Math93.com

Proportionnalité

Sixième

Français/English

- proportionnalité / Proportionality
- coefficient de proportionnalité / coefficient of proportionality

In mathematics, two sequences of numbers are **proportional** or **directly proportional** if their corresponding elements have a **constant ratio**, which is called the **coefficient of proportionality** or **proportionality constant**.

I. Tableau de proportionnalité

I.1 Définition

Définition 1

Un tableau de nombres est dit de **proportionnalité** lorsqu'on obtient chaque nombre d'une ligne en multipliant le nombre correspondant de l'autre ligne par un même nombre appelé **coefficient de proportionnalité**.

I.2 Exemples

Exemple **Tableau de proportionnalité**

Nombre de macarons	6	10	15
Prix (en €)	8,4	14	21

×1,4

$\frac{8,4}{6} = 1,4$; $\frac{14}{10} = 1,4$; $\frac{21}{15} = 1,4$

Le coefficient de proportionnalité est **1,4**.
Cela signifie ici que 1 macaron coûte 1,40 €.

Tableau de non proportionnalité

Durée de location (en h)	2	5
Prix (en €)	17	38

$\frac{17}{2} = 8,5$; $\frac{38}{5} = 7,6$ et $8,5 \neq 7,6$

Ce n'est donc pas un tableau de proportionnalité.

I.3 Astuce pour calculer le coefficient de proportionnalité

Méthode

Il suffit de diviser la valeur "d'arrivée" de la flèche, par la valeur de "départ" de la flèche.
Par exemple :

Nombre de personnes	5	14
Jus de mangue	100 cl	 cl
Jus de poire	50 cl	 cl
Jus de citron vert	12 cl	 cl
Sirop de cassis	12 cl	 cl

$\div 2$ ou $\times \frac{1}{2}$

$\times 20$

$\times \frac{12}{5} = 2,4$

$\times \frac{14}{5} = 2,8$

I.4 Additivité de la proportionnalité

Exemple

Le débit d'un robinet est régulier, la quantité d'eau qui s'écoule est proportionnelle à la durée d'écoulement.

- En 5 min, il s'écoule 8 L ;
- En 12,5 min, il s'écoule 2,5 fois plus soit : $2,5 \times 8 = 20$ L ;
- Or 5 min + 12,5 min = 17,5 min
  Donc en 17,5 min il s'écoule 20 + 8 = 28 L.

+

Quantité d'eau (en L)	8	20	28
Durée (en min)	5	12,5	17,5

+

II. Passage à l'unité

Exemple

Avec 5 kg de peinture, on peut recouvrir 8 m² de façade.

- Pour calculer la superficie de façade recouverte avec 9 kg de peinture, on peut procéder ainsi :
  – avec 1 kg de peinture on peut recouvrir 8 m² : **5** c'est-à-dire **1,6** m² ;
  – avec 9 kg de peinture on peut recouvrir $9 \times$ **1,6** m² c'est-à-dire 14,4 m².
  On peut aussi utiliser ce tableau de proportionnalité.

$: 5$ $\times 9$

Masse (en kg)	5	1	9
Superficie (en m²)	8	**1,6**	14,4

- Pour calculer la masse de peinture nécessaire pour 30 m² de façade, on peut procéder ainsi :
  – pour 1 m², il faut 5 kg : **8** c'est-à-dire **0,625** kg de peinture ;
  – pour 30 m², il faut $30 \times$ **0,625** kg c'est-à-dire 18,75 kg de peinture.
  On peut aussi utiliser ce tableau de proportionnalité.

Masse (en kg)	5	**0,625**	18,75
Superficie (en m²)	8	1	30

$: 8$ $\times 30$

III. Quatrième proportionnelle

III.1 Définition

Définition 2

La quatrième proportionnelle est le quatrième nombre à mettre dans un tableau de proportionnalité à 4 valeurs dont 3 cases sont déjà remplies.
Ce quatrième nombre s'obtient en faisant le produit des nombres situés sur une même diagonale et en divisant par le troisième nombre.
Cette technique est parfois appelée « **règle de trois** » ou « **produit en croix** ».

