Math93.com

Ensembles de nombres

Troisième

---

1 Les ensembles de nombres

1.1 Les entiers

1.1.1 Définitions

Définition 1 (Les entiers naturels)

Un nombre **entier naturel** est un nombre (positif) qui peut s'écrire sans virgule.
L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3 \cdots\}$$

Définition 2 (Les entiers relatifs)

Un **entier relatif** se présente comme un entier naturel muni d'un signe positif ou négatif qui indique sa position par rapport à zéro sur un axe orienté.
L'entier zéro lui-même est donc le seul nombre à la fois positif et négatif
L'ensemble des entiers relatifs est noté $\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} = \{\cdots - 3\ ;\ -2\ ;\ -1\ ;\ 0\ ;\ +1\ ;\ +2\ ;\ +3 \cdots\}$$

Remarque : On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

1.1.2 Histoire

Consultez la page : www.math93/.../les-symboles

- **Origine du symbole $\mathbb{N}$, pour les entiers naturels (de *naturale* en italien)**
  Le mathématicien italien PEANO Giuseppe (1858-1932) définit l'ensemble des entiers naturels non nuls par des axiomes qui portent aujourd'hui son nom et le note N (Il deviendra ensuite IN pour désigner l'ensemble des nombres naturels). [HaSu] p276.
- **L'expression nombre naturel**
  Cette expression apparaît vers 1675, à l'époque où les nombres négatifs sont enfin acceptés.
- $\mathbb{Z}$ **: Origine du symbole $\mathbb{Z}$, Ensemble des nombres relatifs**.
  Cette notation viendrait en fait du groupe BOURBAKI dans Algèbre, Chapitre 1. (1969)
  La lettre viendrait de *Zahl* (nombre) et *zahlen* (compter) de l'allemand.

1.2 Les décimaux

1.2.1 Définitions

Définition 3 (Les décimaux)

Un **nombre décimal** est un nombre qui peut s'écrire sous forme de fraction décimale, c'est à dire une fraction dont le dénominateur est de la forme 10^n avec n entier naturel.
L'ensemble des entiers décimaux est noté $\mathbb{D}$.

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{a}{10^n}, \quad a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Exemples

$$2,5 = \frac{25}{10^1} \in \mathbb{D} \ ; \ \frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$$

1.2.2 Histoire

La notation $\mathbb{D}$ est française et vient du groupe BOURBAKI en 1970

1.3 Les rationnels

1.3.1 Définitions

Définition 4 (Les rationnels)

Un **nombre rationnel** est un nombre qui peut s'écrire sous forme de fraction, c'est à dire comme le quotient de deux entiers relatifs. L'ensemble des rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}, \quad a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

Exemples

$$2,5 = \frac{25}{10} \in \mathbb{Q} \ ; \ \frac{1}{3} \in \mathbb{Q} \ ; \ \sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \ ; \ \pi \notin \mathbb{Q}$$

1.3.2 Histoire

Consultez la page : www.math93/.../les-symboles

- $\mathbb{Q}$: **Origine du symbole $\mathbb{Q}$, ensemble des nombres rationnels**.
  Le mathématicien italien PEANO Giuseppe (1858-1932) aurait utilisé la lettre $\mathbb{Q}$, première lettre de quotiente mais, selon plusieurs sources, pas pour désigner l'ensemble des rationnels. Cette notation viendrait en fait du groupe BOURBAKI dans Algèbre, Chapitre 1. (1969)
- **Le mot rationnel**
  Le mot **rationnel** apparaît en mathématiques vers 1550 (en même temps que le terme irrationnel). Un nombre irrationnel est aussi appelé à l'époque nombre sourd. Il semblerait que cela vienne d'une mauvaise traduction des mots rationnel et irrationnel en arabe à l'époque du célèbre mathématicien perse KHWARIZMI Mohammed Ibn musa AL (khiva 788 - Bagdad 850).

1.4 Les réels

1.4.1 Définitions

Donner une définition rigoureuse des nombres réels est chose difficile en troisième. Disons simplement que l'ensemble de tous les nombres connus en classe de troisième est appelé ensemble des réels.

