DS Bilan de Mathématiques
Correction

Exercice 1. (5 points)

1.	Quelle est l'expression développée de $(3x+5)^2$?			$9x^2+30x+25$
2.	Quelle est l'expression factorisée de $16x^2-49$?		$(4x+7)(4x-7)$	
3.	Quelle est la valeur exacte de $\dfrac{\sqrt{48}}{2}$?			$2\sqrt{3}$
4.	$A(x)=2x^2-3x+1$, si on remplace x par -1 :	6		
5.	L'écriture scientifique de 65 100 000 est	$6,51\times10^7$		

Exercice 2. (9 points)

1. $A=\dfrac{\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{5}}{\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{7}}$. On obtient $\boxed{A=\dfrac{77}{10}}$.
2. Soit $B=2\sqrt{112}-3\sqrt{28}+5\sqrt{63}$. On obtient $\boxed{B=17\sqrt{7}}$.
3. $C=\dfrac{2,1\times10^{-5}\times6\times10^3}{6,3\times(10^2)^{-2}\times5}=\dfrac{2,1\times2\times3}{3\times2,1\times5}\times\dfrac{10^{-5+3}}{10^{-4}}=\dfrac{2}{5}\times10^{-2+4}$. Soit $\boxed{C=0,4\times10^2=40}$.
4. Soit $D=(-2x+1)^2-(3x+4)^2$.
   - **a.** $\boxed{D(x)=-5x^2-28x-15}$.
   - **b.** $\boxed{D(x)=(-5x-3)(x+5)}$.
   - **c.** $\boxed{D\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{-121}{4}}$.

Exercice 3. (4 points)

1. **Les nombres 555 et 240 sont-ils premiers entre eux ? Justifier.**
   555 et 440 sont divisibles par 5, donc leur PGCD est supérieur ou égal à 5 et ils ne peuvent être premiers entre eux.
2. **Calculer le PGCD de 555 et 240 par la méthode de votre choix en détaillant les étapes.**
   En utilisant l'algorithme d'Euclide, par divisions euclidiennes successives on obtient :
   $$\begin{array}{rcrcr} 555 & = & 2\times240 & + & 75\\ 240 & = & 3\times75 & + & 15\\ 75 & = & 5\times15 & + & 0 \end{array}$$
   Le dernier reste non nul est 15 donc $\boxed{PGCD(555;240)=15}$.
3. **Écrire la fraction $\dfrac{240}{555}$ sous la forme la plus simple possible. Expliquer la démarche.**

   Par théorème on sait que, lorsque l'on simplifie une fraction par le PGCD du numérateur et du numérateur, on obtient une fraction irréductible donc :
   $$\boxed{\frac{240}{555}=\frac{240\div15}{555\div15}=\frac{16}{37}}$$

Exercice 4. (4 points)

Un chocolatier a fabriqué 186 pralines et 155 chocolats. Les colis sont constitués ainsi :
- le nombre de pralines est le même dans chaque colis ;
- le nombre de chocolats est le même dans chaque colis ;
- tous les chocolats et toutes les pralines sont utilisés.

1. **Quel nombre maximal de colis pourra-t-il réaliser ?**
   Le nombre de colis cherché est un diviseur commun de 186 et de 155, or on cherche le plus grand donc c'est le PGCD de 186 et de 155.

