Math93.com

Racine Carrée (square root)

Seconde/Troisième

I. Définition

Définition 1 (Racine carrée)

La racine carrée de a est le nombre positif qui, élevé au carré, donne a. On la note $\sqrt{a}$.

Exemples.

$$\begin{array}{|rclll|rclll|}
\sqrt{0} & = & 0 & \text{car} & 0^2=0 & \sqrt{49} & = & 7 & \text{car} & 7^2=49 \\
\sqrt{1} & = & 1 & \text{car} & 1^2=1 & \sqrt{64} & = & 8 & \text{car} & 8^2=64 \\
\sqrt{4} & = & 2 & \text{car} & 2^2=4 & \sqrt{81} & = & 9 & \text{car} & 9^2=81 \\
\sqrt{9} & = & 3 & \text{car} & 3^2=9 & \sqrt{100} & = & 10 & \text{car} & 10^2=100 \\
\sqrt{16} & = & 4 & \text{car} & 4^2=16 & \sqrt{121} & = & 11 & \text{car} & 11^2=121 \\
\sqrt{25} & = & 5 & \text{car} & 5^2=25 & \sqrt{144} & = & 12 & \text{car} & 12^2=144 \\
\sqrt{36} & = & 6 & \text{car} & 6^2=36 & \sqrt{169} & = & 13 & \text{car} & 13^2=169
\end{array}$$

Approximations au millième à connaitre

$$\boxed{\sqrt{2}\approx 1,414}$$

$$\boxed{\sqrt{3}\approx 1,732}$$

II. Propriétés

II.1 Propriétés liées à la définition

Proposition 1

1. Pour tout réel positif a on a : $\boxed{\sqrt{a}\geqslant 0}$;
2. Pour tout réel positif a on a : $\boxed{\left(\sqrt{a}\right)^2=a}$;
3. Pour tout réel x on a :

$$\boxed{\sqrt{x^2}=|x|=\text{valeur absolue de } x}$$

II.2 Produit

Proposition 2 (Racine carrée d'un produit)

$$\forall a\in\mathbb{R}_+, \forall b\in\mathbb{R}_+ \quad \boxed{\sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}}$$

Exemples

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{32} \\ &= \sqrt{16\times 2} \\ &= \sqrt{16}\times\sqrt{2} \\ A &= \boxed{4\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \sqrt{150} \\ &= \sqrt{25\times 6} \\ &= \sqrt{25}\times\sqrt{6} \\ B &= \boxed{5\sqrt{6}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= 3\sqrt{8}-\sqrt{200} \\ &= 3\sqrt{4\times 2}-\sqrt{100\times 2} \\ &= 3\times 2\times\sqrt{2}-10\times\sqrt{2} \\ C &= \boxed{-4\sqrt{2}} \end{aligned}$$

II.3 Quotient

Proposition 3 (Racine carrée d'un quotient)

$$\forall a \in \mathbb{R}_+, \forall b \in \mathbb{R}_+^* \quad \boxed{\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}}$$

Exemples

$$\begin{aligned} D &= \sqrt{\frac{16}{25}} \\ &= \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} \\ D &= \boxed{\frac{4}{5}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= 2\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} \\ &= 2\sqrt{\frac{20}{5}} \\ &= 2\sqrt{4} \\ E &= \boxed{4} \end{aligned}$$

II.4 Et l'addition ?

Il n'y a pas de règle pour l'addition. On a par exemple :

$$\begin{cases} \sqrt{1} + \sqrt{1} = 1 + 1 = 2 \\ \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \end{cases} \qquad \text{Or } \sqrt{2} \neq 2$$

III. Suppression des radicaux au dénominateur (quantité conjuguée)

Pour supprimer les radicaux au dénominateur d'une expression fractionnaire, on utilise, soit la propriété 1, soit l'expression conjuguée de $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)$ qui est $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)$. Rappelons l'identité remarquable $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

Proposition 4

- **Propriété 4a** : $\forall b \in \mathbb{R}_+^*$ $\boxed{\frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{1 \times \sqrt{b}}{\sqrt{b} \times \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b}}{b}}$
- **Propriété 4b** :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+, \forall b \in \mathbb{R}_+^* \quad \boxed{\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{1 \times \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right) \times \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}}$$

$$\begin{aligned} E &= \frac{4}{\sqrt{5}} \\ E &= \frac{4 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} \end{aligned}$$

$$\boxed{E = \frac{4\sqrt{5}}{5}}$$

$$\begin{aligned} F &= \frac{3}{\sqrt{5} - 2} \\ F &= \frac{3 \times \left(\sqrt{5} + 2\right)}{\left(\sqrt{5} - 2\right) \times \left(\sqrt{5} + 2\right)} \\ F &= \frac{3 \times \left(\sqrt{5} + 2\right)}{5 - 4} \end{aligned}$$

$$\boxed{F = 3 \times \left(\sqrt{5} + 2\right)}$$

$$\begin{aligned} G &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} \\ G &= \frac{\sqrt{3} \times \left(\sqrt{3} - \sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{3} + \sqrt{5}\right) \times \left(\sqrt{3} - \sqrt{5}\right)} \\ G &= \frac{3 - \sqrt{15}}{3 - 5} = \frac{3 - \sqrt{15}}{-2} \end{aligned}$$

$$\boxed{G = \frac{-3 + \sqrt{15}}{2}}$$

Remarque

In English, it is also termed the "conjugate." The conjugate of $a + b$ is $a - b$.