Math93.com

Puissances

Quatrième/Troisième (cycle 4)

I Puissances d'exposants positifs

Définition 1 (Puissance)

Soit a un nombre réel et n un nombre entier naturel, avec $n \geq 2$.

- Le produit $\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}}$ de n facteurs est une puissance de a. On la nomme ***a* puissance *n*** ou ***a* exposant *n*** :

$$\underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}} = a^n$$

- Cas particuliers :
  - $a^0 = 1$ pour tout réel a différent de 0 ($a \neq 0$) ;
  - $a^1 = a$;
  - a^2 se lit a au carré ou a puissance 2 ;
  - a^3 se lit a au cube ou a puissance 3 .

Exemple

$$\underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3}_{4 \text{ facteurs}} = 3^4 = 81$$

$$\underbrace{(-2) \times (-2) \times (-2)}_{3 \text{ facteurs}} = (-2)^3 = -8$$

$$\underbrace{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10}_{5 \text{ facteurs}} = 10^5 = 100\,000$$

Propriété 1 (Puissance de 10)

Soit n un entier naturel, avec $n \geq 1$ alors :

$$10^n = 1\,\underbrace{0 \cdots 0}_{n \text{ zéros}}$$

Exemple

$10^3 = 1\,000$ (mille)

$10^6 = 1\,000\,000$ (1 million)

$10^9 = 1\,000\,000\,000$ (1 milliard)

II Puissances d'exposants négatifs

Définition 2 (Puissance d'exposants négatifs)

Soit a un nombre réel non nul ($a \neq 0$) et n un nombre entier.

- a^{-n} désigne l'inverse de a^n et donc :

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

- Cas particuliers :
  - $a^{-1} = \frac{1}{a^1} = \frac{1}{a}$. C'est l'inverse de a.

Exemple

$$2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$$

$$(-5)^{-2} = \frac{1}{(-5)^2} = \frac{1}{25}$$

$$(10)^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$$

Propriété 2 (Puissance de 10 d'exposants négatifs)

Soit n un entier naturel, avec $n \geq 1$ alors :

$$10^{-n} = \frac{1}{1\underbrace{0\cdots0}_{n\text{ zéros}}} = \underbrace{0,0\cdots0}_{n\text{ zéros}}1$$

Exemple

$10^{-3} = 0,001$ — 1 millième

$10^{-6} = 0,000001$ — (1 millionième)

III Puissances de 10 et préfixes

* (1 milliardième)

Préfixe	giga	méga	kilo	hecto	déca	unité	déci	centi	milli	micro	nano
Symbole	G	M	k	h	da		d	c	m	μ	n
$\mathbf{10^n}$	10^9	10^6	10^3	10^2	10^1	$10^0 = 1$	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}
	milliard	million	mille	cent	dix		dixième	centième	millième	millionième	*

IV Règles de calcul sur les puissances

Propriété 3 (Règles de calcul sur les puissances)

Soit a, b des réels différents de zéro et m, n des entiers relatifs alors :

1. $a^m \times a^n = a^{m+n}$.
2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ avec $a \neq 0$.
3. $(a \times b)^n = a^n \times b^n$,
4. $(a^m)^n = a^{m \times n}$.

Exemple

1. $3^2 \times 3^3 = \underbrace{3 \times 3}_{2\text{ facteurs}} \times \underbrace{3 \times 3 \times 3}_{3\text{ facteurs}} = 3^{2+3} = 3^5$.
2. $\dfrac{10^3}{10^2} = \dfrac{10 \times 10 \times 10}{10 \times 10} = 10^{3-2} = 10^1 = 10$.
3. $$(2 \times 5)^2 = (2 \times 5) \times (2 \times 5) = 2 \times 2 \times 5 \times 5 = 2^2 \times 5^2$$
   $$= 4 \times 25 = 100$$
   $$(2 \times 5)^2 = 10^2 = 100$$
4. $\left(10^3\right)^2 = \left(10^3\right) \times \left(10^3\right) = 10^{3\times 2} = 10^6$.

ATTENTION

- $\left(3x\right)^2 = \left(3x\right) \times \left(3x\right) = 3^2 \times x^2 = 9x^2$
- $3x^2 = 3 \times x \times x$
- $\left(-x\right)^2 = \left(-x\right) \times \left(-x\right) = (-1)^2 \times x^2 = x^2$
- $-x^2 = -\left(x \times x\right)$

V Notation scientifique

V.1 Définition

Définition 3

La notation scientifique d'un nombre décimal différent de zéro est l'unique écriture de la forme $a \times 10^n$ avec :

$$a \times 10^n \text{ avec } \begin{cases} a \text{ entre } 1 \text{ et } 10 \text{ exclu} : 1 \leq a < 10 \\ n \text{ entier relatif} \end{cases}$$

V.2 En pratique

On cherche la notation scientifique d'un nombre x. On regarde si la distance à zéro de x, que l'on note $|x|$ est entre 0 et 1 ou supérieure à 1.

Si le nombre est entre 0 et 1 en distance à zéro

Si $\mathbf{0} \leq |\boldsymbol{x}| < \mathbf{1}$ alors l'exposant $\boldsymbol{n}$ **sera négatif**.

- $\boxed{0,123\,456 = 1,234\,56 \times 10^{-1}}$.

  ▷ L'exposant est $n = -1$ car on doit déplacer la virgule de 1 rang vers la droite pour obtenir $a = 1,234\,56$ à partir de $x = 0,123\,456$.

- $\boxed{-0,000\,123 = -1,23 \times 10^{-4}}$.

  ▷ L'exposant est $n = -4$ car on doit déplacer la virgule de 4 rang vers la droite pour obtenir $a = -1,23$ à partir de $x = -0,000\,123$.

Si le nombre est supérieur ou égal à 1 en distance à zéro

Si $|\boldsymbol{x}| \geq \mathbf{1}$ alors l'exposant $\boldsymbol{n}$ **sera positif ou nul**.

- $\boxed{123\,456 = 1,234\,56 \times 10^5}$.

  ▷ Astuce : écrire $123\,456 = 123\,456,0$.
  ▷ L'exposant est $n = 5$ car on doit déplacer la virgule de 5 rangs vers la gauche pour obtenir $a = 1,234\,56$ à partir de $x = 123\,456,0$.

- $\boxed{-10\,500 = -1,05 \times 10^4}$.

  ▷ Astuce : écrire $-10\,500 = -10\,500,0$.
  ▷ L'exposant est $n = 4$ car on doit déplacer la virgule de 5 rangs vers la gauche pour obtenir $a = -1,05$ à partir de $x = -10\,500,0$.

V.3 Ordre de grandeur

Propriété 4

Pour obtenir un ordre de grandeur d'un nombre comme 123 456, on peut procéder de différentes façons :

- $\begin{cases} 523\,456 = 5,234\,56 \times 10^5 \\ 5,234\,56 \approx 5 \end{cases}$, donc un ordre de grandeur de 523 456 est 5×10^5.
- On prend la puissance de 10 la plus proche :
  $523\,456 = 5,234\,56 \times 10^5$, donc un ordre de grandeur de 523 456 est 10^5.