Définition 5 (Les réels)

Un réel est un nombre qui peut être représenté par une *partie entière* et une *liste finie ou infinie de décimales*. Cette définition s'applique donc aux nombres rationnels, dont les décimales se répètent de façon périodique à partir d'un certain rang, mais aussi à d'autres nombres dits irrationnels, tels $\sqrt{2}$, π.
L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$ et l'on a $\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}}$.

1.4.2 Histoire

Les origines de l'utilisation de la lettre R puis $\mathbb{R}$ pour désigner l'ensemble des réels sont multiples. Contrairement à ce que l'on lit souvent, CAJORI affirme que DEDEKIND Julius Wilhelm Richard (1831-1916) utilise R pour les rationnels et le R gothique, $\mathfrak{R}$, pour les réels dans *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (1872).

1.4.3 Les irrationnels

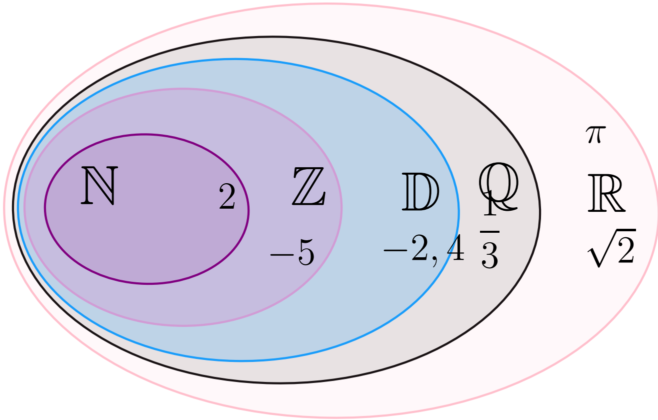
Définition 6 (Les irrationnels)

Un **nombre irrationnel** est un nombre réel qui n'est pas rationnel.

- Le nombre $\sqrt{2}$ est un irrationnel, il n'appartient pas à $\mathbb{Q}$ ce que l'on note : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
  Contrairement à une idée reçue, rien n'indique avec certitude que la découverte de l'incommensurabilité provienne de l'étude de la diagonale et de l'un des côtés d'un carré. La découverte de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ est parfois attribuée au mathématicien Hippase de Métaponte pour ses travaux sur la section d'extrême et de moyenne raison, maintenant appelée nombre d'or. On admet généralement qu'elle est l' ?uvre d'un Pythagoricien durant la première moitié du ve siècle av. J.-C.5. Cette découverte ouvrit probablement une crise profonde chez les mathématiciens et les philosophes grecs. Une légende, plusieurs fois rapportée, indique qu'un pythagoricien, parfois nommé Hippase, périt noyé pour avoir révélé aux profanes l'incommensurabilité. Cette légende indiquerait que la découverte est bien pythagoricienne et qu'elle faisait l'objet d'un tabou.
  La première démonstration date d'avant -410. Le livre X des Éléments d'Euclide est consacré à une classification des grandeurs irrationnelles.
- Le nombre π est un irrationnel, il n'appartient pas à $\mathbb{Q}$ ce que l'on note : $\pi \notin \mathbb{Q}$.
  Le mathématicien Jean-Henri Lambert (26 août 1728 à Mulhouse ? 25 septembre 1777 à Berlin) démontra en 1761 que π ne pouvait être rationnel.

1.5 Diagrammes de Venn

1.5.1 Les ensembles de nombres



1.5.2 Histoire

C'est le mathématicien suisse *Leonhard Euler* (Bâle 1707 - Saint-Pétersbourg 1783) qui eut le premier l'idée de représenter géométriquement les attributs (ou propriétés) sous forme de cercles.
Un siècle plus tard, John Venn (1834-1923) reprend les idées d'Euler en y apportant quelques modifications.

1.6 Compléments

- **Privé de zéro**.
  L'ensemble des entiers relatifs non nul se note $\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ ou plus simplement $\mathbb{Z}^*$. Cette notation est valable pour tous les autres ensembles. Par exemple, l'ensemble des réels non nuls se note $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ou plus simplement $\mathbb{R}^*$.
- **Positifs ou négatifs**.
  Pour indiquer que l'on considère les termes positifs (respectivement négatifs) d'un ensemble on place un signe + (respectivement -) en indice. Par exemple l'ensemble des réels positifs ou nul se note $\mathbb{R}_+$. On peut combiner les deux notations et donc l'ensemble des réels strictement négatifs se note $\mathbb{R}^*_-$