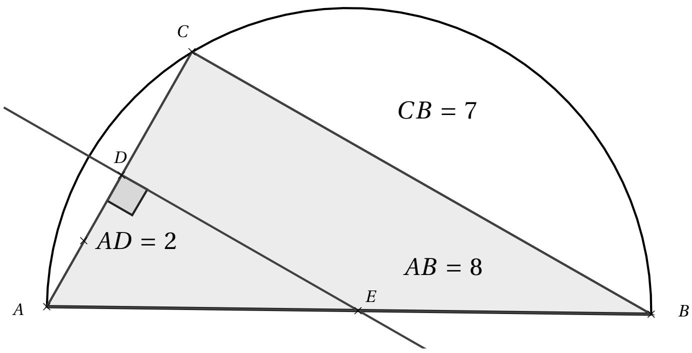
   En utilisant l'algorithme d'Euclide, par divisions euclidiennes successives on obtient :

   $$\begin{array}{rcrcr} 186 & = & 1 \times 155 & + & 31 \\ 155 & = & 5 \times 31 & + & 0 \end{array}$$

   Le dernier reste non nul est 31 donc $\boxed{PGCD(186;155) = 31}$.

2. **Combien y aura-t-il de chocolats et de pralines dans chaque colis ?**
   Il y aura donc : $\boxed{\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{186}{31} & = & 6 \text{ pralines.} \\ \dfrac{155}{31} & = & 5 \text{ chocolats.} \end{array}\right.}$

Exercice 5. (9 points)



1. Reproduire cette figure en vraie grandeur.
2. **Prouver que le triangle ABC est rectangle.**
   Le point C appartient au cercle de diamètre [AB], en étant distinct de A et de B, donc le triangle ABC est rectangle en C.
3. **En déduire que les droite (ED) et (BC) sont parallèles.**
   Les droites (BC) et (DE) sont perpendiculaires à une même troisième droite (AC), elles sont donc parallèles entre elles.
4. **Calculer AE puis EB**.
   Pour calculer AE, on a envie d'appliquer le théorème de Thalès dans ABC. Il nous manque cependant une longueur. On va donc préalablement calculer AC à l'aide du théorème de Pythagore dans ABC rectangle en C.

   $$\mathrm{AC}^2 = \mathrm{AB}^2 - \mathrm{CB}^2$$

   $$\boxed{\mathrm{AC} = \sqrt{8^2 - 7^2} = \sqrt{15} \text{ cm}}$$

   On peut donc maintenant chercher à calculer AE.

– **Données** :
Les points A, D, C et A, E, B sont alignés sur deux sécantes en A.
Les droites (DE) et (CB) sont parallèles.
– **Les rapports** :
Donc d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB} = \frac{DE}{CB}$$

En remplaçant par les valeurs :

$$\frac{2}{\sqrt{15}} = \frac{AE}{8} = \frac{DE}{7} \qquad (1)$$

– **Par produit en croix** : $\boxed{AE = \frac{16}{\sqrt{15}} \approx 4,13 \text{ cm}}$.

Puis EB = AB - AE = 8 - $\frac{16}{\sqrt{15}}$ soit $\boxed{EB \approx 3,87 \text{ cm}}$

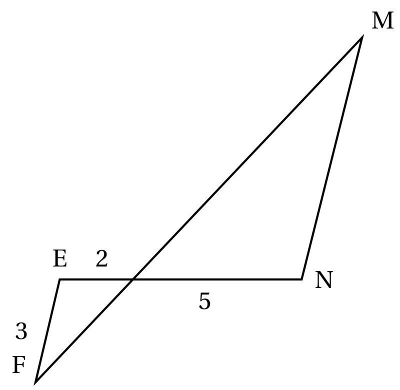
5. **Calculer l'aire du triangle ADE**.

– L'égalité (1) obtenue avec le théorème de Thalès dans la question 4°) permet de calculer DE. On obtient : $\boxed{DE = \frac{14}{\sqrt{15}} \approx 3,61 \text{ cm}}$.
– Le triangle ADE est rectangle en D, son aire est donc donnée par la formule :

$$\boxed{\mathscr{A} = \text{Aire}(ADE) = \frac{AD \times DE}{2} = \frac{2 \times DE}{2} = DE = \frac{14}{\sqrt{15}} \approx 3,61 \text{ cm}^2}$$

Exercice 6. (2 points)

On considère la figure ci-contre où les droites (EF) et (MN) sont parallèles, les droites (EN) et (FM) sont sécantes en P. **Déterminer la longueur MN**.