Méthode

$$\frac{\text{Produit de la diagonale}}{\text{nombre qui reste}}$$

III.2 Exemples

Exemple Le prix (en euros) de cerises est proportionnel à leur masse (en kg). Voici différentes méthodes pour calculer x.

Masse (en kg)	4	5
Prix (en €)	11,20	x

• Coefficient de proportionnalité

4	5
11,20	x

$\times 2{,}8$

$x = 5 \times 2{,}8 = 14$

• Multiplication d'une quantité

$\times 1{,}25$

4	5
11,20	x

$x = 11{,}20 \times 1{,}25 = 14$

• Passage à l'unité et addition de quantité

$+$

4	1	5
11,20	2,80	x

$x = 11{,}20 + 2{,}80 = 14$

Conclusion : 5 kg de cerises coûtent 14 €.

Méthode

Et en utilisant directement le « **produit en croix** » :

4 kg	5 kg
11, 20€	?

$$\boxed{x = \frac{5 \times 11,20}{4} = 14€}$$

IV. Pourcentages

Définition 3 (Prendre et calculer)

1. Prendre t % d'un nombre c'est le multiplier $\frac{t}{100}$.
2. Calculer un pourcentage revient à calculer une quatrième proportionnelle par rapport à 100.

Exemple

- Prendre 72% de 125 g c'est prendre :

$$\frac{72}{100} \times 125\text{g} = 90\text{g}$$

- Si 7 élèves sur 28 sont gauchers cela représente en pourcentage :

$$\frac{7}{28} = 0,25 = \frac{25}{100} = 25\%$$

7	?
28	100

soit $? = \frac{7 \times 100}{28} = 25$

V. Applications

V.1 Échelles

Définition 4

L'échelle d'un plan est le coefficient de proportionnalité entre les distances sur le plan et les distances en réelle, exprimées dans la même unité.

$$k = \frac{\text{distance sur le plan}}{\text{distance réelle}}$$

C'est souvent une fraction de numérateur 1.

Exemple

- Sur une carte à l'échelle $\frac{1}{10\,000}$,
1 cm représente 10 000 cm, c'est-à-dire 100 m dans la réalité.
- 4,2 cm sur la carte représentent dans la réalité 4,2 × 100 m soit 420 m.

$\times 100$

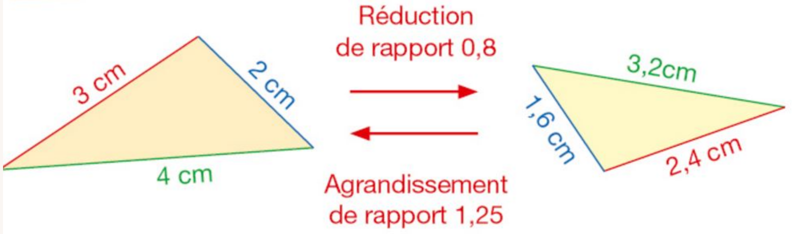
Distance sur la carte (en cm)	1	4,2
Distance réelle (en m)	100	420

V.2 Agrandissements et réductions

Définition 5

- Pour réduire une figure, on multiplie toutes les longueur pour un nombre compris entre 0 et 1, ou on les divise par un nombre plus grand que 1.
- Pour agrandir une figure, on multiplie toutes les longueur pour un nombre plus grand que 1.
- Donc les dimensions de la figure obtenue sont proportionnelle à celles de la figure de départ.

Exemple



	Longueurs en cm		
Figure orange	4	3	2
Figure jaune	3,2	2,4	1,6

$\times$ **0,8**

V.3 Vitesses constantes

Exemple

Un randonneur qui marche à vitesse constante parcourt chaque heure 4 km.
La **distance** parcourue par ce randonneur est **proportionnelle** à la **durée** de sa marche.
Ainsi, en 3 h, ce randonneur parcourt 3×4 km, c'est-à-dire 12 km.
Ce tableau de proportionnalité résume cette situation :

Durée (en h)	1	3
Distance (en km)	4	12

$\times$ **4**

Fin du cours