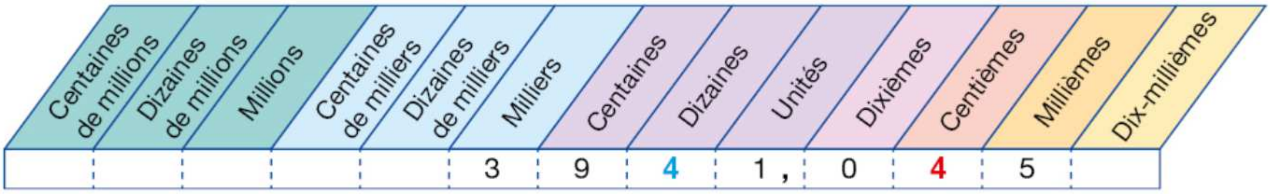
On a par exemple :

$$\frac{1}{3} \notin \mathbb{D} \text{ car } \frac{1}{3} \approx 0,3333333...$$

II.3.3 Diagrammes de Venn



II.4 Rang d'un chiffre



Exemples

3 9 **4** 1 , 0 **4** 5

$\uparrow$ chiffre des dizaines — $\uparrow$ chiffre des centièmes

$$3\,941{,}045 = \left(\underset{\uparrow}{394\,104} \times \frac{1}{100}\right) + \frac{5}{1\,000}$$

nombre de centièmes

II.5 Lien avec les unités de mesure

1 **kilo**mètre = **mille** mètres — 1 **hecto**mètre = **cent** mètres — 1 **déca**mètre = **dix** mètres

1 **déci**mètre = 1 **dixième** de m — 1 **centi**mètre = 1 **centième** de m — 1 **milli**mètre = 1 **millième** de m

Exemple

$$45 \text{ cm} = \frac{45}{100} \text{ m} = 0{,}45 \text{ m}$$

Remarque. De la même manière, on peut faire le lien avec les masses et les contenances.

III. Comparaison (*comparing numbers*)

Règle Pour comparer deux nombres décimaux :

- on compare leurs parties entières ;
- si elles sont les mêmes, on compare :
  – leurs chiffres des dixièmes,
  – s'ils sont les mêmes, leurs chiffres des centièmes, et ainsi de suite.

Exemples

$4{,}27 < 7{,}1$	En effet $4 < 7$
$4{,}27 < 4{,}5$	En effet $2 < 5$
$4{,}27 < 4{,}29$	En effet $7 < 9$
$4{,}270 < 4{,}273$	En effet $0 < 3$

Exemple

Par exemple on a : Et si :

$$A = 12 \times 100 + 15 \;\text{ et }\; B = 1\,220$$

Puisque $A = 1\,200 + 15 = 1\,215$ on a

$$A = 1\,215 < B = 1\,220$$

IV. Encadrer ou intercaler des nombres

Définition 4

- Donner un encadrement d'un nombre revient à trouver deux autres nombres : l'un inférieur au nombre de départ et l'autre supérieur.
- La soustraction de ces deux nombres donne l'amplitude de l'encadrement.
- Intercaler un nombre entre deux autres revient au contraire à trouver un nombre compris entre deux autres nombres donnés.

Exemple

10 < 17,6 < 20 est un **encadrement** d'amplitude 10 du nombre 17,6.

Encadrement de 3,538	Amplitude	Valeurs approchées de 3,538	
3 < 3,538 < 4	1	3 et 4	valeurs approchées à l'**unité** près.
3,5 < 3,538 < 3,6	0,1	3,5 et 3,6	valeurs approchées au **dixième** près
3,53 < 3,538 < 3,54	0,01	3,53 et 3,54	valeurs approchées au **centième** près.

Exemple

Entre les nombres 5,1 et 5,2 on peut par exemple intercaler 5,11 ou 5,12 ou 5,1234 car :

$$\boxed{5,1 < 5,11 < 5,2} \text{ et } \boxed{5,1 < 5,12 < 5,2} \text{ et } \boxed{5,1 < 5,1234 < 5,2}$$

Fin du cours