– **Données** :
Les points E, P, N et F, P, M sont alignés sur deux sécantes en P.
Les droites (EF) et (MN) sont parallèles. On est donc bien en configuration de "*Thalès croisé*".
– **Les rapports** : Donc d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{PE}{PN} = \frac{PF}{PM} = \frac{EF}{MN}$$

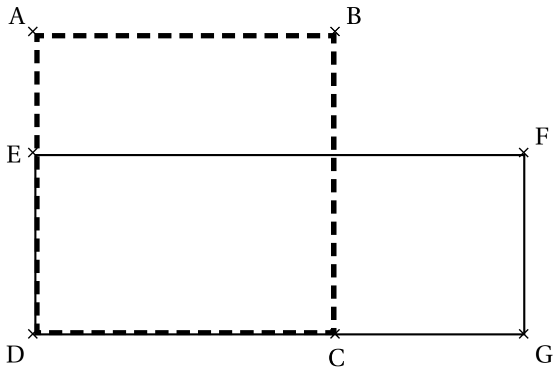
En remplaçant par les valeurs :

$$\frac{2}{5} = \frac{PF}{PM} = \frac{3}{MN} \qquad (2)$$

– **Par produit en croix** : $\boxed{MN = \frac{3 \times 5}{2} = 7,5 \text{ cm}}$.

Exercice 7. (5 points)

Le dessin ci-dessous représente une figure composée d'un carré ABCD et d'un rectangle DEFG. E est un point du segment [AD]. C est un point du segment [DG]. Dans cette figure la longueur AB peut varier mais on a toujours : AE = 15 cm et CG = 25 cm.



1. Dans cette question on suppose que : AB = 40 cm
   a. **Calculer l'aire du carré ABCD**.
   ABCD est un carré donc son aire est donnée par la formule :
   $\boxed{\mathscr{A}_1 = \text{Aire(ABCD)} = \text{AB}^2 = 40^2 = 1\,600 \text{ cm}^2}$

   b. **Calculer l'aire du rectangle DEFG**.
   DEFG est un rectangle donc son aire est donnée par la formule :
   $\mathscr{A}_2 = \text{Aire(DEFG)} = \text{DE} \times \text{DG}$
   Or E∈[AD] donc : DE = AD - AE = 40 cm - 15 cm = 25 cm.
   Et C∈[DG] donc : DG = DC + CG = 40 cm + 25 cm = 65 cm.
   Donc

   $\boxed{\mathscr{A}_2 = \text{Aire(DEFG)} = \text{DE} \times \text{DG} = 25 \times 65 = 1\,625 \text{ cm}^2}$

2. **Peut-on trouver la longueur AB de sorte que l'aire du carré ABCD soit égale à l'aire du rectangle DEFG ? Si oui, calculer AB. Si non, expliquer pourquoi.**

   – Remarquons tout d'abord que : **DE = AD - AE = AB - 15**.
   En effet, AD = AB et AE est fixé à 15 cm.
   – De même : **DG = DC + CG = AB + 25**.
   En effet, DC = AB et CG est fixé à 15 cm.

   Donc on cherche AB pour que : $\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_2$ soit $\text{AB}^2 = \text{DE} \times \text{DG}$
   Cela revient donc à chercher AB qui vérifie l'équation :

$$\text{AB}^2 = (\text{AB} - 15)(\text{AB} + 25) \qquad (3)$$

   En développant le terme de gauche on obtient : $\text{AB}^2 = \text{AB}^2 + 10\text{AB} - 375$
   Les termes en AB^2 s'éliminent ce qui donne :

$$10\text{AB} - 375 = 0 \qquad (4)$$

   Soit

$$\boxed{\text{AB} = \frac{375}{10} = 37{,}5 \text{ cm}} \qquad (5)$$